УДК 512.531; 515.124; 004.2 doi 10.26089/NumMet.v16r452

# КОМПОЗИЦИЯ ИНФИНИТАРНЫХ СТРУКТУР

**Г. Г. Рябов**[1], **В. А. Серов**[2]

Настоящая статья является продолжением рассмотрения полиморфных свойств троичных символьных матриц (TSM — Ternary Symbolic Matrix) над алфавитом $A = \{0, 1, 2\}$ как биекций кратчайших $k$-мерных путей между антиподальными вершинами (*skap*-путей) в $n$-кубе. Отображение TSM на структуру $k$-арного глобального дерева ($GTk$) определено как генетическое пространство $T(k)$ *skap*-путей. Автоморфизм TSM индуцирует нумерацию вершин $T(k)$ множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$. С позиций такой структуры рассматриваются арифметическая геометрия *skap*-путей и свойства симметричности простых чисел относительно натуральных. В основу исследования симметричности простых предложены разностный таблоид DT (Difference Tabloid) и конструктивный метод оценки его наполнения как индикатора метрических отношений между натуральными и простыми числами.

**Ключевые слова:** $n$-куб, символьная матрица, $k$-арное глобальное дерево, $k$-кортежи натуральных чисел, разностный таблоид, спектр симметрии простых чисел, отношение несовместности.

**1. Введение.** Всплеск в последнее время научного интереса к фундаментальным проблемам теории чисел [1–3] не в последнюю очередь вызван пониманием роли представлений и отображений сложных многомерных объектов в инфинитарные структуры с богатым набором математического инструментария, связанным с возможностью анализа эргодических свойств объектов. К таким ключевым структурам, безусловно, относятся множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, $n$-куб и $k$-арные глобальные деревья. В этом инфинитарном трио явным “носителем” свойств многомерности является структура $n$-куба. Объединяющим звеном является представление объектов в виде слов над конечным алфавитом, над которыми действия групп численно выражаются средствами компьютерных алгебр и арифметик. Общую идеологию взаимодействий в предлагаемом трио можно уяснить из следующей последовательности этапов представлений.

В [4] были предложены биективное представление $k$-граней $n$-куба как множества слов $A_n^*$ над конечным алфавитом $A = \{0, 1, 2\}$ и введение алгебры 1-куба (кубанты). На $k$-гранях $n$-куба введена метрика Хаусдорфа как обобщение метрики Хэмминга [5].

Символьные $n \times (n - k + 1)$ матрицы (TSM) со строками из слов $A_n^*$ (с дополнительными условиями на строки) были рассмотрены в [6, 7] как биекции кратчайших $k$-мерных путей между антиподальными (с хемминговым расстоянием, равным $n$) вершинами $n$-куба (*skap*-пути). В [7] введен инвариант (автоморфизм TSM в виде разбиения) для определения классов эквивалентности *skap*-путей в $n$-кубе. Приведение TSM к диагональному виду (TSMD) и ее гомоморфное отображение в последовательность состояний цепи Маркова из семейства с эргодическими свойствами позволили вычислить стационарные состояния при $n \to \infty$ [6]. На основе TSMD вычисляются топологические и геометрические характеристики (степени вершин, кривизна, кручение) *skap*-пути [8].

В [8] рассмотрено представление TSMD как рекурсивного объекта, введены база и действие декомпозиции рекурсии. Предложено отображение множества TSMD-матриц на основе процесса рекурсии в вершины $k$-арного глобального дерева $GTk$ как генетического пространства $T(k)$ (с метрикой дерева) всех *skap*-путей для $n$-кубов при $n \geqslant k$ и $n \to \infty$ [8].

В вершины $GTk$ отображаются и натуральные числа, которые являются результатом действия автоморфизма на TSMD и нумеруют и матрицы, и вершины дерева. На рис. 1 показана ситуация для трехмерных *skap*-путей (TSMD) в генетическом пространстве $T(3)$ (начальные два поколения-ранга) и наложение “спирали” натуральных $\mathbb{N}$ (как результата автоморфизма) на тернарное дерево.

*Номер вершины однозначно вычисляется по TSMD-матрице, отображенной в эту вершину на основании рекурсии. И обратно, натуральное число, представленное в модифицированной позиционной системе счисления с основанием $k$, однозначно определяет матрицу и вершину $k$-арного дерева.*

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; чл.-корр. РАН, зав. лабораторией, e-mail: gen-ryabov@yandex.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; науч. сотр., e-mail: v_serov_@mail.ru

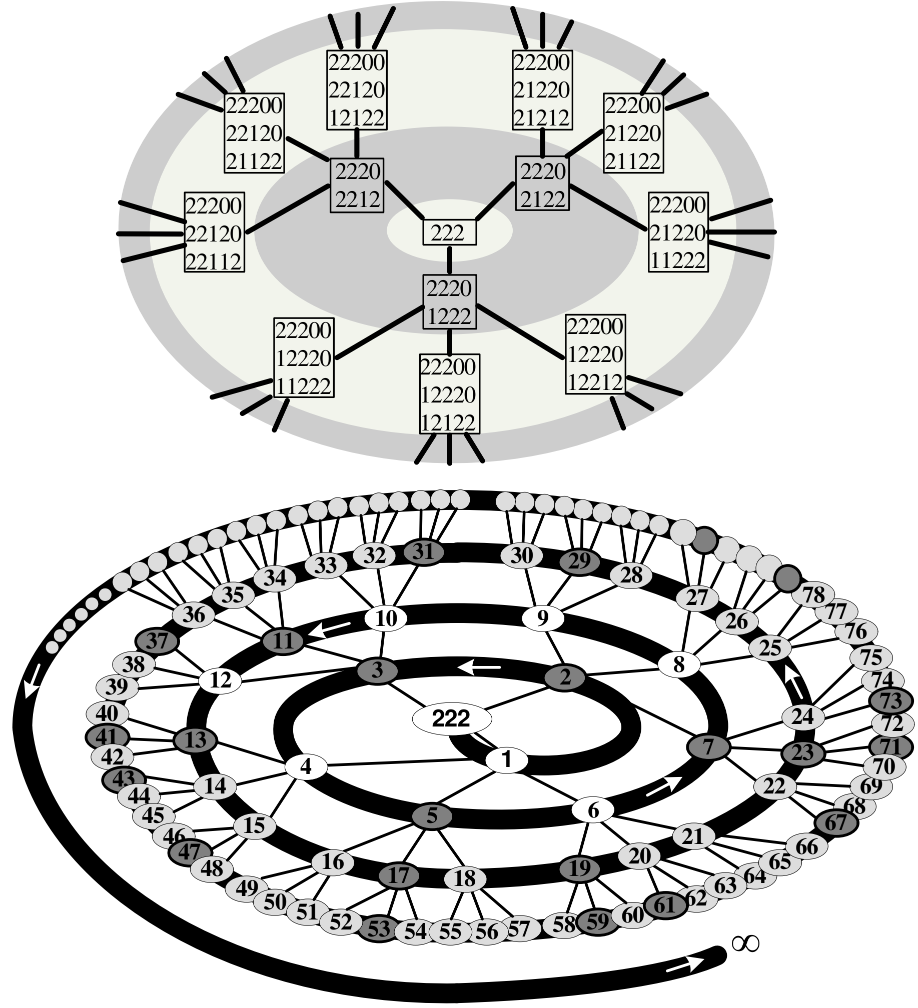


Рис. 1. Генетическое 3-подпространство (тернарное дерево) с двумя начальными поколениями (рангами). В вершины дерева отображены TSMD-матрицы, биективные кратчайшим 3-путям в 4-кубе и 5-кубе. Толстая спираль — направление последовательности нумерации матриц и вершин натуральными $\mathbb{N}$ как результата автоморфизма TSMD-матриц

Исходя из вышеизложенного, дальнейшие разделы настоящей статьи приведены ниже в следующем порядке: принятые обозначения и их пояснение, модифицированная позиционная система счисления, генетические структуры, разностный таблоид и симметричность простых в структуре натуральных.

**2. Принятые обозначения.** Основные обозначения, используемые далее в статье, заимствованы из [8]. Однако иногда новые обозначения приводятся в списке принятых обозначений вместе с ранее введенными, но близкими по смыслу.

- $skap$-путь — кратчайший $k$-мерный путь между антиподальными вершинами $n$-куба;
- $T_d(n,k)$ — TSMD-матрица: символьная матрица диагонального вида, биективная $skap$-пути $n$-куба;
- $T_d(k,k) = 222\dots2$, $\#(2) = k$ — база рекурсии, 0-поколение (0-ранг) в $T(k)$;
- $R(k,g) = \{T_d(k+g,k)\}$ — множество TSMD-матриц $g$-поколения (ранга), $\left|R(k,g)\right| = k^g$, $g \in 0, 1, \dots, \mathbb{N}$;
- $T(k,g) = \bigcup\limits_{s=1}^{g} R(k,s)$, $\left|T(k,g)\right| = \sum\limits_{s=1}^{g} k^s = \dfrac{k^{(g+1)} - k}{k-1}$ — $k$-арное дерево с $g$-поколениями (генетическое $g$-подпространство);
- $T(k) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} R(k,s)$ — генетическое пространство всех TSMD-матриц;

- $\searrow i$ — действие декомпозиции рекурсии (right-down pasting) с заменой “2” на “1” на $i$-й позиции “2” предыдущей строки.

Нулевые элементы матриц, как правило, опущены.

**3. Модифицированная позиционная система счисления с основанием $k$ (mpsk).** Для позиционной системы счисления с основанием $k \in \mathbb{N}$ каждое натуральное число представляется как $s$-разрядное слово над алфавитом $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\} : \ll x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s \gg_k$, где $x_i \in A$, а индексы соответствуют номерам разрядов слова. Если $k \geqslant 10$, то разряд слова может состоять из двух, трех и т.д. букв (в нашем случае цифр) алфавита $A$. В данной статье $k \leqslant 11$. Мы будем рассматривать позиционную систему, исключив из алфавита “0”, т.е. введя *ограничение на запись слова: ни один разряд* $x_i \neq 0$; таким образом, $1 < x_i < k$. Вычисление по слову $\ll x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s \gg_k$ выполняется по правилу

$$\big(\ldots(kx_1 + x_2)k + x_3\big)k + \ldots + x_s = x_1 k^{(s-1)} + x_2 k^{(s-2)} + \ldots + x_s.$$

Будем считать такое представление *нормализованным* в варианте системы $mpsk$. В такой системе допускается и ненормализованное (промежуточное) представление чисел, когда разряд слова может быть числом, значительно превышающим $k$ (записанным, допустим, в обычном десятичном виде). Перевод такого числа в нормализованную форму сродни реализации *переноса* при двухрядовом методе представления чисел как слагаемых в современных компьютерах. Правило переноса является основным при переводе из ненормализованного вида в $mpsk$.

Рассмотрим следующий случай. Пусть задана запись числа в виде слова в ненормализованном виде (соседние разряды отделены символами “|”) и выделен фрагмент трех соседних разрядов при условии, что $y \leqslant k$, как и все последующие за ним разряды, а $r > k$. Тогда перевод разряда $|r|$ в нормализованный вид происходит по следующему правилу (здесь [ ],{ }—целая и дробная части числа):

при $\{r/k\} \neq 0 : \ll \ldots |x|r|y| \ldots \gg \to \ll \ldots |\, x + [r/k] \,|\, \{r/k\} \,|\, y \,| \ldots \gg$;

при $\{r/k\} = 0 : \ll \ldots |x|r|y| \ldots \gg \to \ll \ldots |\, x + [r/k] - 1 \,|\, k \,|\, y \,| \ldots \gg$.

Затем таким же образом преобразуется следующий слева ненормализованный разряд слова, и так до самого левого разряда. Так, например, в $mps5$: $11^5 = \ll 2, 1, 1, 1, 5, 1 \gg_5$.

Следовательно, число $11^5 \in T(5, 6)$ и биективно $7 \times 11$ TSMD-матрице, приводимой ниже (символы “0” опущены). Разряды числа $11^5$ расположены вертикально на одном уровне со строками матрицы, где появляется “1” на позиции, номер которой равен содержимому этого разряда, считая порядок только символов “2” предыдущей строки матрицы.

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{array}
\begin{pmatrix}
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & & \\
2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & \\
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \text{2-я позиция “2” относительно 1-й строки} \\ \text{1-я позиция “2” относительно 2-й строки} \\ \text{1-я позиция “2” относительно 3-й строки} \\ \text{1-я позиция “2” относительно 4-й строки} \\ \text{5-я позиция “2” относительно 5-й строки} \\ \text{1-я позиция “2” относительно 6-й строки} \end{array}$$

Матрица соответствует одному из 5-мерных $skap$-путей в 11-кубе между вершинами $(00\ldots0)$ и $(11\ldots1)$ со всеми вытекающими численными данными по топологической структуре этого пути (кстати, и как 4-мерного многообразия) в соответствии с результатами из [8]. Легко видеть, что вид в $mpsk$ последовательных чисел, которые присвоены вершинам $GTk$-дерева и образуют множество натуральных в поколении $g$-го ранга, есть $g$-разрядные слова:

$$\ll 1, 1, \ldots, 1 \gg_k, \ll 1, 1, \ldots, 1, 2 \gg_k, \ \ldots, \ll k, k, \ldots, k, (k-1) \gg_k, \ll k, k, \ldots, k \gg_k.$$

**4. Генетические структуры и примеры их использования.** Возможности биекции “натуральные $\leftrightarrow$ троичные символьные матрицы” как инструмента *арифметической геометрии* можно наглядно представить на рис. 2 для $k = 3$, т.е. генетического пространства $T(3)$ и кратчайших 3-путей в 7-кубе.

Ниже, в таблице, приведены мощности подпространств $T(k, g)$ для $k = 1 \div 10$, $g = 1 \div 10$.

В качестве примера использования конструкции генетического пространства рассмотрим вопрос размещения в $T(3)$ пар простых чисел-близнецов $(p_i, p_{i+1})$ и докажем следующее

**Утверждение.** *В* $T(3)$ *генетическое расстояние между простыми-близнецами* $(p_i, p_{i+1})$ *больше двух:* $\rho_{\text{gen}}(p_i, p_{i+1}) > 2$.

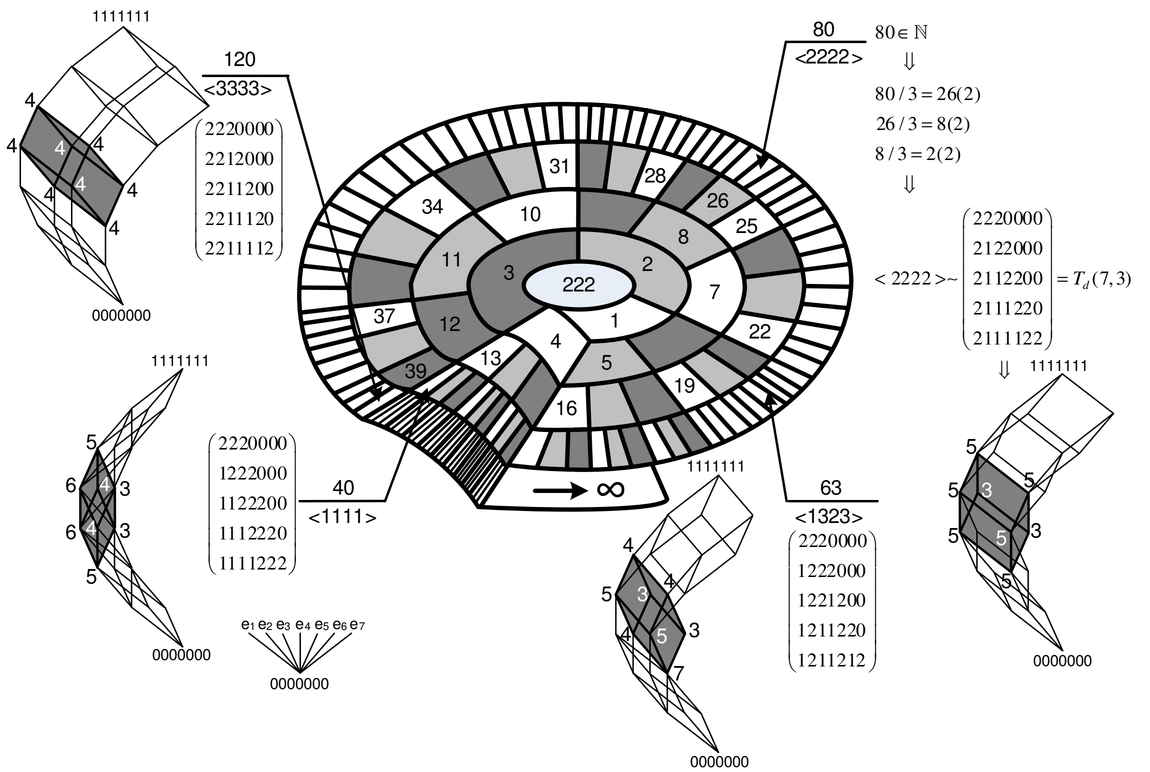


Рис. 2. Натуральные в генетическом пространстве $T(3)$ и пример последовательности биекций "натуральное $\to$ запись в $mps3$ $\to$ троичная матрица диагонального вида $\to$ геометрия кратчайших 3-путей в 7-кубе" (для натуральных 40, 63, 80, 120). Рядом с вершинами 3-путей указаны их степени

Число натуральных в генетических подпространствах $T(k,g)$, $k$— размерность базы рекурсии, $g$ — ранг (число поколений). Число в ( ) равно числу повторений предыдущей цифры (символа). В крайнем правом столбце приведена цикличность последней цифры в $|T(k,g)|$ как инварианта генетического пространства $T(k)$

| $k\backslash g$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | (1,2,3,...,9,0)... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 6 | 14 | 30 | 62 | 126 | 254 | 510 | 1022 | 2046 | (2,6,4,0)... |
| 3 | | 12 | 39 | 120 | 363 | 1092 | 3279 | 9840 | 29523 | 88572 | (3,2,9,0)... |
| 4 | | 20 | 84 | 340 | 1364 | 5460 | 21844 | 87380 | 349524 | 1398100 | (4,0)... |
| 5 | | 30 | 155 | 780 | 3905 | 19530 | 97655 | 488280 | 2441405 | 12207030 | (5,0)... |
| 6 | | 42 | 258 | 1554 | 9330 | 55986 | 335922 | 2015538 | 12093234 | 72559410 | (6,2,8,4,0)... |
| 7 | | 56 | 399 | 2800 | 19607 | 137256 | 960799 | 6725600 | 47079207 | 329554456 | (7,6,9,0)... |
| 8 | | 72 | 584 | 4680 | 37448 | 299592 | 2396744 | 19173960 | 153391688 | 1227133512 | (8,2,4,0)... |
| 9 | | 90 | 819 | 7380 | 66429 | 597870 | 5380839 | 48427560 | 435848049 | 3922632450 | (9,0)... |
| 10 | | 110 | 1110 | 1(4)0 | 1(5)0 | 1(6)0 | 1(7)0 | 1(8)0 | 1(9)0 | 1(10)0 | (0)... |

Мы будем доказывать это утверждение в более наглядной форме, для чего введем понятие исходящей из вершины $v(n)$ $k$-арного дерева (с ассоциированным для этой вершины натуральным $n$) тройки вершин, принадлежащей следующему поколению (рангу) $T(3)$: $M_3(n) \subset T(3,s)$, $v(n) \in T(3,s-1)$.

Три последовательных натуральных $M_3(n) = \{a,b,c\}$ всегда содержат только одно число, делящееся на 3. $M_3(n)$-тройка может быть только двух видов: "четное-нечетное-четное" или "нечетное-четное-нечетное". В первом случае такая тройка не может содержать двух простых, так как нечетное в ней только одно. Поэтому под вопросом остается только тройка вида “нечетное-четное-нечетное”. Допустим, что два нечетных в этой тройке образуют пару простых. Тогда 3 есть делитель только четного и, согласно определению *mpsk* с основанием $k = 3$, запись этого четного в *mpsk* должна заканчиваться на символ 3. А это означает, что это число последнее в этой тройке, что противоречит нашему допущению, и максимально близкое натуральное простое может находиться лишь в другой тройке, т.е. на генетическом расстоянии (минимальном пути по ветвям $GTk$) строго больше двух. Таким образом, *ни одна исходящая тройка в генетическом пространстве* $T(3)$ *не содержит пары простых-близнецов.* Для трех поколений пространства $T(3)$ ситуацию с простыми-близнецами $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, $(29, 31)$ можно видеть на рис. 1.

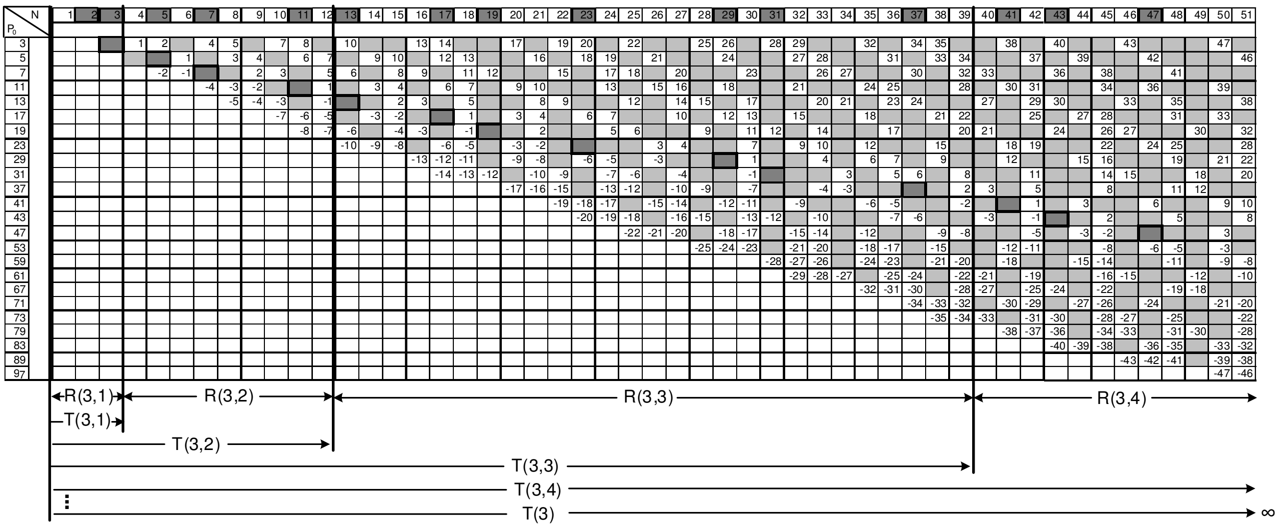


Рис. 3. Фрагмент разностного таблоида DT

**5. Разностный таблоид и симметричность простых в структуре натуральных.** Область определения разностного таблоида DT — двумерное множество клеток с координатами $(n_s, p_i)$, где $n_s \in \mathbb{N}$ и $p_i \in P_0$ — множество нечетных простых $\{3, 5, 7, \ldots, p_i\}$. В каждую клетку $(n_s, p_i)$ таблоида, для координат которых выполнено $|n_s - p_i| \leqslant n_s - 3$, вписано целое число со знаком, равное $d(n_s, p_i) = (n_s - p_i) \in \mathbb{Z}$. Начальный фрагмент такого таблоида показан на рис. 3. Другими словами, DT — это развертка генетической структуры инфинитарного трио (пути в $n$-кубе, $k$-арные деревья, множество натуральных $\mathbb{N}$) вдоль множества нечетных простых с приписыванием каждой клетке $(n_s, p_i)$ веса $(n_s - p_i) \in \mathbb{Z}$. Таким образом, клетки каждого $n_s$-го столбца таблоида DT содержат значения расстояния (со знаком) от натурального $n_s$ до простых: со знаком “+” для $n_s > p_i$ и со знаком “-” для $n_s \leqslant p_i$ и $|n_s - p_i| \leqslant (n_s - 3)$. Простые, для которых $d(n_s, p_i) > 0$, будем называть простыми “слева” от $n_s$, а при $d(n_s, p_i) < 0$ —“правыми” от $n_s$.

Пара клеток $n_s$-го столбца, для которых $\left|d(n_s, p_i)\right| = \left|d(n_s, p_j)\right|$, соответствует эквидистантным (симметричным) простым $p_i$ и $p_j$ относительно натурального $n_s$. Отсюда общее число таких пар в столбце $n_s$ можно рассматривать как показатель симметричности простых относительно натурального $n_s$, а множество соответствующих $\left|d(n_s, p_i)\right|$ — как спектр $p$-симметричности для $n_s$: $Spec_p(n_s)$. В этой конструкции на равных правах в ряду натуральных выступают и сами простые.

Так, например, для $n_s = 23$ : $Spec_p(23) = \{6, 18, 20\}$, что соответствует эквидистантным парам простых $(17, 29)$, $(5, 41)$, $(3, 43)$.

Прямой путь вычисления всех значений в клетках DT для достаточно больших значений натуральных и простых и применение методов анализа к этим данным как реализации некоторого случайного процесса (или процессов) мы оставим за рамками этой статьи. Подойдем к процессу формирования DT как к вполне детерминированному, привлекая прежде всего генетические конструкции на основе рекурсии троичных символьных матриц, которая привела к объединению структур $n$-куба, $k$-арных глобальных деревьев и последовательности натуральных $\mathbb{N}$ [8].

Итак, в этой части статьи:

- $P_0$ — нечетные простые $\{3, 5, 7, 11, \ldots\}$ с нумерацией в $P_0$: 1,2,3,4,. . . ;
- $GTk$ — $k$-арное глобальное дерево с единственным корнем (степень вершины-корня $k$) и числом вершин в каждом ранге $k^g$, где ранг $g \in 0, 1, \ldots, \mathbb{N}$ — множество вершин с равной длиной $(g)$ пути

по ребрам дерева до корня (ранг корня 0);

- $\mathbb{N}/GTk$-последовательность натуральных как нумерация вершин дерева $GTk$ однозначно представлена цепью $k$-кортежей последовательных натуральных; начальный $k$-кортеж в цепи $<1, 2, 3, \ldots k>$, за ним следуют $< k+1, k+2, \ldots, 2k >$, $< 2k+1, 2k+2, \ldots, 3k >, \ldots$;
- $< n_1, n_2, \ldots, n_k >$ — $k$-й кортеж: $n_s = n_1 + (s-1)$; $n_k$ делится на k;
- $h^*_k(n_s)$ — номер числа $n_s$ в $k$-кортеже;
- $//p_i, n_s, p_j//$ — эквидистантная тройка: "простое слева" с номером $i$ из $P_0$, натуральное $n$ с номером $s$ из $\mathbb{N}$, "простое справа" с номером $j$ из $P_0$, для которой $(n_s - p_i) = |n_s - p_j|$;
- $h^*_p(p_i) = i$ — номер простого в последовательности $P_0$;
- $Spec_p(n_s) = \{d_{s,i_1}, d_{s,i_2}, \ldots, d_{s,i_m}\}$ — спектр симметричных простых для $n_s$.

Ключевой момент рассмотрения — *однозначный ответ на вопрос: при заданных номере $i$ (в $P_0$) "левого простого" и номере в $k$-кортеже натурального $n_s$ являются ли эти числа совместимыми, чтобы образовать эквидистантную пару с клеткой (еще не заполненной), в которой должна быть записана разность между $n_s$ и "правым простым" ($p_j$) или кандидат на эквидистантный "правый простой" не может быть простым числом — эквидистантное место уже "занято" составным числом?*

**Пример.** Пусть значения $k = 3$, $n_s = 26$, $p_i$("левое простое") $= 19$. Тогда $h^*_k(n_s) = h^*_3(26) = 2^*$, $h^*_k(p_1) = h^*_3(7) = 1^*$ и для выполнения эквидистантности тройка номеров в 3-кортежах (при первых двух $1^*$ и $2^*$) должна иметь вид $(1^*, 2^*, 3^*)$. Это означает, что "правое число" делится на 3 (как все третьи числа в 3-кортежах) и не может быть простым. Следовательно, $p_i = 19$ и $n_s = 26$ — несовместимы и эта клетка таблоида не будет иметь парной эквидистантной в столбце $s$. Действительно, эквидистантное место занято составным 33. В то же время, для левого простого $p_i = 11 :\ h^*_3(11) = 2^*$ и тройка номеров в 3-кортежах имеет допустимый вид $(2^*, 2^*, 2^*)$, и правое эквидистантное простое $26 + 11 = 37$.

Установление факта несовместимости клетки $(n_s, p_i)$ быть эквидистантной (т.е. имеющей парную в столбце $n_s$) только по номеру $i$ "левого простого" и номеру натурального $h^*_k(n_s)$ является основой раскраски таблоида DT в два цвета, т.е. клеток как несовместимых и совместимых (еще не обязательно парных клеток!). Сам процесс раскраски "по номерам", или, точнее, определение алгоритма раскраски для простых с последовательными номерами простых $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ $(P_0 = \{3, 5, 7, 11, \ldots\})$, можно рассматривать как *предварительное решето* для оценки свойств эквидистантности простых.

Примем следующее обозначение для 3-кортежа и позиции натурального в нем: $\|\quad |x| \quad\|$ — в данном случае номер позиции числа $x$ равен 2, т.е. $h^*_3(x) = 2$.

Анализируя 3-кортежи на предмет совместимости в них номеров позиций, приходим к следующему выводу. Несовместимые позиции соответствуют значениям $(A1)$ при кандидатах на симметрию $x_1 = p_i$, $x_3 = p_j$ для натурального $x_2 = n_s$:

$$\begin{aligned}
&\ldots\|x_1|\quad|\quad\|\ldots\|\quad|x_2|\quad\|\ldots\|x_3|\quad|\quad\|\ldots \to (1^*, 2^*, 1^*)\\
&\ldots\|x_1|\quad|\quad\|\ldots\|x_2|\quad|\quad\|\ldots\|\quad|x_3|\quad\|\ldots \to (1^*, 1^*, 2^*)\\
&\ldots\|x_1|\quad|\quad\|\ldots\|\quad|x_2|\quad\|\ldots\|\quad|x_3|\quad\|\ldots \to (1^*, 2^*, 2^*)\\
&\ldots\|\quad|x_1|\quad\|\ldots\|x_2|\quad|\quad\|\ldots\|x_3|\quad|\quad\|\ldots \to (2^*, 1^*, 1^*)
\end{aligned} \tag{A1}$$

Совместимые позиции соответствуют значениям $(A2)$:

$$\begin{aligned}
&\ldots\|x_1|\quad|\quad\|\ldots\|x_2|\quad|\quad\|\ldots\|x_3|\quad|\quad\|\ldots \to (1^*, 1^*, 1^*)\\
&\ldots\|x_1|\quad|\quad\|\ldots\|\quad|\quad|x_2\|\ldots\|\quad|x_3|\quad\|\ldots \to (1^*, 3^*, 2^*)\\
&\ldots\|\quad|x_1|\quad\|\ldots\|\quad|x_2|\quad\|\ldots\|\quad|x_3|\quad\|\ldots \to (2^*, 2^*, 2^*)\\
&\ldots\|\quad|x_1|\quad\|\ldots\|\quad|\quad|x_2\|\ldots\|x_3|\quad|\quad\|\ldots \to (2^*, 3^*, 1^*)
\end{aligned} \tag{A2}$$

Анализируя аналогичные $(A1)$, $(A2)$ ситуации для 5-, 7-, 11-, ...-кортежей, приходим к следующему выводу. Условия несовместимости чисел $p_i$ и $n_s$ по их номерам в $k$-кортежах устанавливаются следующим образом. Пусть $h^*_k(p_i) = x_1$, $h^*_k(n_s) = x_2$. Тогда решение следующего линейного сравнения с двумя неизвестными будет давать *множество пар несовместимых номеров* (третье число $x_3$ к таким парам *не может быть одновременно и эквидистантным с первым, и простым*):

$$2x_2 - x_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k), \quad 1 \leqslant x_1 < k, \quad 1 \leqslant x_2 \leqslant k. \tag{1}$$

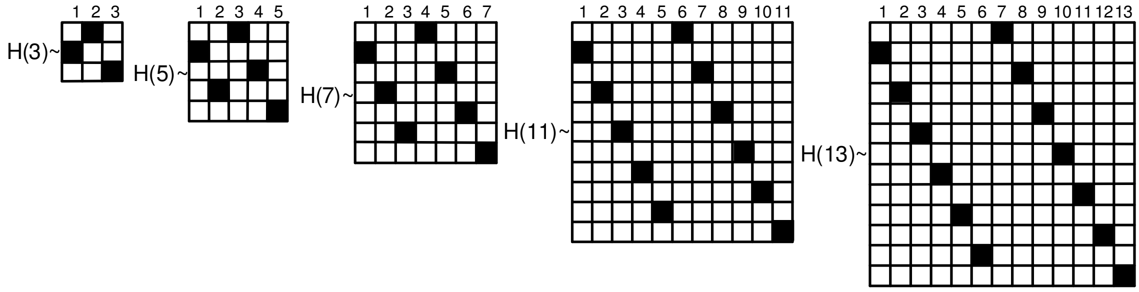


Рис. 4. Расположение несовместных номеров для симметричных простых на “шахматных” $p_i \times p_i$ досках

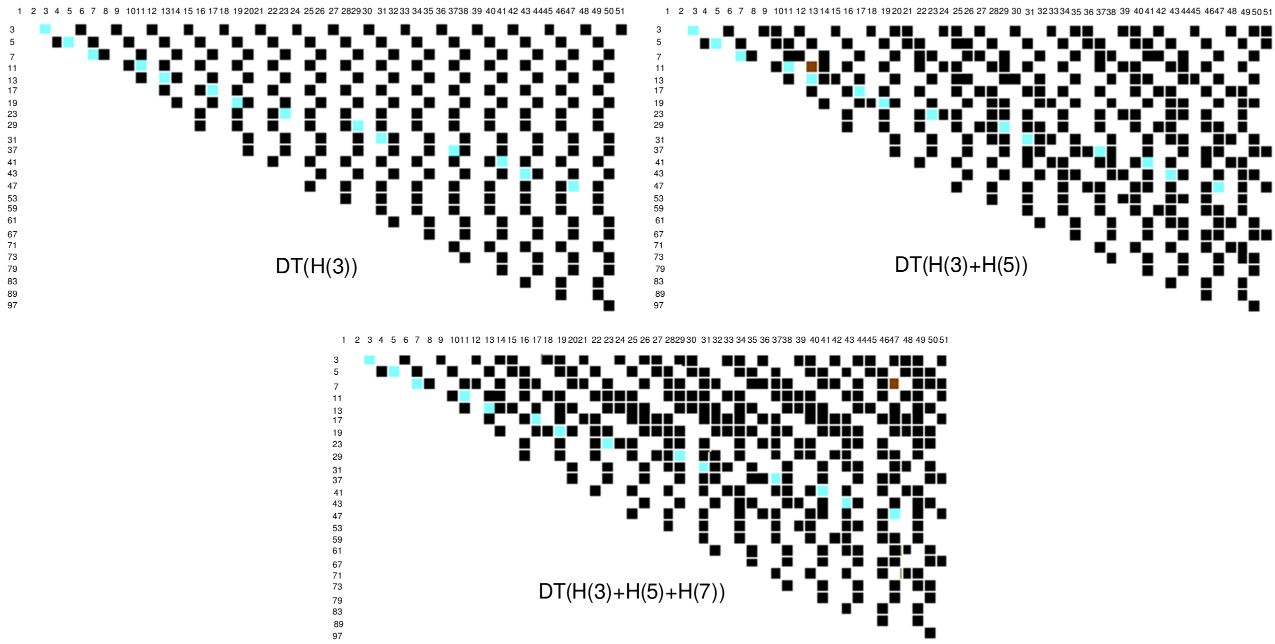


Рис. 5. Несовместные (темный цвет) клетки DT после отображений решений сравнения (1): $H(3)$; $H(3)+H(5)$; $H(3)+H(5)+H(7)$

**Замечание.** Здесь $x_1$ не может быть равно $k$ (кроме 1-го кортежа) как последнее число в $k$-кортеже, кратное $k$, и поэтому не простое, но $x_2$ может быть равно $k$, так как для него нет ограничения быть простым.

Выражение (1) можно назвать *отношением симметрической несовместности* простых $x_1$ и $x_3$ относительно натурального $x_2$ в генетической структуре с базой $k$: $\mathbb{N}/T(k)$. Если положить $(2p_i+1)/2 = m_1$ и $p_i - 1 = m_2$, то множество решений сравнения (1) принимает вид

$$\begin{aligned} H(p_i) = \bigl\{&(1^*, m_1^*), (2^*, 1^*), (3^*, m_1+1^*), (4^*, 2^*), (5^*, m_1+2^*), (6^*, 3^*), \ldots, \\ &\ldots (m_2-1^*, m_2^*), (m_2^*, m_2/2^*), (p_i^*, p_i^*)\bigr\}, \quad \bigl|H(p_i)\bigr| = p_i. \end{aligned} \tag{2}$$

При отслеживании начальных шагов действия решета (для $k = 3, 5, 7, \ldots$) для пометки несовместных клеток DT удобно иметь перед глазами множества несовместных номеров в $k$-кортежах, для чего мы их ниже приводим:

$$\begin{aligned} H(3) &= \bigl\{(1^*, 2^*), (2^*, 1^*), (3^*, 3^*)\bigr\}; \\ H(5) &= \bigl\{(1^*, 3^*), (2^*, 1^*), (3^*, 4^*), (4^*, 2^*), (5^*, 5^*)\bigr\}; \\ H(7) &= \bigl\{(1^*, 4^*), (2^*, 1^*), (3^*, 5^*), (4^*, 2^*), (5^*, 6^*), (6^*, 3^*), (7^*, 7^*)\bigr\}; \\ H(11) &= \bigl\{(1^*, 6^*), (2^*, 1^*), (3^*, 7^*), (4^*, 2^*), (5^*, 8^*), (6^*, 3^*), (7^*, 9^*), (8^*, 4^*), \\ &\quad (9^*, 10^*), (10^*, 5^*), (11^*, 11^*)\bigr\}; \\ H(13) &= \bigl\{(1^*, 7^*), (2^*, 1^*), (3^*, 8^*), (4^*, 2^*), (5^*, 9^*), (6^*, 3^*), (7^*, 10^*), (8^*, 4^*), (9^*, 11^*), \\ &\quad (10^*, 5^*), (11^*, 12^*), (12^*, 6^*), (13^*, 13^*)\bigr\}. \end{aligned}$$

Естественно рассмотреть отображение $H(p_i)$ в $(p_i \times p_i)$-матрицу $M^*(p_i)$, в которой парам несовместных номеров $(x^*, y^*)$ соответствуют элементы $m_{x^*,y^*} = 1$, остальные элементы равны 0. Представляя матрицу $M^*(p_i)$ как аналог шахматной доски (рис. 4), легко видеть, что ненулевые элементы матрицы располагаются на ней ходом коня.

Таким изящным видом прогноза симметричности простых в структуре натуральных хочется дать следующий ответ на вопрос Кевина Форда "Простые числа играют в кости?", который был задан на семинаре "Глобус" в Москве в июне 2015 г.: "Да играют, но не в кости, а скорее в шахматы на досках $p_i \times p_i$". Это представление порождает возможности анализа новых свойств взаимосвязи простых и натуральных, однако обсуждение этих возможностей находится вне рамок данной статьи. Приведем иллюстрацию динамики раскраски DT при последовательном выделении несовместных клеток для $p_1 = 3$; $p_2 = 5$; $p_3 = 7; \ldots$ и индуцирующих общую интерференционную картину симметричности простых среди натуральных (рис. 5).

**6. Заключение.** Композиции инфинитарных или близких к ним структур (наподобие эскизно рассмотренной выше) вероятно будут играть в будущем все более важную роль в решении биологических, экономических и социальных проблем. Прежде всего, в изучении вопросов эргодического поведения одной структуры внутри другой, вплоть до минимальных представлений на уровне диаграмм и таблиц Юнга. Поэтому вопрос, как ответит на это архитектура будущих компьютеров, призванных с помощью сопроцессоров эффективно работать с *полиморфными биекциями* объектов, где *важна роль точной арифметики больших целых чисел в различных системах счисления*, во многом может оказаться определяющим.

Авторы выражают благодарность РФФИ за поддержку работ в рамках гранта 09–07–12135-офи_м, которые послужили трамплином к работам 2014–2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pintz J.* Patterns of primes in arithmetic progressions. 2015 (http://arxiv.org/abs/1509.01564).
2. *Ford K., Green B., Konyagin S., Maynard J., Tao T.* Long gaps between primes. 2015 (http://arxiv.org/abs/1412.5029).
3. *Polymath D.H.J.* Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes. 2014 (http://arxiv.org/abs/1407.4897).
4. *Рябов Г.Г.* О четверичном кодировании кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**. 340-347.
5. *Рябов Г.Г.* Хаусдорфова метрика на гранях $n$-мерного куба // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. **16**, № 1. 151–155.
6. *Ryabov G.G., Serov V.A.* "Multidimensional metro" and symbol matrices // International Journal of Open Information Technologies. 2014. **2**, N 11. 10–18.
7. *Ryabov G.G., Serov V.A.* On classification of $k$-dimension paths in $n$-cube // Applied Mathematics. 2014. **5**, N 4. 723–727 (available at http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.54069).
8. *Ryabov G.G., Serov V.A.* Polymorphism of symbolic ternary matrices and genetic space of the shortest $k$-paths in the $n$-cube // International Journal of Open Information Technologies. 2015. **3**, N 7. 1–11.

Поступила в редакцию
10.09.2015

---

## Composition of Infinitary Structures

**G. G. Ryabov**[1] **and V. A. Serov**[2]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Dr. Sci., Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Head of Laboratory, e-mail: gen-ryabov@yandex.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Scientist, e-mail: v_serov_@mail.ru*

Received September 10, 2015

**Abstract:** The infinitary structure of an $n$-cube, global $k$-ary trees, and natural numbers are considered as a single genetic structure. A number of geometric characteristics of the shortest paths in an $n$-cube are specified and the properties of prime number symmetry among the natural numbers are studied on the basis of this structure.

**Keywords:** $n$-cube, symbolic matrix, global $k$-ary tree, $k$-tuples of natural numbers, difference tabloid, symmetry of prime numbers, incompatibility relation.

## References

1. J. Pintz, *Patterns of Primes in Arithmetic Progressions*, arXiv preprint: 1509.01564v2 [math.NT] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2015), available at http://arxiv.org/abs/1509.01564.

2. K. Ford, B. Green, S. Konyagin, et al., *Long Gaps between Primes*, arXiv preprint: 1412.5029v2 [math.NT] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2015), available at http://arxiv.org/abs/1412.5029.

3. D. H. J. Polymath, *Variants of the Selberg Sieve, and Bounded Intervals Containing Many Primes*, arXiv preprint: 1407.4897v4 [math.NT] (Cornell Univ. Library, Ithaca, 2014), available at http://arxiv.org/abs/1407.4897.

4. G. G. Ryabov, "On the Quaternary Coding of Cubic Structures," Vychisl. Metody Programm. **10**, 340–347 (2009).

5. G. G. Ryabov, "Hausdorff Metric on Faces of the $n$-Cube," Fundam. Prikl. Mat. **16** (1), 151–155 (2010) [J. Math. Sci. **177** (4), 619–622 (2011)].

6. G. G. Ryabov and V. A. Serov, "Multidimensional Metro and Symbol Matrices," Int. J. Open Inform. Technol. **2** (11), 10–18 (2014). http://injoit.org/index.php/j1/article/view/157/116. Cited November 6, 2015.

7. G. Ryabov and V. Serov, "On Classification of $k$-Dimension Paths in $n$-Cube," App. Math. **5** (4), 723–727 (2014). doi: 10.4236/am.2014.54069

8. G. G. Ryabov and V. A. Serov, "Polymorphism of Symbolic Ternary Matrices and Genetic Space of the Shortest $k$-Paths in the $n$-Cube," Int. J. Open Inform. Technol. **3** (7), 1–11 (2015). http://injoit.org/index.php/j1/article/view/214/173. Cited November 6, 2015.