

УДК 514.174.2:519.6

doi 10.26089/NumMet.v16r230

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПАКОВОК ДЛЯ КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ НА ПЛОСКОСТИ

А. Л. Казаков¹, П. Д. Лебедев²

Рассматривается задача об упаковке заданного числа равных кругов в компактное множество на плоскости при наибольшем возможном их радиусе. Разработан аналитический алгоритм отыскания наилучшей упаковки одного круга в многоугольник в евклидовом пространстве, основанный на максимизации функции расстояния от границы. На его основе создан алгоритм итерационного улучшения упаковки в выпуклое множество, использующий разбиение на подмножества (зоны Дирихле) с помощью диаграммы Вороного. Предложен численный алгоритм построения упаковки для случаев невыпуклого множества и неевклидовой метрики, основанный на оптико-геометрической аналогии. Проведено численное решение ряда примеров при большом количестве элементов упаковки в евклидовом пространстве и для одной специальной неевклидовой метрики.

Ключевые слова: упаковка кругов, зона Дирихле, диаграмма Вороного, оптико-геометрический метод, вычислительный алгоритм, программный комплекс.

1. Введение. При решении разного рода прикладных задач часто требуется заменить множество со сложной геометрией набором более простых однотипных объектов. Одним из наиболее распространенных вариантов такой замены является аппроксимация ограниченного множества объединением заданного числа шаров равного радиуса. При этом обычно рассматриваются две различных постановки: построение покрытия, когда требуется, чтобы исходное множество лежало внутри объединения шаров; и упаковка, когда, напротив, шары вложены в аппроксимируемое множество. Задача об упаковке возникает, в частности, в транспортной и инфраструктурной логистике [1, 2]; о покрытии — в оптимальном управлении [3]. Авторами настоящей статьи ранее в основном исследовалась задача о покрытии [4–6], задача об упаковке рассматривалась применительно к правильным многоугольникам на плоскости [4].

Задача об упаковке шаров в компактное множество в конечномерном пространстве является одной из классических проблем комбинаторной геометрии [7–9]. Одним из важных ее приложений является расстановка торговых либо логистических центров, обеспечивающая наилучший охват области, где проживают потребители. При этом центры, фактически, размещаются в центрах кругов упаковки [10, 11] (при специальном выборе метрики; непосредственно в работах об этом не упоминается), и они должны обслуживать потребителей, расположенных не только внутри “своего” круга, но и частично за его пределами.

Многими математиками изучались упаковки базовых геометрических фигур на плоскости уже давно. В частности, задача о построении наилучшей упаковки для квадрата рассматривалась в работах [12–15], где получены результаты при числе элементов упаковки от 1 до 200. При малом их количестве ($n \leq 36$) упаковки U_n найдены аналитически и доказано, что они являются наилучшими. Установлено, что для радиуса r^* наилучшей упаковки U_n квадрата с длиной стороны $a = 2$ выполняется оценка $r^* \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3n^2}}$ (подробнее см. в [12, с. 146]). Задача о построении наилучшей упаковки для круга рассматривалась в работах [16–18]. В них получены результаты при числе элементов упаковки от 1 до 85. В отличие от квадрата, наилучшие упаковки круга обычно обладают регулярной структурой. Все известные наборы кругов U_n наибольшего радиуса, вложенные в круг, имеют хотя бы одну ось симметрии, а их центры образуют симметричные структуры (подробнее см. [16]). Пример наилучшей упаковки в круг U_{31} , имеющей 6 осей симметрии, показан на рис. 1 [16, с. 148]. Можно видеть, что упаковка является гексагональной, т.е. центры любых шести кругов, окружающих любой из кругов из U_{31} , являются вершинами правильного шестиугольника (подробнее о данном виде упаковок см. в [17]). Подобные аналитически построенные примеры оптимальных упаковок используются при разработке программных комплексов для оценки качества результатов.

¹ Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, 664033, г. Иркутск; зав. лабораторией, e-mail: kazakov@icc.ru

² Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, 620990, г. Екатеринбург; науч. сотр., e-mail: pleb@yandex.ru

При больших n , а также в случае, когда метрика, задающая расстояние между двумя точками, не является евклидовой, решение задачи об упаковке, вообще говоря, можно построить только численно. Настоящая статья продолжает начатые авторами ранее исследования по аппроксимации множеств на плоскости наборами кругов [4–6], а также по решению задачи об оптимальном размещении логистических объектов на полигоне обслуживания [1, 10, 11], и посвящена разработке и программной реализации алгоритмов построения оптимальных упаковок шаров (кругов) в метрических пространствах размерности два. Рассмотрены тестовые примеры как в евклидовой метрике при больших n , так и для специальной неевклидовой метрики.

2. Постановка задачи. Пусть X — некоторое метрическое пространство.

Определение 1. Упаковкой U_n компактного множества $M \subset X$ из n шаров радиуса r будем называть объединение $O(x_1, r) \cup O(x_2, r) \cup \dots \cup O(x_n, r)$ из n шаров, для которых выполняются условия

$$\forall i = \overline{1, n} \quad O(x_i, r) \subseteq M, \\ \forall i = \overline{1, n-1}, \forall j = \overline{i+1, n} \quad \text{int } O(x_i, r) \cap \text{int } O(x_j, r) = \emptyset.$$

Здесь int означает объединение внутренних точек множества. Таким образом, набор шаров равного радиуса является упаковкой множества M в том случае, если все они вложены в M и все попарно пересекаются только по своим границам (либо не имеют общих точек).

Поскольку в данной работе рассматриваются метрические пространства размерности два (в основном — евклидово), будем далее именовать шары кругами.

Обозначим множество всех упаковок множества M , состоящих из n кругов, через $\Upsilon_n(M)$. Ограничимся далее рассмотрением выпуклых множеств ненулевой площади.

Задача 1. Пусть задано ограниченное замкнутое выпуклое множество M и число $n \in \mathbb{N}$. Требуется найти упаковку $U_n^* \in \Upsilon_n(M)$, радиус r^* кругов которой был бы максимальным.

Упаковку U_n^* , являющуюся решением задачи 1, назовем наилучшей упаковкой множества M , состоящей из n элементов. Ее решение сводится к отысканию некоторой n -сети S_n (т.е. набора из n точек, см. [24]). Именно, необходимо найти n -сеть $S_n \subset M$, на которой достигается максимальное значение функции

$$R_M(S_n) = \min_{i=1, n} \min \left\{ \frac{\rho(s_i, (S_n \setminus \{s_i\}))}{2}, \rho(s_i, \partial M) \right\}. \quad (1)$$

Здесь $\rho(a, B)$ — расстояние от точки a до замкнутого множества B . Смысл выражения (1) состоит в том, чтобы максимизировать радиус равных кругов, которые можно разместить с центрами в точках из S_n так, чтобы они пересекались друг с другом и с границей ∂M множества M только в точках ограничивающих их окружностей.

3. Построение упаковки из одного круга. Рассмотрим задачу 1 при $n = 1$ в двумерном евклидовом пространстве. Это наиболее простой случай, который, однако, очень важен для разработки алгоритмов построения упаковок. Отыскание центра круга максимального радиуса, упакованного во множество M , согласно формуле (1), сводится к нахождению точки $s \in M$, в которой

$$\rho(s, \Gamma) = \min_{m \in M} \rho(m, \Gamma). \quad (2)$$

Здесь и далее Γ — непрерывная кривая (в общем случае негладкая), совпадающая с границей множества M . Величина (2) равна радиусу упакованного круга.

Обозначим через $\Omega_\Gamma(s) = \{g \in \Gamma: \|s - g\| = \rho(s, \Gamma)\}$ совокупность проекций точки s на множество Γ (т.е. ближайших к s точек Γ в евклидовой метрике). Поскольку Γ , вообще говоря, невыпуклое множество (в данном случае — всегда невыпуклое, так как мы не рассматриваем случай, когда M — отрезок), то в некоторых случаях $\Omega_\Gamma(s)$ может содержать более одного элемента (подробнее см. [19]). Поскольку M — выпукло, то $M = \text{co } \Gamma$, где $\text{co } \Gamma$ — выпуклая оболочка Γ .

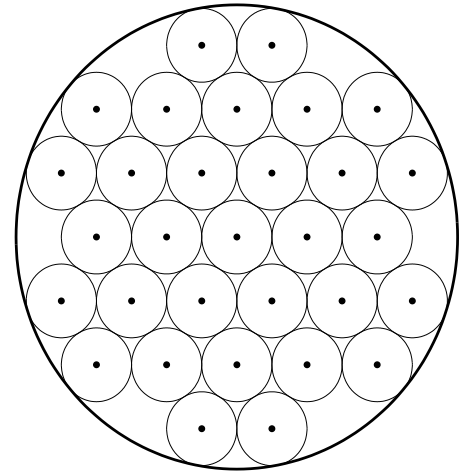


Рис. 1. Наилучшая упаковка U_{31} для круга

Лемма 1. Пусть M — выпуклое множество. Тогда точка s удовлетворяет условию (2) тогда и только тогда, когда

$$s \in \text{co } \Omega_{\Gamma}(s). \tag{3}$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим свойства функции $u(x) = \rho(x, \Gamma)$ на множестве M . Покажем, что на нем $u(x)$ является вогнутой, т.е. для всех $x_1, x_2 \in M$ и всех $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$u(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha u(x_1) + (1 - \alpha)u(x_2). \tag{4}$$

Положим $x^* = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, $r_i = u(x_i)$, $i = \overline{1, 2}$, $r^* = \alpha r_1 + (1 - \alpha)r_2$. По построению

$$\text{int } O(x_i, r_i) \cap \Gamma = \emptyset, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Покажем, что выполняется вложение

$$\text{int } O(x^*, r^*) \subseteq \text{co}(\text{int } O(x_1, r_1) \cup \text{int } O(x_2, r_2)). \tag{5}$$

Рассмотрим произвольную точку $y^* \in \text{int } O(x^*, r^*)$. По построению она лежит на отрезке $[y_1, y_2]$, где

$$y_i = x_i + \frac{r_i}{r^*} (y^* - x^*), \quad i = \overline{1, 2}.$$

При этом $y_i \in \text{int } O(x_i, r_i)$, $i = \overline{1, 2}$. Следовательно, любая точка $y^* \in \text{int } O(x^*, r^*)$ принадлежит отрезку, один конец которого лежит в $\text{int } O(x_1, r_1)$, а другой — в $\text{int } O(x_2, r_2)$. Значит, выполняется и вложение (5). Поскольку $\text{int } M$ — выпуклое множество, то из вложения (5) вытекает, что $\text{int } O(x^*, r^*) \subseteq \text{int } M$, т.е. $\text{int } O(x^*, r^*) \cap \Gamma = \emptyset$, что, в свою очередь, доказывает выполнение неравенства (4).

Функция $u(x)$ расстояния до Γ на $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ является супердифференцируемой [20, с. 243], ее супердифференциал равен

$$D^+u(x) = \text{co} \left\{ \frac{x - y}{\rho(x, M)} : y \in \Omega_{\Gamma}(x) \right\}. \tag{6}$$

Известно, что вогнутая функция на замкнутом множестве достигает максимума в той и только в той точке, в которой ее супердифференциал содержит нулевой вектор [21]. Форма супердифференциала (6) указывает, что это условие равносильно выполнению включения (3). Что и требовалось доказать. □

Лемма 1 позволяет указать метод отыскания центра наилучшей упаковки одного круга в выпуклый многоугольник.

Теорема 1. Пусть M — выпуклый многоугольник, граница которого состоит из m отрезков ψ_i , $i = \overline{1, m}$. В точке $s \in M$ достигается максимум функции $u(x) = \rho(x, \Gamma)$ только в том случае, если выполнено хотя бы одно из двух следующих условий:

- 1) s является точкой пересечения биссектрис треугольника $\Delta A_1A_2A_3$, вершины которого суть точки пересечения трех прямых, каждая из которых содержит отрезок из числа ψ_i , $i = \overline{1, m}$;
- 2) точка s равноудалена от двух параллельных прямых, каждая из которых содержит отрезок из числа ψ_i , $i = \overline{1, m}$.

Доказательство. В первую очередь заметим, что любая точка $y \in \Omega_{\Gamma}(s)$ не может быть вершиной многоугольника M , если $s \in \text{int } M$. Действительно, рассмотрим произвольную вершину m_i многоугольника, полагая без ограничения общности, что ее номер не равен 1 или m . Построим круг $O(s, \|s - m_i\|)$ и отрезки $[m_i, m_{i-1}]$ и $[m_i, m_{i+1}]$. Так как по условию M — выпуклый многоугольник, то угол при вершине m_i меньше, чем π , а поскольку точка s является внутренней для M , то хотя бы один из углов, которые вектор $m_i - s$ образует либо с вектором $m_i - m_{i-1}$, либо с вектором $m_i - m_{i+1}$, меньше $\pi/2$. Следовательно, хотя бы один из отрезков $[m_i, m_{i-1}]$ или $[m_i, m_{i+1}]$ в окрестности точки m_i направлен вдоль луча, заходящего внутрь круга $O(s, \|s - m_i\|)$, и на нем найдутся точки, лежащие ближе к s , чем к m_i .

Из проведенных рассуждений следует, что любая проекция $y \in \Omega_M(s)$, лежащая на отрезке $[m_i, m_{i-1}]$, не совпадает с его концами, а значит, вектор $y - s$ ортогонален вектору $m_i - m_{i+1}$ (в противном случае на $[m_i, m_{i-1}]$ нашлась бы точка, расположенная ближе к s). Условие (3) для точки s означает, что она принадлежит выпуклой оболочке множества $\Omega_M(s)$. Согласно теореме Каратеодори [19], для любой точки s выпуклого множества в евклидовом пространстве размерности n найдется подмножество Φ , состоящее не более чем из $n + 1$ точек, такое, что s является выпуклой комбинацией элементов из Φ (т.е. $s \in \text{co } \Phi$).

Для фигур на плоскости, в частности для $\Omega_M(s)$, это означает, что найдется набор не более чем из трех точек $\Omega_M^*(s) \subseteq \Omega_M(s)$, такой, что $s \in \text{co } \Omega_M^*(s)$. Что касается расположения точек в наборе $\Omega_M^*(s)$, то возможен вариант, при котором найдутся две точки y_1 и y_2 , такие, что

$$y_1, y_2 \in \Omega_M^*(s), \quad s \in [y_1, y_2]. \quad (7)$$

В этом случае точки y_1, y_2 лежат на параллельных отрезках из Γ (поскольку перпендикуляры к ним содержат отрезок $[y_1, y_2]$). Это означает, что для точки s справедливо второе условие теоремы.

Если же (7) не выполняется, то найдутся три точки $y_1, y_2, y_3 \in \Omega_M^*(s)$, такие, что никакие две из них не лежат на одном диаметре круга $O(s, \rho(s, \Gamma))$, при этом $s \in \text{co } \{y_1, y_2, y_3\}$.

Рассмотрим отрезки границы Γ , содержащие точки y_1, y_2, y_3 . По построению они лежат на касательных к окружности $\partial O(s, \rho(s, \Gamma))$ прямых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Обозначим их $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно. Поскольку никакие две из точек y_1, y_2, y_3 не лежат на одном диаметре окружности $\partial O(s, \rho(s, \Gamma))$, то любые две из прямых $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, пересекаются в одной точке. Пусть $a_1 = \gamma_2 \cap \gamma_3, a_2 = \gamma_1 \cap \gamma_3, a_3 = \gamma_1 \cap \gamma_2$. По построению точки a_1, a_2, a_3 образуют треугольник (так как, очевидно, не лежат на одной прямой).

Докажем теперь, что точка s лежит на пересечении биссектрис треугольника с вершинами в точках a_1, a_2, a_3 . Точка s равноудалена от прямых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, содержащих стороны треугольника, и $s - y_i = \rho(s, \Gamma), i = 1, 3$, поэтому окружность $\partial O(s, \rho(s, \Gamma))$ является для $\Delta a_1 a_2 a_3$ либо вписанной, либо одной из трех внеписанных [23]. Покажем, что s не может быть центром внеписанной окружности. В самом деле, если окружность $\partial O(s, \rho(s, \Gamma))$ внеписана в $\Delta a_1 a_2 a_3$, то точки y_1, y_2, y_3 касания прямых, содержащих его стороны, расположены на дуге $\Lambda \subset \partial O(s, \rho(s, \Gamma))$, угловой растров которой меньше π , т.е. точки y_1, y_2, y_3 расположены на окружности на дуге Λ , выпуклая оболочка которой не содержит s : значит, она не может попасть и в $\text{co } \{y_1, y_2, y_3\}$. Полученное противоречие доказывает, что s — центр вписанной в $\Delta a_1 a_2 a_3$ окружности; следовательно, выполняется условие 2 теоремы 1. \square

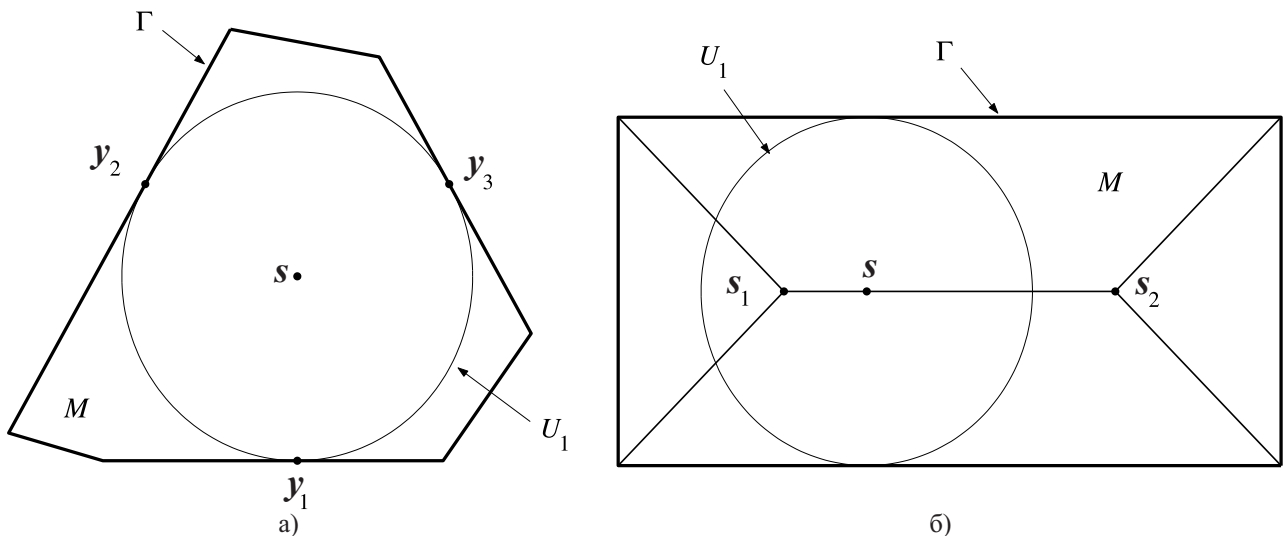


Рис. 2. Построение наилучших упаковок U_1 для многоугольника M_6 (а) и прямоугольника M_4 (б)

На рис. 2а показана наилучшая упаковка из одного круга Γ_1 для выпуклого многоугольника M_6 , точка s максимума евклидова расстояния от границы Γ и три ее проекции y_1, y_2, y_3 на Γ .

На рис. 2б представлена наилучшая упаковка Γ_1 для прямоугольника M_4 , не являющегося квадратом. Можно видеть, что решение здесь будет не единственным: любая точка $s \in [s_1, s_2]$ может являться центром вписанного круга максимального радиуса (равного половине меньшей стороны прямоугольника). Точки s_1, s_2 расположены так, что образуют равнобедренный прямоугольный треугольник с двумя ближайшими вершинами прямоугольника.

Теорема 1 доставляет эффективный алгоритм построения наилучшей 1-упаковки для выпуклого многоугольника. Если выпуклое множество многоугольником не является, то для приближенного решения задачи его можно аппроксимировать многоугольником. Если же множество M не выпукло либо метрика $\rho(x, y)$, задающая расстояние между точками, не является евклидовой, то для поиска точки (точек) s и радиуса R_M можно воспользоваться оптико-геометрическим методом, который последние годы развивается в работах авторов [1, 2, 10]. Поскольку данный подход достаточно подробно представлен в литературе [25], ограничимся кратким изложением его сути.

Идея метода состоит в использовании аналогии между задачами безусловной минимизации и геометрической оптикой, базирующейся на фундаментальных принципах Ферма и Гюйгенса. Согласно первому, свет в своем движении выбирает маршрут, который он преодолевает за минимальное время; в соответствии со вторым, каждая точка, которой свет достиг, сама становится вторичным его источником. Отсюда, в частности, следует, что в любой момент времени фронт световой волны (граница освещенной и неосвещенной областей) состоит из точек, равноудаленных от ближайшей точки первичного источника. Таким образом, если выпустить “световую волну” с границы Γ компакта M в его внутреннюю область, то (вследствие ограниченности M) в конечный момент времени “освещено” будет все множество M . При этом та точка (точки), которую волна достигнет последней, и будет центром вписанного круга наибольшего радиуса R_M , а его несложно определить, если известно время движения волны.

Данный подход удобен тем, что легко (в отличие от результатов теоремы 1) может быть перенесен на случай неевклидовой метрики.

Для этого необходимо рассмотреть движение световой волны в оптически-неоднородной среде, которая определяется некоторой непрерывной ограниченной функцией $0 < \alpha \leq f(\mathbf{x}) \leq \beta$, задающей скорость движения света в каждой точке $\mathbf{x} \in M$. Тогда расстояние между точками определяется формулой

$$\rho_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{G \in G(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \int_G \frac{dG}{f}, \tag{8}$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — множество непрерывных кривых, лежащих в M и соединяющих \mathbf{x}, \mathbf{y} . В частном случае, когда в (8) $f \equiv 1$, очевидно, получается евклидова метрика (кратчайший путь между точками — соединяющий их отрезок прямой).

Процедура пуска волны и ее программная реализация уже изложены авторами ранее [1, 2, 10], здесь их описание опускается. Несмотря на очевидные достоинства, оптико-геометрический метод имеет и определенные недостатки, связанные с тем, что он является достаточно ресурсоемким и малоприменимым для решения задачи 1 при больших n .

4. Численные методы построения упаковки. В общем случае, как уже отмечалось, построение оптимальной упаковки возможно только численными методами. В данном разделе приводится итерационный алгоритм, основанный на поэтапной корректировке n -сети за счет разбиения исходного множества на зоны Дирихле с использованием диаграммы Вороного.

Определение 2. Пусть задано компактное множество M в метрическом пространстве X и n -сеть S_n . Областью Дирихле [26, с. 305] точки $\mathbf{s}_i \in S_n$ во множестве M называется подмножество

$$D_i(M, S_n) = \{ \mathbf{m} \in M : \rho(\mathbf{m}, \mathbf{s}_i) = \rho(\mathbf{m}, S_n) \}.$$

Иначе говоря, область Дирихле — это геометрическое место точек, лежащих не дальше от \mathbf{s}_i , нежели от других точек из S_n . В случае если некоторые элементы n -сети находятся далеко от M , то некоторые из областей Дирихле могут быть пустыми множествами. Однако для выпуклого множества M и вложенной в него n -сети $S_n \subset M$ все области являются выпуклыми подмножествами M . Если компакт M — выпуклый многоугольник в евклидовом пространстве размерности два, то и все его подмножества $D_i(M, S_n)$ тоже являются выпуклыми многоугольниками в том же пространстве.

Разбиение компактного множества в пространстве \mathbb{R}^2 на подмножества $D_i(M, S_n)$ обычно осуществляется с помощью диаграммы Вороного n -сети S_n (см. [22, с. 48]). Для численного решения задачи 1 авторами предложен и реализован следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

1. Для точек n -сети S_n строится диаграмма Вороного

$$W(S_n) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : \exists \mathbf{s}_i \in S_n, \exists \mathbf{s}_j \in S_n, \|\mathbf{w} - \mathbf{s}_i\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{s}_j\| = h(\{\mathbf{w}\}, S_n) (i \neq j) \right\}.$$

По построению $W(S_n)$ — это геометрическое место точек, имеющих не менее двух ближайших элементов из S_n .

2. Строится массив Φ характеристических точек \mathbf{m}_i^* множества M , т.е. точек, для которых выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:

- \mathbf{m}_i^* является вершиной многоугольника M ;
- \mathbf{m}_i^* принадлежит границе Γ многоугольника M и диаграмме Вороного $W(S_n)$;

— m_i^* принадлежит многоугольнику M и диаграмме Вороного $W(S_n)$, при этом для нее в S_n имеется не менее трех ближайших элементов.

Пусть $\Phi = \{m_i^*\}_{i=1}^l$, где l — общее количество характеристических точек.

3. Для каждой точки S_n строится подмножество точек $\Phi_i = \{m_j^* \in \Phi : \|s_i - m_j^*\| = \rho(\Phi, s_i)\} \subseteq \Phi$, входящих в область Дирихле $D_i(M, S_n)$.
4. Строится выпуклая оболочка со Φ_i множества Φ_i для всех $i = \overline{1, n}$. Поскольку M — выпуклый многоугольник, она совпадает с областью Дирихле $D_i(M, S_n)$. Определяется ее граница $\Gamma_i = \partial D_i(M, S_n)$.
5. Путем перебора всех троек вершин из Φ_i и всех пар параллельных отрезков, содержащихся в Γ_i , строится наилучшая упаковка $O(\bar{s}_i, \bar{r}_i)$ одного круга в $D_i(M, S_n)$ для всех $i = \overline{1, n}$.
6. В качестве новой упаковки берется $\bar{U}_n = O(\bar{s}_1, \bar{r}) \cup O(\bar{s}_2, \bar{r}) \cup \dots \cup O(\bar{s}_n, \bar{r})$, где $\bar{r} = \min_{i=\overline{1, n}} \bar{r}_i$. Множество точек $\bar{S}_n = \{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n\}$ принимается в качестве следующей итерации n -сети.

Алгоритм 1 близок к методам построения наилучшего покрытия плоского множества, которые описаны в работе [26], а также к алгоритмам построения наилучшего покрытия, применяемых ранее авторами в работах [4–6]. Основным элементом в них также является построение для исходной n -сети S_n диаграммы Вороного. В общем случае последняя состоит из лучей, отрезков и точек их стыка. Если S_n состоит ровно из двух точек, то $W(S_n)$ есть прямая, равноудаленная от этих точек. Если S_n содержит ровно один элемент, то $W(S_n) = \emptyset$. При ее построении используется так называемая “триангуляция Делоне” [22, с. 133], т.е. строится массив из троек точек, принадлежащих множеству S_n , области Дирихле которых имеют общую точку. Их знание позволяет сразу выделить точки стыка отрезков и лучей диаграммы Вороного.

Если множество M является невыпуклым либо рассматривается неевклидова метрика, то для решения задачи 1 может быть использована следующая модификация алгоритма 1.

Алгоритм 2.

1. Для элементов n -сети S_n строятся зоны Дирихле $D_i(M, S_n)$ с использованием волнового метода [2]. Для этого из всех точек S_n одновременно выпускаются “световые волны” и для каждой точки множества M устанавливается, из какого “источника” она была впервые “освещена”. Точки, которые были одновременно “освещены” из двух или более источников, очевидно, лежат на границе зон.
2. Строится 1-упаковка $O(\bar{s}_i)$ для каждой из областей $D_i(M, S_n)$ (см. предыдущий раздел).
3. В качестве упаковки множества M берется $\bar{U}_n = O(\bar{s}_1, \bar{r}) \cup O(\bar{s}_2, \bar{r}) \cup \dots \cup O(\bar{s}_n, \bar{r})$, где $\bar{r} = \min_{i=\overline{1, n}} \bar{r}_i$. Множество $\bar{S}_n = \{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n\}$ принимается в качестве следующей итерации n -сети.

При реализации программного комплекса сначала с помощью стохастических методов строится первое приближение n -сети S_n^0 , обеспечивающее относительно равномерное распределение ее точек по всей площади фигуры M (нулевой шаг). Алгоритмы 1 и 2 применяются итерационно, критерием окончания работы может служить совершение заданного числа циклов либо выполнение ограничения на отклонения точек новой n -сети от предыдущей: $\delta = \max \{\rho(s_i, \bar{s}_i) : i = \overline{1, n}\} \leq \delta_*$, где δ_* — достаточно малая наперед заданная величина. В этом случае значение функции (1) для n -сетей S_n и \bar{S}_n может различаться не более чем на $2\delta_*$.

Отметим, что, поскольку при работе алгоритмов 1 и 2 часто возникают устойчивые, но неоптимальные решения, случайная генерация начальной n -сети обычно повторяется многократно (иначе говоря, используется мультистарт).

5. Примеры построения упаковки. Авторами настоящей статьи создан программный комплекс в пакете MATLAB [27], реализующий представленные выше алгоритмы и позволяющий вычислять аппроксимации наилучших упаковок для плоских множеств и проводить их визуализацию.

Рассмотрим ряд примеров решения с его помощью задачи 1. Косвенным показателем качества решения может служить плотность упаковки, т.е. отношение $\chi = \sigma(U_n)/\sigma(M)$, где U_n — площадь упаковки, а $\sigma(M)$ — площадь фигуры M . Очевидно, что $0 < \chi < 1$. Оценки для величины χ в случае выпуклого множества M приведены в [8, с. 111]. Для найденных упаковок наряду с радиусом кругов r будем вычислять и значение их плотности χ .

Пример 1. Требуется построить наилучшую упаковку U_n квадрата $M = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ при числе кругов n , равном 220 и 240.

Квадрат является выпуклым многоугольником. Для него выполняется теорема 1 и может применяться алгоритм 1. При конструировании наилучшей упаковки применялся разработанный авторами программный комплекс. Его запуск осуществлялся многократно с целью сравнения результатов при различных начальных условиях. Нулевая итерация точек n -сети S_n , являющихся центрам кругов упаковки, строилась с помощью стохастических методов каждый раз по-новому.

При $n = 220$ радиус кругов найденной упаковки равен $r = 0.06702$. Квадрат M (отрезки его границы показаны жирными линиями), упаковка кругов U_{220} (границы кругов показаны тонким линиями) и 220-сеть S_{220} (в виде маркеров-точек) представлены на рис. 3.

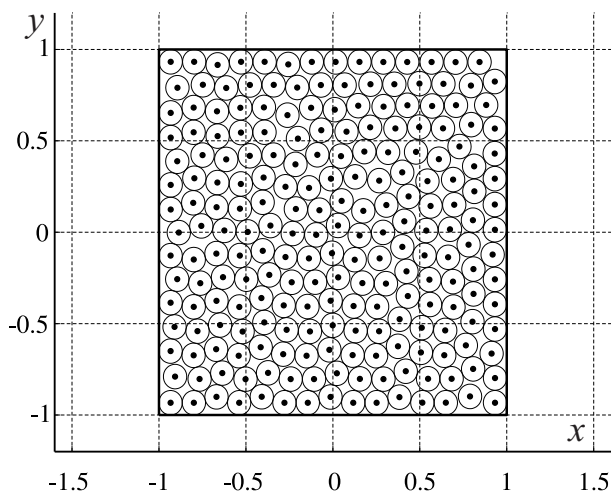


Рис. 3. Аппроксимация U_{220} наилучшей упаковки квадрата M 220 кругами

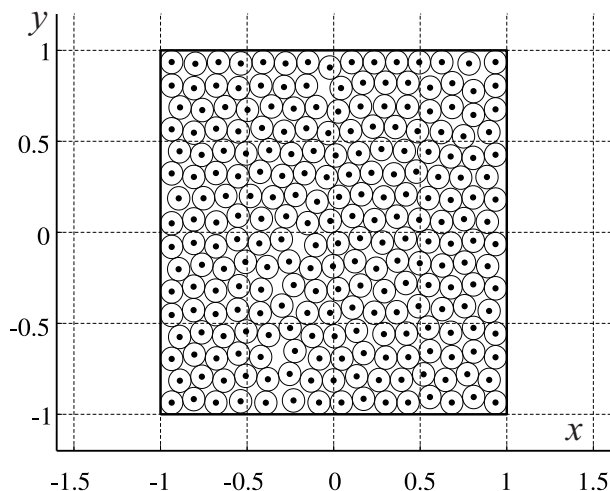


Рис. 4. Аппроксимация U_{240} наилучшей упаковки квадрата M 240 кругами

В данном примере аппроксимируемое множество является квадратом со стороной, равной 2, поэтому плотность упаковки можно вычислять по формуле $\chi = \frac{1}{4} n\pi r^2$. Для найденной упаковки S_{220} получаем значение $\chi \approx 0.776$.

При $n = 240$ радиус кругов найденной упаковки равен $r = 0.06448$. Квадрат M (отрезки его границы показаны жирными линиями), упаковка кругов U_{240} (границы кругов показаны тонким линиями) и 240-сеть S_{240} (в виде маркеров-точек) представлены на рис. 4. Отношение площади упаковки U_{240} к площади квадрата M равно $\chi \approx 0.784$

Пример 2. Требуется построить наилучшую упаковку U_n круга $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ при числе кругов n , равном 90 и 100.

Круг не является многоугольником, однако его граница может быть аппроксимирована ломаной с любой точностью. Кроме того, области Дирихле круга являются выпуклыми множествами, граница которых состоит из конечного числа отрезков и дуг окружности радиуса 1. Поэтому для построения его наилучшей упаковки может быть применен алгоритм 1 с небольшими корректировками.

При $n = 90$ радиус кругов равен $r = 0.09195$. Круг M (ограничивающая его окружность обозначена жирной линией), упаковка кругов U_{90} (границы кругов показаны тонким линиями) и 90-сеть S_{90} (в виде маркеров-точек) представлены на рис. 5. Отношение площади упаковки U_{90} к площади круга M может быть вычислено по формуле $\chi = \frac{n\pi r^2}{\pi} = nr^2$ и равно $\chi \approx 0.761$.

При $n = 100$ радиус кругов равен $r = 0.08750$. Круг M (ограничивающая его окружность обозначена жирной линией), упаковка кругов U_{100} (границы кругов показаны тонким линиями) и 100-сеть S_{100} (в виде маркеров-точек) представлены на рис. 6. Отношение площади упаковки U_{100} к площади круга M равно $\chi \approx 0.754$.

Заметим, что построенные упаковки U_n в некоторых из рассмотренных случаев не являются жесткими, т.е. элементы U_n можно двигать и при этом получать другие упаковки с тем же радиусом (рис. 2). Подобные особенности, разумеется, имеют место в более сложных (по сравнению с 1-упаковкой прямоугольника) случаях, для которых тоже строго доказано, что они являются наилучшими, например для упаковки 11 кругов в квадрат [15] или 20 кругов в круг [18].

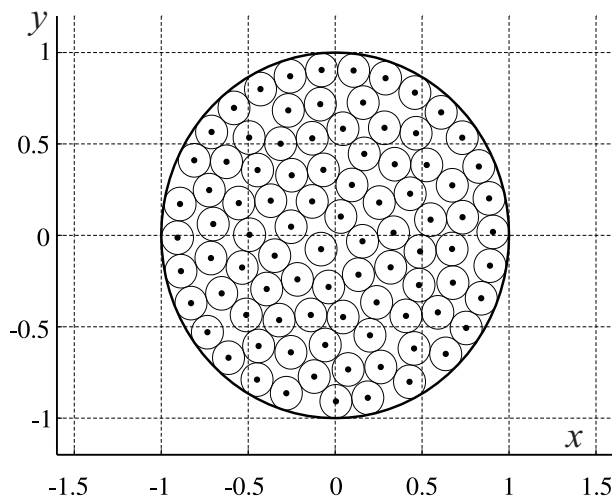


Рис. 5. Аппроксимация U_{90} наилучшей упаковки круга M 90 кругами

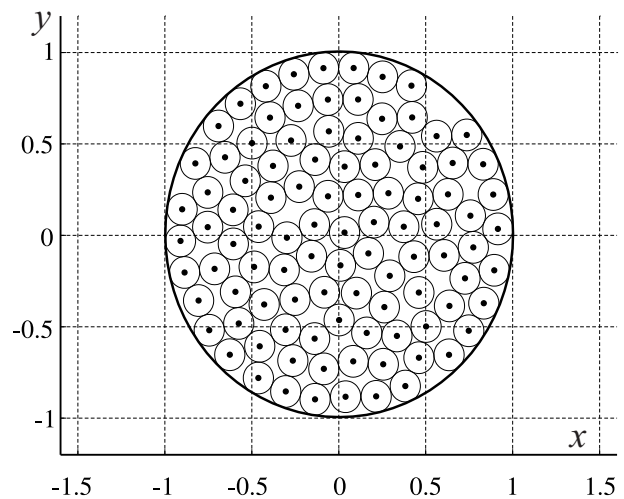


Рис. 6. Аппроксимация U_{100} наилучшей упаковки круга M 100 кругами

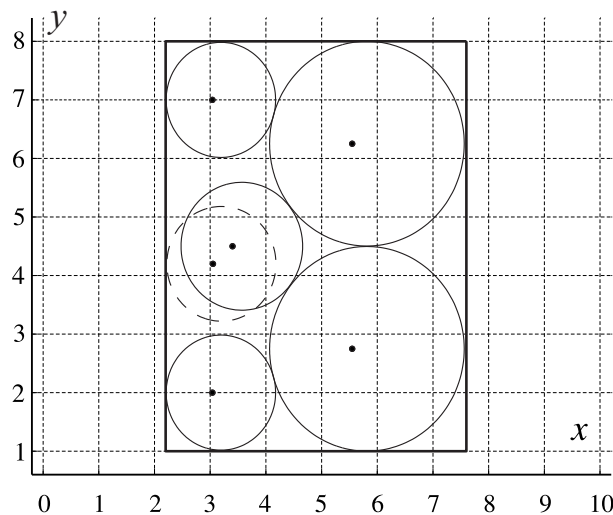


Рис. 7. Наилучшая упаковка U_5 для прямоугольника (в специальной метрике)

Найденные значения отношения χ площади упаковки U_n к площади заданной фигуры достаточно близки к тем, которые имеют место для наилучших из известных упаковок с меньшим количеством кругов.

Для упаковок квадрата при $n = \overline{25, 200}$ пределы изменения величины χ выражаются отрезком $\chi \in [0.772, 0.861]$ [12, с. 152].

Для упаковок круга при $n = \overline{20, 65}$ значение χ изменяется в пределах $\chi \in [0.743, 0.816]$ [16, с. 152].

Пример 3. Требуется построить наилучшую упаковку U_n прямоугольника $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 2.2 \leq x \leq 7.6, 1 \leq y \leq 8\}$ при числе “кругов” $n = 5$ в специальной метрике $\rho_f(8)$, когда $f = x/5$.

При $n = 5$ радиус “кругов” (в используемой метрике) найденной упаковки равен $r \approx 1.56$ условных метрических единиц. Прямоугольник M (отрезки его границы показаны жирными линиями), упаковка “кругов” U_5 (границы показаны тонким линиями) и 5-сеть (в виде маркеров-точек) представлены на рис. 7. Можно видеть, что в евклидовом пространстве построенные “круги” имеют разные размеры, зависящие от абсцисс их “центров”, и деформированы. Кроме того, упаковка не является жесткой: центральный “круг” может располагаться не единственным образом, одно из альтернативных его положений показано пунктирной линией.

6. Заключение. В настоящей статье предложены алгоритмы решения известной задачи об упаковке шаров (кругов) равного радиуса в компактное множество в пространстве размерности два в случаях евклидовой метрики и неевклидовой метрики специального вида.

Предложенные алгоритмы частично обоснованы и реализованы в виде программного комплекса. Тех-

нология разбиения множества на области Дирихле и отыскания наилучших упаковок в каждую из них точки максимума расстояния от ее границы оказалась работоспособной и позволяет реализовать построение упаковок из большого числа кругов для различных множеств на плоскости. Многократный запуск вычислительного комплекса при различных начальных условиях, сгенерированных стохастическими методами, обеспечивает радиус кругов покрытия достаточно близкий к максимально возможному.

Единственным существенным недостатком используемых алгоритмов является высокая вероятность впадения их в вырожденный режим (появления локально устойчивых решений, не являющихся оптимальными). Возможным методом устранения указанной проблемы является введение в алгоритмы коррекции на случай появления областей Дирихле, в которых радиус максимального вписанного в них круга существенно меньше диаметра данной области.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-01-00486_а, 14-07-00222_а, 14-01-31319-мол_а) и Программы фундаментальных исследований УрО РАН (проекты 15-16-1-13, 15-7-1-17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухаров Д.С., Казаков А.Л. Программная система “Виголт” для решения задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. **13**, № 2. 65–74.
2. Казаков А.Л., Лемперт А.А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. 50–57.
3. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2010. Вып. 3. 87–103.
4. Лебедев П.Д., Бухаров Д.С. Аппроксимация многоугольников наилучшими наборами кругов // Известия Иркутского гос. университета. Математика. 2013. № 3. 72–87.
5. Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Алгоритмы наилучшей аппроксимации плоских множеств объединениями кругов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. 88–99.
6. Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Труды ИММ УрО РАН. 2014. **20**, № 3. 291–308.
7. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990.
8. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Изд-во физико-математической литературы, 1958.
9. Левенштейн В.И. О границах для упаковок в n -мерном евклидовом пространстве // Доклады АН СССР. 1979. **245**, № 6. 1299–1303.
10. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. 87–100.
11. Лемперт А.А., Казаков А.Л., Бухаров Д.С. Математическая модель и программная система для решения задачи размещения логистических объектов // Управление большими системами. Вып. 41. М.: Инст. проблем управления РАН, 2013. 270–284.
12. Szabó P.G., Specht E. Packing up to 200 equal circles in a square // Models and Algorithms for Global Optimization. Optimization and Its Applications. Vol. 4. Heidelberg: Springer, 2007. 141–156.
13. Casado L.G., Garcia I., Szabó P.G., Csendes T. Packing equal circles in a square II. New results for up to 100 circles using the TAMSASS-PECS algorithm // Optimization Theory. Applied Optimization. Vol. 59. Heidelberg: Springer, 2001. 207–224.
14. Markót M.Cs., Csendes T. A new verified optimization technique for the “packing circles in a unit square” problems // SIAM Journal on Optimization. 2005. **16**, N 1. 193–219.
15. de Groot C., Peikert R., Würtz D. The optimal packing of ten equal circles in a square // IPS Research Report N 90-12. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule, 1990.
16. Graham R.L., Lubachevsky B.D., Nurmela K.J., Östergard P.R.J. Dense packings of congruent circles in a circle // Discrete Mathematics. 1998. **181**, N 1–3. 139–154.
17. Lubachevsky B.D., Graham R.L. Curved hexagonal packings of equal disks in a circle // Discrete Comput. Geom. 1997. **18**, N 2. 179–194.
18. Goldberg M. Packing of 14, 16, 17 and 20 circles in a circle // Math. Mag. 1971. **44**, N 3. 134–139.
19. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
20. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
21. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
22. Местецкий Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009.

23. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Физматлит, 1986.
24. Гаркави А.Л. О существовании наилучшей сети и наилучшего поперечника множества в банаховом пространстве // Успехи матем. наук. 1960. **15**, вып. 2. 210–211.
25. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. Об одном численном методе решения некоторых задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Вестник Иркутского гос. техн. университета. 2011. **53**, № 6. 6–12.
26. Брусев В.С., Пиявский С.А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. **11**, № 2. 304–312.
27. Чен К., Джублин П., Ирвинг А. MATLAB в математических исследованиях. М.: Мир, 2001.

Поступила в редакцию
27.03.2015

Algorithms of Optimal Packing Construction for Planar Compact Sets

A. L. Kazakov¹ and P. D. Lebedev²

¹ *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Lermontova 134, Irkutsk, 664033, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: kazakov@icc.ru*

² *Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences; ulitsa Sof'yi Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: pleb@yandex.ru*

Received March 27, 2015

Abstract: The best packing problem for a prescribed number of equal disks in a compact planar set with their minimally possible radius is considered. An analytical algorithm for constructing the one disk best packing in a polygon in Euclidean space based on the maximization of the distance function from the boundary is proposed. An iteration algorithm based on the previous one is developed using the splitting into subsets (Dirichlet zones) with the aid of the Voronoi diagram. A numerical algorithm for packing in a nonconvex set in non-Euclidian metrics based on the optical geometric analogy is also proposed. A number of examples are numerically solved with a large number of packing elements and for a special non-Euclidian metrics.

Keywords: disk packing, Dirichlet zone, Voronoi diagram, optical geometric method, numerical algorithm, program complex.

References

1. D. S. Bukharov and A. L. Kazakov, "VIGOLT System for Solving Transport Logistics Optimization Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 65–74 (2012).
2. A. L. Kazakov and A. A. Lempert, "An Approach to Optimization in Transport Logistics," *Avtom. Telemekh.* No. 7, 50–57 (2011) [*Autom. Remote Control* **72** (7), 1396–1404 (2011)].
3. V. N. Ushakov, A. R. Matviychuk, and P. D. Lebedev, "Defect of Stability in Game-Pursuit Problem," *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* No. 3, 87–103 (2010).
4. P. D. Lebedev and D. S. Bukharov, "Approximation of Polygons with the Best Set of Circles," *Izv. Irkutsk Univ. Ser. Mat.* No. 3, 72–87 (2013).
5. P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, and V. N. Ushakov, "Algorithms of the Best Approximations of the Flat Sets by the Union of Circles," *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* No. 4, 88–99 (2013).
6. V. N. Ushakov, A. S. Lakhtin, and P. D. Lebedev, "Optimization of the Hausdorff Distance between Sets in Euclidean Space," *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN* **20** (3), 291–308 (2014).
7. J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packing, Lattices and Groups* (Springer, New York, 1988; Mir, Moscow, 1990).
8. L. F. Töth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer, Berlin, 1957; Fizmatlit, Moscow, 1958).
9. V. I. Levenshtein, "Boundaries for Packings in n -Dimensional Euclidean Space," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **245** (6), 1299–1303 (1979).

10. A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and D. S. Bukharov, "On Segmenting Logistical Zones for Servicing Continuously Developed Consumers," *Avtom. Telemekh.* No. 6, 87–100 (2013) [*Autom. Remote Control* **74** (6), 968–977 (2013)].
11. A. A. Lempert, A. L. Kazakov, and D. S. Bukharov, "Mathematical Model and Program System for Solving a Problem of Logistic Objects Placement," in *Control of Large Systems* (Trapeznikov Inst. Control Sci., Moscow, 2013), Issue 41, pp. 270–284.
12. P. G. Szabó and E. Specht, "Packing up to 200 Equal Circles in a Square," in *Models and Algorithms for Global Optimization. Optimization and Its Applications* (Springer, Heidelberg, 2007), Vol. 4, pp. 141–156.
13. L. G. Casado, I. Garcia, P. G. Szabó, and T. Csendes, "Packing Equal Circles in a Square II. New Results for up to 100 Circles Using the TAMSASS-PECS Algorithm," in *Optimization Theory. Applied Optimization* (Springer, Heidelberg, 2001), Vol. 59, pp. 207–224.
14. M. C. Markót and T. Csendes, "A New Verified Optimization Technique for the 'Packing Circles in a Unit Square' Problems," *SIAM J. Optim.* **16** (1), 193–219 (2005).
15. C. de Groot, R. Peikert, and D. Würtz, *The Optimal Packing of Ten Equal Circles in a Square*, Research Report No. 90–12 (Eidgenössische Tech. Hochschule, Zürich, 1990).
16. R. L. Graham, B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela, and P. R. J. Östergard, "Dense Packings of Congruent Circles in a Circle," *Discrete Math.* **181** (1–3), 139–154 (1998).
17. B. D. Lubachevsky and R. L. Graham, "Curved Hexagonal Packings of Equal Disks in a Circle," *Discrete Comput. Geom.* **18** (2), 179–194 (1997).
18. M. Goldberg, "Packing of 14, 16, 17 and 20 Circles in a Circle," *Math. Mag.* **44** (3), 134–139 (1971).
19. K. Leichtweiss, *Konvexe Mengen* (Springer, Berlin, 1980; Nauka, Moscow, 1985).
20. V. F. Dem'yanov and L. V. Vasiliev, *Nondifferentiated Optimization* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].
21. B. T. Polyak, *Introduction to Optimization* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
22. L. M. Mestetsky, *Continuous Morphology of Binary Images: Shapes, Frames, Circulars* (Fizmatlit, Moscow, 2009) [in Russian].
23. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Modern Geometry* (Fizmatlit, Moscow, 1986) [in Russian].
24. A. L. Garkavi, "Existence of the Best Net and the Best Width for Set in a Banach Space," *Usp. Mat. Nauk* **15** (2), 210–211 (1960).
25. A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and D. S. Bukharov, "On a Numerical Method to Solve Some Optimization Problems Occurring in Transport Logistics," *Vestn. Irkutsk Tekh. Univ.* **53** (6), 6–12 (2011).
26. V. S. Brusov and S. A. Piyavskii, "A Computational Algorithm for Optimally Covering a Plane Region," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **11** (2), 304–312 (1971) [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **11** (2), 17–27 (1971)].
27. K. Chen, P. J. Giblin, and A. Irving, *Mathematical Explorations with MATLAB* (Cambridge Univ. Press, New York, 1999; Mir, Moscow, 2001).