

УДК 519.612

doi 10.26089/NumMet.v16r226

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МЕТОДА МАЛОРАНГОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ
В КАЧЕСТВЕ ПРЕДОБУСЛОВЛИВАТЕЛЯ**

К. В. Воронин¹, С. А. Соловьев²

Предложен алгоритм решения задачи Гельмгольца в трехмерных неоднородных средах с использованием метода аппроксимации матрицами малого ранга. Рассматриваемый метод применяется в качестве предобусловливателя для двух итерационных процессов. Первый — простой в реализации и экономичный метод итерационного уточнения, второй — метод BiCGStab крыловского типа. Скорость сходимости обоих методов исследуется относительно качества предобусловливателя, которое определяется точностью малоранговой аппроксимации. Показано, что для типичных задач сейсморазведки скорость сходимости двух рассматриваемых методов примерно одинакова начиная с некоторой точности малоранговой аппроксимации. Вычислительные эксперименты показали, что при точности, достаточной для решения практических задач, предложенный метод более чем в 2 раза экономнее по использованию памяти и в 3 раза производительнее, чем прямой метод PARDISO библиотеки Intel MKL.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, алгоритмы решения разреженных линейных систем, метод Гаусса, аппроксимация матрицами малого ранга, HSS-формат матриц, метод BCGStab, итерационное уточнение.

Введение. Современные методы обработки сейсмических данных, такие как миграция в обратном времени или RTM (от английского Reverse Time Migration) [33, 34], полное обращение волновых полей или FWI (от английского Full Waveform Inversion) [3, 15], основаны на решении большого количества “прямых” задач — расчет волновых полей для набора граничных условий и/или набора моделей среды. При этом сами процедуры построения сейсмических изображений и полного обращения волновых полей эффективно применять в частотной области [38]. Здесь прямая задача состоит в решении уравнения Гельмгольца с большим количеством правых частей (положений источников) и для некоторого набора временных частот.

Применение сеточных методов решения уравнений математической физики, таких как, например, метод конечных разностей [28, 38], метод конечных элементов [35] или разрывный метод Галеркина [10], приводит к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Все методы решения СЛАУ можно разделить на два класса — итерационные и прямые.

Итерационные методы позволяют найти приближенное решение системы с заданной точностью за ограниченное, но неизвестное априорно число итераций. Зачастую СЛАУ, получаемые в результате аппроксимации уравнения Гельмгольца, обладают плохой обусловленностью, слабой отделимостью спектра от нуля и знакоопределенностью матрицы системы, что приводит либо к большому числу итераций, либо к расходимости процесса [19]. Для уменьшения числа итераций применяют технику предобусловливания, или построения предобусловливающей матрицы. Кратко говоря, основная идея предобусловливания состоит в умножении исходной системы на такую матрицу, для которой легко выполнялось бы умножение на вектор, а после домножения число обусловленности системы являлось бы невысоким (желательно не зависящим ни от шагов расчетной сетки, ни от перепада значений физических коэффициентов задачи).

Среди подходов к построению предобусловливателей для решения уравнения Гельмгольца можно выделить следующие.

- 1) Комплексный сдвиг частоты (или shifted Laplacian) — самый распространенный подход, обеспечивающий отделимость спектра от нуля и, следовательно, гарантирующий сходимость, однако скорость сходимости итерационного процесса с таким предобусловливателем относительно низкая [18]. По этой причине данный подход обычно комбинируют с перечисленными ниже.

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (ИВМиМГ СО РАН), просп. Лаврентьева, 6, 630090, г. Новосибирск; инженер, e-mail: kvoronin@labchem.ssc.ru

² Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, просп. Коптюга, 3, 630090, г. Новосибирск; науч. сотр., e-mail: 511ssa@mail.ru

- 2) Методы декомпозиции области, в частности аддитивный метод Шварца, который хорошо распараллеливается на вычислительных системах с распределенной памятью (кластерах) и успешно применяется для решения задач больших размерностей [2, 4, 6, 13, 20, 26].
- 3) Многосеточные методы, или multigrid [32]. Для решения уравнения Гельмгольца указанный метод может быть эффективно использован только совместно с комплексным сдвигом частоты. Следует отметить, что многосеточный метод был предложен Р. П. Федоренко и Н. С. Бахваловым [1, 8].
- 4) Узкоспециализированные предобусловливатели, основанные на предварительном знании структуры решения или свойств модели. В качестве примера, характерного именно для решения геофизических задач, можно привести метод, представленный в [5], где в качестве предобусловливателя используется решение уравнения Гельмгольца в горизонтально-слоистой среде с помощью спектральных методов.
- 5) Алгебраические предобусловливатели, основанные на приближении оператора, обратного к сеточному оператору Гельмгольца, например неполное LU -разложение $ILLU_P$. Основная идея такого неполного разложения основана на проведении гауссова исключения и удалении некоторых элементов полученного разложения. Такое исключение элементов производится в процессе факторизации по заранее определенному шаблону P . Одним из способов выбора шаблона является $ILLU(0)$ -метод, в котором в качестве P используется портрет исходной матрицы A . Такой подход рекурсивно порождает класс $ILLU(p)$ -методов, в которых портрет P задается положением ненулевых элементов произведения факторов L_{p-1} и U_{p-1} , полученных в результате неполной факторизации метода $ILLU(p-1)$ [31].

Второй класс методов решения СЛАУ — прямые методы, позволяющие найти решение с максимальной возможной точностью (с учетом машинного округления). Наиболее распространенные из них в общем случае основаны на построении LU -разложения матрицы. Применительно к рассматриваемой задаче Гельмгольца с граничными условиями PML (Perfectly Matched Layer) выполняется LDL^T -разложение симметричной матрицы с последующим решением нижнетреугольной, диагональной и верхнетреугольной систем. Одним из преимуществ такого подхода является возможность однократного построения LDL^T -разложения с последующим использованием его для решения системы с несколькими правыми частями. Учитывая, что характерное число положений источников (правых частей) при сейсмических исследованиях доходит до нескольких десятков тысяч, прямые методы с этой точки зрения могут быть предпочтительнее итерационных.

Основной проблемой прямых методов являются большие затраты как по построению, так и по хранению LDL^T -разложения. Это связано с большой, по сравнению с исходной матрицей A , заполняемостью ненулевыми элементами множителя L . Одним из эффективных направлений по решению этой проблемы является предварительная перестановка строк и столбцов матрицы A с последующим LDL^T разложением, что при наличии сеточной задачи эквивалентно перенумерации узлов расчетной сетки. В настоящее время популярным алгоритмом построения перенумерации является метод вложенных сечений (Nested Dissection, ND) [21]. В литературе указанное разложение называется *многоуровневым прямым методом* (Multifrontal Direct Solver) [39]. Такой подход показал себя эффективным при решении двумерных задач, однако его применимость для решения реальных трехмерных задач сильно ограничена жесткими требованиями к объему используемой памяти.

В последнее время одним из активно развивающихся направлений дополнительного повышения производительности многоуровневых методов является использование техники аппроксимации матрицами малого ранга, а также использование иерархического формата хранения данных HSS (Hierarchically Semiseparable Structure). Техника аппроксимации матрицами малого ранга и HSS-формат матрицы основаны на использовании свойств малого ранга, которыми обладают внедиагональные блоки LU -факторов [23]. Следует отметить, что пионерами в области построения блочно-малоранговых аппроксимаций являются российские ученые, в частности Е. Е. Тыртышников [22, 36]. Применение малоранговой аппроксимации позволяет существенно сократить затраты на вычислительные ресурсы (процессорное время и требуемый объем памяти). Описание решения разреженных СЛАУ прямым методом Гаусса с использованием такой техники дано, например, в работе [7]. В указанной работе подробно рассмотрен случай вещественных симметричных положительно определенных матриц, а в качестве примеров рассматриваются матрицы, возникающие после аппроксимации уравнения Пуассона на квадратной сетке. На основе использования блочно-малорангового представления матриц существуют различные программные пакеты, решающие похожие задачи, такие как HLIBPro [25], STRUMPACK [30] и т.д. Однако сравнительный анализ предлагаемого далее подхода с указанными пакетами является открытым вопросом.

В настоящей статье рассматривается применение метода аппроксимации матрицами малого ранга к решению уравнения Гельмгольца. В этом случае матрица системы — знаконеопределенная с плохой отделенностью спектра от нуля. При этом рассматриваемый метод предлагается использовать в качестве предобусловливателя для двух итерационных процессов. Первый — простой в реализации и экономичный метод итерационного уточнения [9], второй — метод крыловского типа — BiCGStab (BiConjugate Gradient Stabilized). Скорость сходимости обоих методов исследовалась относительно качества предобусловливателя, которое определяется точностью малоранговой аппроксимации. Показано, что для типичных задач сейсморазведки скорость сходимости двух рассматриваемых методов (предобусловленных с помощью построенного приближенного $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$ -разложения) примерно одинакова начиная с некоторой точности малоранговой аппроксимации. Сравнительный анализ представленной техники с прямым методом PARDISO библиотеки Intel MKL показал, что при точности, достаточной для решения практических задач, предложенный метод более чем в 2 раза экономнее по использованию памяти и в 3 раза производительнее, чем метод PARDISO.

1. Постановка задачи. Рассматривается трехмерное скалярное уравнение Гельмгольца, определенное в \mathbb{R}^3 :

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{V^2(\mathbf{x})} u = f(\mathbf{x}, \omega). \quad (1)$$

Здесь ω — частота; $V(\mathbf{x})$ — скорость волны в среде, в общем случае зависящая от координат; $f(\mathbf{x}, \omega)$ — функция источника с компактным пространственным носителем; Δ — оператор Лапласа.

В дальнейшем будем строить решения, удовлетворяющие принципу предельного поглощения

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\mathbf{x}, \omega + i\varepsilon), \quad u(\mathbf{x}, \omega + i\varepsilon) \rightarrow 0 \Big|_{\|\mathbf{x}\|^2 \rightarrow \infty},$$

что гарантирует существование и единственность решения для широкого класса неограниченных областей.

Для дискретизации рассматриваемой задачи необходимо ее переформулировать в ограниченной области Ω с подходящими граничными условиями, обеспечивающими близость решения исходной задачи и задачи в ограниченной области. В качестве таких граничных условий предлагается использовать метод идеально согласованных слоев, или PML (от английского Perfectly Matched Layer) [11, 14, 17, 27]. Идея данного подхода состоит в комплексной замене переменных, которая обеспечивает затухание решения:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \leftarrow \frac{i\omega}{i\omega + d_j(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma_j(\mathbf{x}, \omega)} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Замена осуществляется в некоторой подобласти, окаймляющей целевую область, т.е. $\sigma_j(\mathbf{x}, \omega) = 1$ при $\mathbf{x} \in \Omega$, где Ω — целевая область. Здесь и в дальнейшем предполагается, что целевая область — параллелепипед. Наряду с этим рассматривается расчетная область $\Omega_1 \supseteq \Omega$, в которой $\sigma_j(\mathbf{x}, \omega) \neq 1$. В результате задачу можно записать в следующем виде:

$$\frac{\omega^2}{V^2(\mathbf{x})} u + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\sigma_j(\mathbf{x}, \omega)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\sigma_j(\mathbf{x}, \omega)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] = f(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1;$$

$$\sigma_j(\mathbf{x}, \omega) \neq 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1/\Omega; \quad \sigma_j(\mathbf{x}, \omega) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Выбор демпфирующих функций d_j определяется из условия минимизации коэффициентов отражения и приведен в работе [17].

Для аппроксимации полученного уравнения могут быть использованы как конечно-разностные методы на структурированных сетках, так и конечно-элементные методы на неструктурированных сетках. Независимо от выбранного способа аппроксимации задачи возникает необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = b \quad (2)$$

с невырожденной разреженной матрицей A .

Следует отметить, что аппроксимация исходного уравнения Гельмгольца (1) с использованием граничного условия PML дает систему (2) с комплексными коэффициентами $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Несмотря на симметрию полученной матрицы, размер памяти увеличивается вдвое по сравнению с вещественной арифметикой, а также вырастает цена одной арифметической операции.

Для решения указанной СЛАУ предлагается использовать итерационные методы с предобуславливанием, основанном на приближенном LDL^T -разложении с использованием аппроксимаций матрицами малого ранга. Алгоритм построения такого разложения и его применение для решения приведенной системы уравнений представлен ниже.

2. Описание алгоритма. В нашей работе для решения уравнения Гельмгольца применяется метод LDL^T -разложения совместно с методом вложенных сечений и техникой аппроксимации матрицами малого ранга и HSS-формата. Используемый подход позволяет построить аппроксимацию искомого LDL^T -разложения произведением $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$, при этом качество аппроксимации зависит от выбора внутренней точности малоранговой аппроксимации. Следует отметить, что в отличие от задачи Пуассона после аппроксимации уравнения Гельмгольца необходимо решать знаконеопределенную СЛАУ, матрица которой зачастую плохо обусловлена. Это создает дополнительные ограничения на выбор внутренней точности малоранговой аппроксимации плотных блоков, а также на степень HSS-сжатия диагональных блоков.

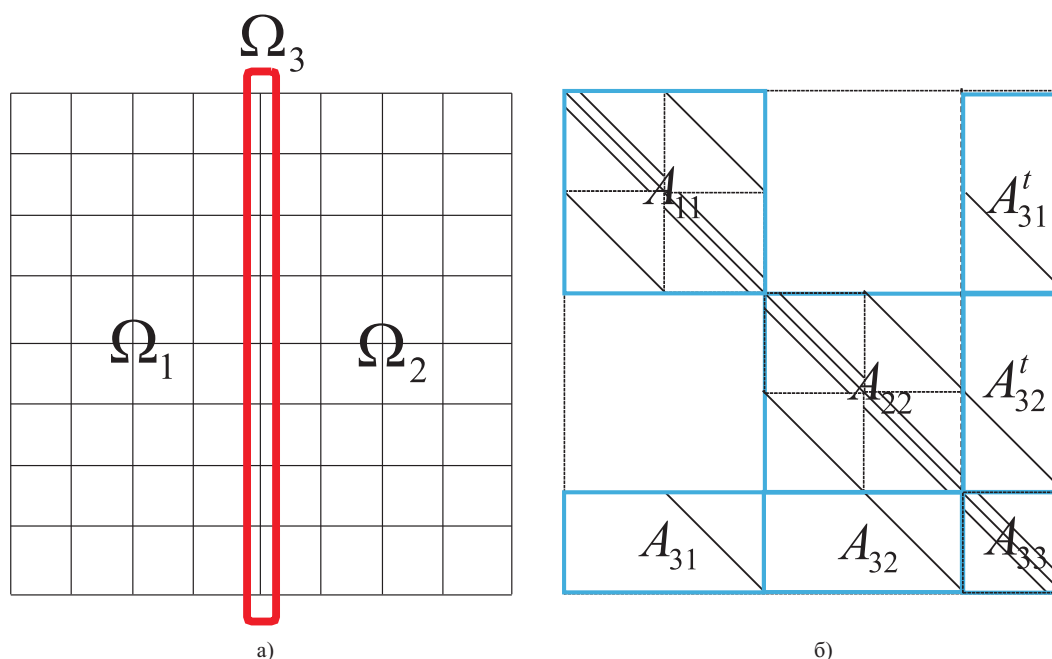


Рис. 1. Алгоритм вложенных сечений с разделением расчетной сетки на две подобласти:
 а) пример сеточного разделителя; б) портрет матрицы после перенумерации

2.1. Метод вложенных сечений. Как упоминалось выше, для уменьшения заполненности матрицы L выполняется предварительная перестановка строк и столбцов матрицы A (перенумерация узлов расчетной сетки) с помощью метода вложенных сечений. В методе вложенных сечений для перенумерации используется техника “разделителей”, или “сепараторов” (separator). Разделителем называют набор сеточных узлов, которые делят расчетную сетку на два независимых, с точки зрения факторизации, множества узлов. Например, в двумерном случае при использовании пятиточечного шаблона аппроксимации вертикальная линия сетки является разделителем (рис. 1а). Если занумеровать сначала все узлы в левой подобласти (Ω_1), затем в правой (Ω_2) и, наконец, узлы в разделителе (Ω_3), то факторизация блочных столбцов $(A_{11}, A_{31})^T$ и $(A_{22}, A_{32})^T$, соответствующих узлам первой и второй подобластей, может быть выполнена независимо друг от друга (рис. 1б).

Продолжая рекурсивное разбиение полученных подобластей новыми разделителями (рис. 2а), получаем новую нумерацию узлов сетки. В результате, факторизация полученной после перенумерации матрицы дает L -фактор со структурой, показанной на рис. 2б. На приведенной структуре блоки с большим числом нулевых элементов выделены светло-серым цветом, в то время как плотные блоки выделены черным цветом.

Основным преимуществом такой структуры является на порядок меньшее число ненулевых элементов, по сравнению с заполняемостью L -фактора при условии стандартной построчной (либо постолбцовой) нумерации узлов. Следует отметить, что в трехмерных задачах на параллелепипедальных сетках в качестве разделителей задаются плоскости, перпендикулярные осям координат и содержащие сеточные узлы.

2.2. Малоранговая аппроксимация/HSS формат. Дадим определение ϵ -ранга и малоранговой

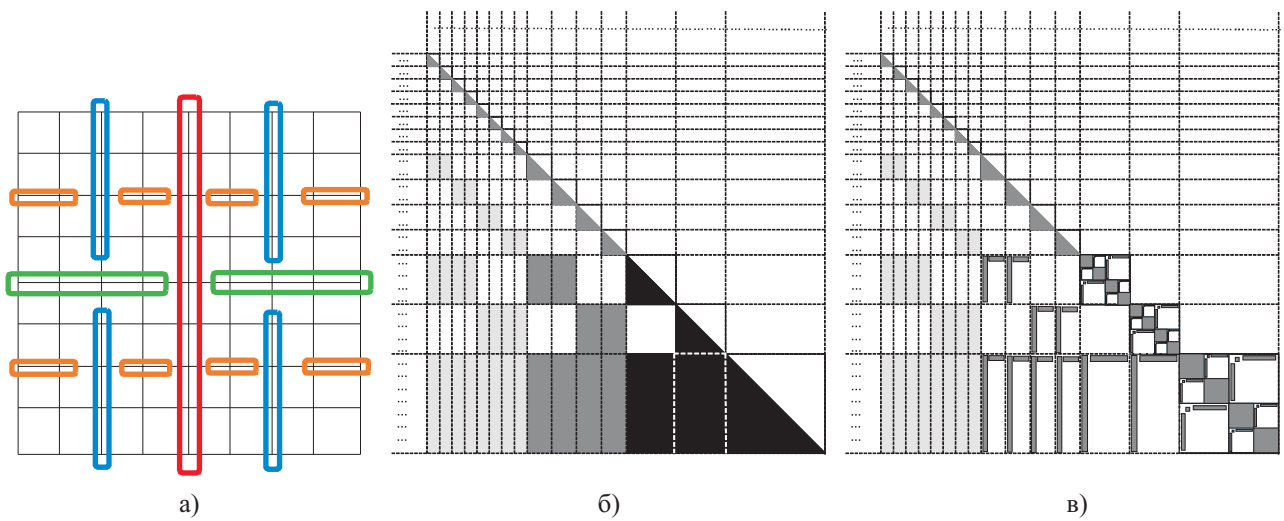


Рис. 2. Алгоритм вложенных сечений с рекурсивным разделением расчетной сетки:
 а) пример сеточных разделителей; б) портрет L -фактора после перенумерации;
 в) малоранговая/HSS аппроксимация \tilde{L} матрицы L

аппроксимации. Пусть $A \in \mathbb{C}^{I \times J}$ — плотная матрица с I строками и J столбцами, где $J \leq I$. Матрица A обладает ε -рангом k , если k является минимальным целым числом, таким, что найдется матрица $A_k \in \mathbb{C}^{I \times J}$ ранга k , удовлетворяющая условию

$$\frac{\|A - A_k\|}{\|A\|} < \varepsilon.$$

Если в качестве нормы $\|\cdot\|$ используется спектральная матричная норма $\|\cdot\|_2$, то ε -ранг матрицы A определяется явно как количество сингулярных чисел матрицы A , нормированных на максимальное, больших чем ε . Более того, матрица A_k задается в явном виде через SVD-разложение матрицы A :

$$A_k = U_k D_k V_k^*, \quad U_k \in \mathbb{C}^{I \times k}, \quad D_k \in \mathbb{R}_+^{k \times k}, \quad V_k \in \mathbb{C}^{J \times k}.$$

Так как практическое использование SVD-разложения для получения малоранговой аппроксимации является достаточно затратным, то существуют более эффективные алгоритмы получения такой аппроксимации. Эти методы основаны на построении матрицы A_k в виде произведения двух матриц $B_k \in \mathbb{C}^{I \times k}$ и $C_k \in \mathbb{C}^{J \times k}$ с малым k , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{\|A - B_k C_k^T\|}{\|A\|} < \varepsilon.$$

Для построения малоранговой аппроксимации внедиагональных блоков матрицы L используется модификация алгоритма крестовой аппроксимации (КА), описанного в работе [29]. Указанная модификация основана на идее, схожей с методом неполной LU-факторизации с локальным выбором ведущего элемента. Следует отметить, что вместо нормы $\|A\|_2$ используется аддитивная норма $\|A\| = \max_{i \leq I, j \leq J} |A_{ij}|$, вычисление которой может быть реализовано более эффективно.

Для аппроксимации диагональных блоков матрицы L используется HSS-представление. Идея такого представления заключается в разбиении диагонального блока на четыре части (два диагональных и два внедиагональных блока) с последующей малоранговой аппроксимацией внедиагональных. Далее опять рассматриваются диагональные части с последующим рекурсивным разбиением на четыре блока и малоранговой аппроксимацией внедиагональных вложенных блоков (рис. 3).

Следует отметить, что между внедиагональными блоками существует зависимость, позволяющая дополнительно сэкономить память и количество арифметических

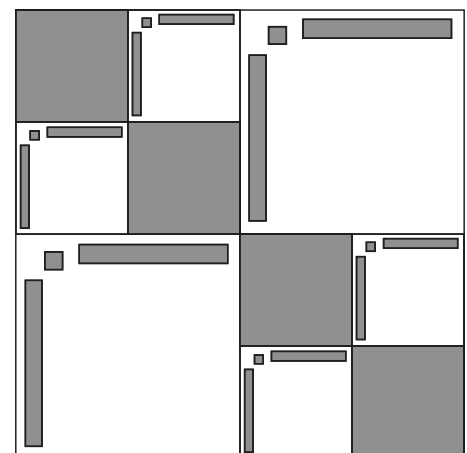


Рис. 3. Пример шаблона HSS-представления плотных блоков

операций. Это свойство лежит в основе HSS-формата, подробное описание которого, а также HSS-арифметики, приведено в работах [16, 24].

После аппроксимации матрицы L с помощью матриц малого ранга с применением HSS-формата получаем матрицу \tilde{L} со структурой, показанной на рис. 2в.

Необходимо отметить, что для повышения производительности алгоритма дополнительно применяются различные приемы. Во-первых, производится оценка эффективности аппроксимации блоков с точки зрения памяти, необходимой для их хранения. Поэтому достаточно малые блоки хранятся в традиционной плотной структуре. Во-вторых, малоранговая аппроксимация производится в процессе построения матрицы \tilde{L} . Как следствие, уменьшается время факторизации и затраты по использованию памяти.

2.3. Малоранговое предобусловливание в итерационных методах. Без ограничения общности в качестве используемых итерационных методов ограничимся двумя:

- наиболее простым: итерационное уточнение;
- одним из наиболее совершенных методов крыловского типа: модификация BiCGStab-P (см. ниже; помечен меткой (3)) предобусловленного стабилизированного метода бисопряженных градиентов BiCGStab.

Использование построенного на основе малоранговой аппроксимации $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$ -разложения в качестве предобусловливателя в двух совершенно разных методах дает основание полагать, что будут наблюдаться различия в поведении этих методов. Алгоритм и использование итерационного уточнения описывается в работе [7], в то время как метод BiCGStab опишем непосредственно.

Модификация BiCGStab-P была предложена вместе с методом BiCGStab в работе [37]. Методы BiCGStab и BiCGStab-P разработаны на основе идеи IDR-методов (Induced Dimension Reduction) как более устойчивые и эффективные по сравнению с методами квадратичных сопряженных градиентов (CG-S; Conjugate Gradients-Squared) и бисопряженных градиентов (BiCG). В настоящее время методы BiCGStab и BiCGStab-P активно используются при решении несимметричных СЛАУ.

В общем случае при использовании предобусловливателя $K \approx A$ метод BiCGStab-P может быть записан в следующей форме:

1. $r_0 = b - Ax_0$
2. Выбираем произвольный вектор $r_0^* \mid (r_0^*, r_0) \neq 0$, например $r_0^* = r_0$
3. $\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$
4. $v_0 = p_0 = 0, i = 1$
5. Пока не достигнута заданная точность:
6. $\rho_i = (r_0^*, r_{i-1})$
7. $\beta = \left(\frac{\rho_i}{\rho_i - 1} \right) \left(\frac{\alpha}{\omega_{i-1}} \right)$
8. $p_i = r_{i-1} + \beta(p_{i-1} - \omega_{i-1}v_{i-1})$
9. $y = K^{-1}p_i$
10. $v_i = Ay$
11. $\alpha = \frac{\rho_i}{(r_0^*, v_i)}$
12. $s = r_{i-1} - \alpha v_i$
13. $z = K^{-1}s$
14. $t = Az$
15. $\omega_i = \frac{(t, s)}{(t, t)}$
16. $x_i = x_{i-1} + \alpha y + \omega_i z$
17. $r_i = s - \omega_i t$
18. $i = i + 1$

Здесь x_0 — произвольный начальный вектор. Эта модификация является правым предобусловливанием в BiCGStab и отличается от общего вида формулой для вычисления параметра ω_i , которая в первоначальном алгоритме имела вид $\omega_i = \frac{(K_1^{-1}t, K_1^{-1}s)}{(K_1^{-1}t, K_1^{-1}t)}$, где $K = K_1K_2$, а K_1 и K_2 соответствуют предобусловливаю слева и справа. Однако при использовании левого предобусловливания ($K_2 = E$) в предобусловленном BiCGStab на каждой итерации потребуются дополнительное обращение предобусловливателя.

Необходимо заметить, что на каждой итерации в основном цикле BiCGStab-P необходимо дважды обращать предобусловливатель. Данный факт, очевидно, следует учитывать при сравнении с итерационным уточнением, так как каждая итерация BiCGStab-P требует приблизительно в два раза больше арифметических операций.

Кроме того, следует отметить, что в численных экспериментах применялась реализация BiCGStab-P из пакета PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) [12].

3. Численные эксперименты. Основной целью проведенных численных экспериментов являлось исследование эффективности предложенного алгоритма для решения уравнения Гельмгольца (1) на реальной высококонтрастной скоростной модели. При этом была проанализирована эффективность алгоритма при решении задачи как с одной, так и со многими правыми частями. Кроме того, проведено сравнение эффективности использования итерационного уточнения с BiCGStab, где в качестве предобусловливателя используется малоранговая аппроксимация LDL^T -разложения.

Во всех тестах рассматривается скалярное уравнение Гельмгольца с фиксированной частотой, равной $\nu = 4$ Гц. В реальной скоростной модели значения скорости V меняются от 2300 до 6000 м/с. Расчетная область $9000 \times 9000 \times 4500$ м дискретизируется параллелепипедальной сеткой с шагом 60 м. После окаймления области слоем PML шириной 15 узлов получаем расчетную сетку размера $178 \times 178 \times 103$. Для аппроксимации уравнения на параллелепипедальной сетке используется 27-точечный шаблон 2-го порядка точности.

Расчеты производились на сервере с общей памятью: Intel Xeon E5-2690 v2 (Ivy Bridge EP), 3.00 GHz, RAM 512 GB. Текущая реализация алгоритма является не распараллеленной, в результате для расчетов использовался один поток (thread) указанной системы.

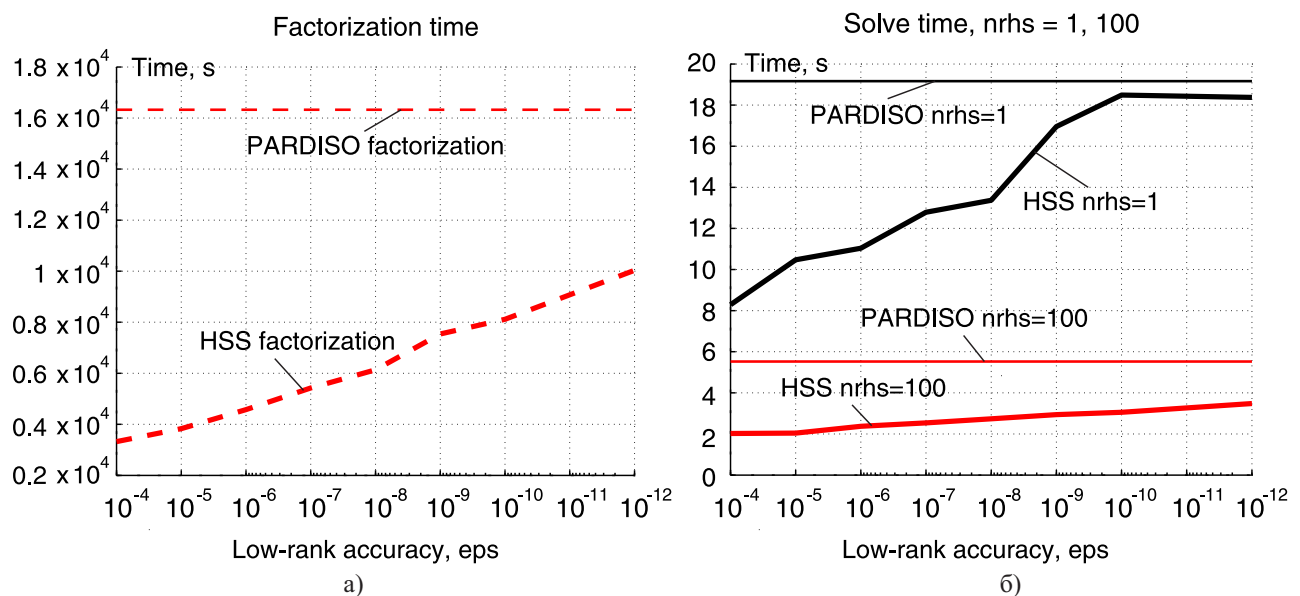


Рис. 4. Временные затраты на факторизацию (а) и обращение $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$ -разложения (б)

3.1. Времена факторизации и обращения $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$ -разложения. Коэффициент сжатия памяти. В качестве базовых результатов предлагается рассмотреть временные затраты, а также затраты по использованию памяти предложенного алгоритма в зависимости от точности малоранговой аппроксимации. Кроме того, предлагается сопоставить указанные характеристики с результатами, показанными прямым методом PARDISO из библиотеки Intel MKL.

На рис. 4а показана зависимость времени факторизации от точности малоранговой аппроксимации ϵ . Время, необходимое на обращение полученного $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$ -разложения, показано на рис. 4б. Результаты приведены как для одной, так и для 100 правых частей (в пересчете на одну). Большая эффективность обращения многих правых частей как для PARDISO, так и для HSS-решателя обусловлена использованием блочных функций из пакета MKL BLAS.

3.2. Норма невязки и точность решения. На рис. 5а приведена зависимость относительной ошибки решения $\|u - u_{\text{exact}}\| / \|u_{\text{exact}}\|$ в C - и L_1 -нормах. В качестве точного u_{exact} использовалось решение, полученное с помощью PARDISO. Кроме того, показана невязка решения $\|b - \tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T x\| / \|b\|$ (рис. 5б).

Из графиков видно, что при большой точности малоранговой аппроксимации ($\epsilon \sim 10^{-12}$) качество получаемого решения практически то же, что и у решения, полученного с помощью PARDISO. При этом также соизмеримы временные характеристики (время факторизации, время решения) и объем требуемой памяти для разработанного алгоритма и для PARDISO. Этот результат является ожидаемым, так как при большой точности отсутствует компрессия блоков, и предлагаемый алгоритм является "точным" по

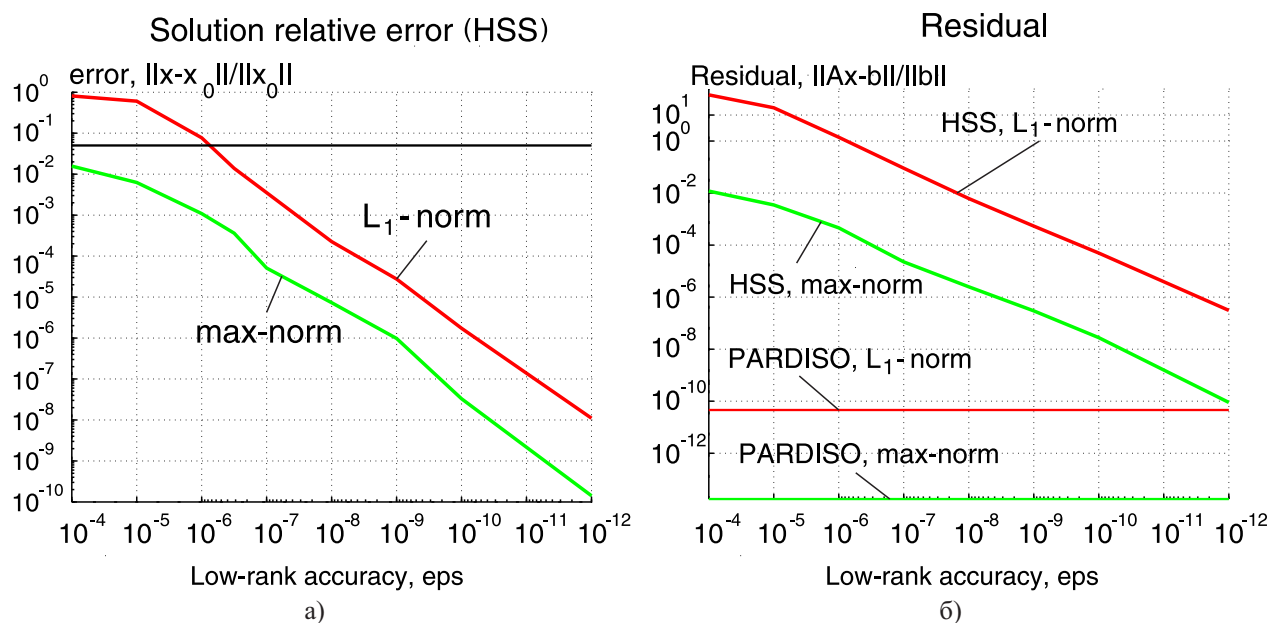


Рис. 5. Зависимость ошибки (а) и невязки решения (б) в норме C и L_1 от точности малоранговой аппроксимации

аналогии с PARDISO.

Однако главным преимуществом предлагаемого алгоритма является получение решения с меньшей точностью, достаточной для решения многих практических задач.

3.3. Время решения для системы со многими правыми частями. В практических задачах, например в задаче акустики в геофизике, точность решения в пределах 5% является достаточной. Исходя из графиков ошибки можно сделать вывод, что использование внутренней точности $\varepsilon < 10^{-6.5}$ дает относительную ошибку в C - и L_1 -нормах значительно меньше 5% (пороговое значение 5% обозначено на графике горизонтальной линией). При указанной точности время на факторизацию для HSS-алгоритма более чем в 3 раза меньше, чем для PARDISO, а время на обращение $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$ -разложения — в 2.5 раза меньше. Кроме того, следует отметить, что время на обращение приблизительно в 1000 раз меньше времени факторизации. Таким образом, при малом количестве правых частей наиболее трудозатратным этапом является факторизация, и наоборот, при числе правых частей 1000 и более наиболее трудоемкий вычислительный процесс — это обращение факторов. Общее время на решение системы для различного количества правых частей показано на рис. 6.

3.4. Скорость сходимости итерационного уточнения и BiCGStab. В этом разделе проводится сравнение метода итерационного уточнения и BiCGStab для решения уравнения Гельмгольца при использовании предобусловливания, основанного на малоранговой аппроксимации.

Прежде всего исследовалась зависимость скорости сходимости v_n от точности малоранговой аппроксимации ε (рис. 8). При этом рассматривались две типичные постановки задачи: уравнение Гельмгольца в однородной среде (рис. 8а) и задача с реалистичной резкоконтрастной скоростной моделью среды (рис. 8б). Заметим, что алгоритм BiCGStab требует выполнения двух операций обращения предобусловливателя на каждом итерационном шаге, а итерационное уточнение — одно. Таким образом, для корректного сравнения двух разных алгоритмов скорость сходимости BiCGStab определяется как $v_n = \|r_{n+1}\|/\|r_n\|$, а для итерационного уточнения как $v_n = \|r_{n+2}\|/\|r_n\|$, где r_n и r_{n+1} — значения невязки на n и $n + 1$ итерационных шагах.

Для большой точности малоранговой аппроксимации (в приведенных примерах $\varepsilon < 10^{-6}$) скорость сходимости рассматриваемых итерационных методов примерно одинаковая. Однако следует отметить, что в методе BiCGStab используется на пять временных массивов больше, чем в методе итерационного уточнения. Кроме того, немаловажным фактом является простота реализации последнего по сравнению с BiCGStab.

При среднем диапазоне точности — в приведенном примере $\varepsilon \in [10^{-4.5}, \dots, 10^{-6}]$ — метод итерационного уточнения не сходится для обоих приведенных примеров, в то время как BiCGStab сходимость не теряет, но при этом число итераций существенно возрастает. Следует заметить, что данный диапазон

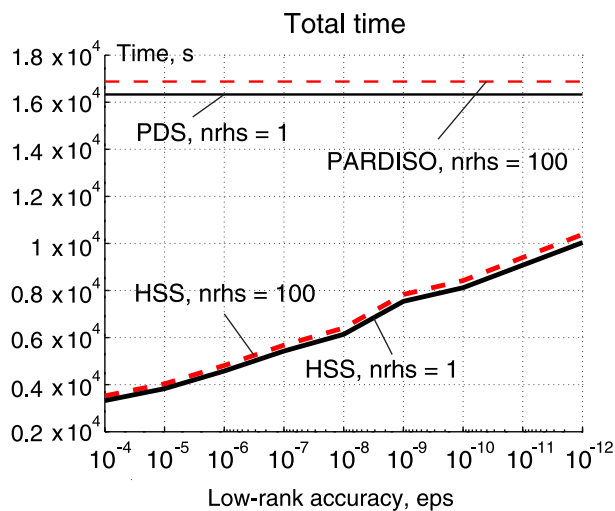


Рис. 6. Общее время решения СЛАУ с одной и ста правыми частями

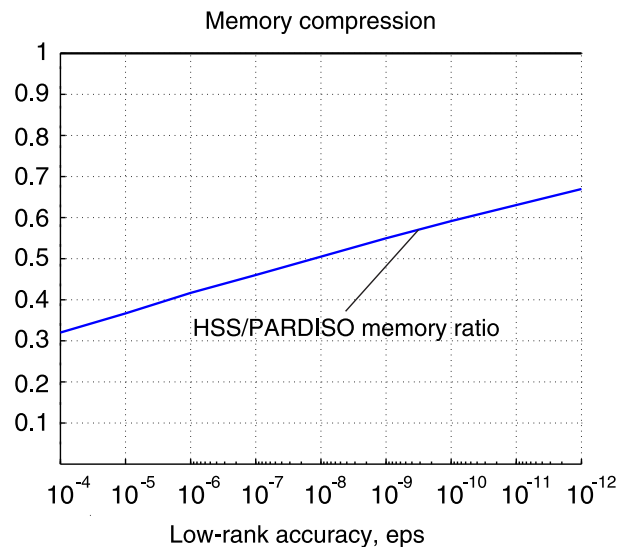
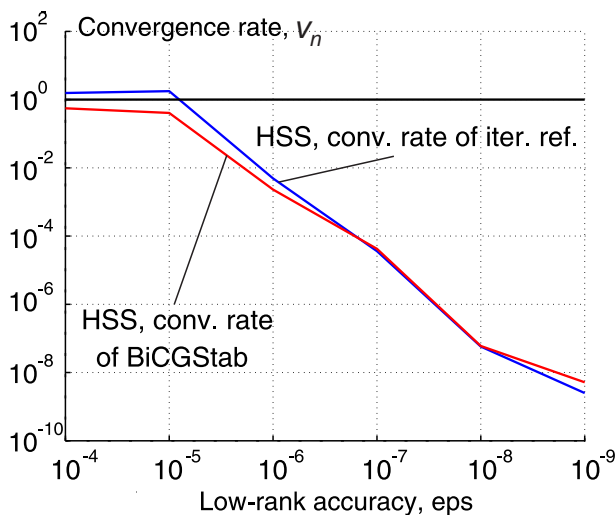
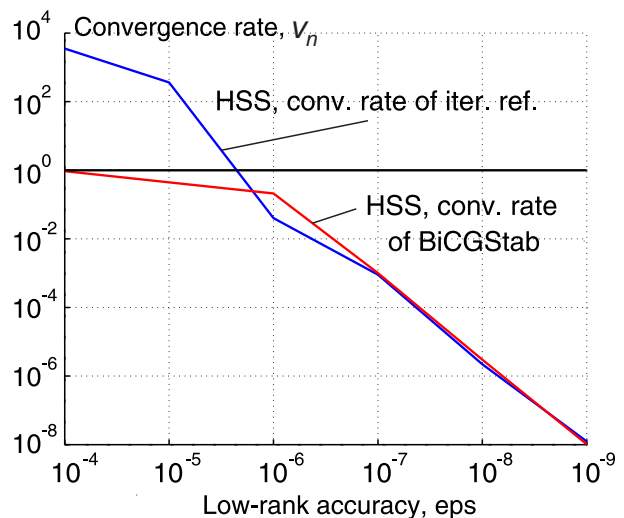


Рис. 7. Коэффициент экономии памяти HSS по сравнению с Intel MKL PARDISO



а)



б)

Рис. 8. Зависимость скорости сходимости от точности малоранговой аппроксимации: а) однородная среда, б) реальная скоростная модель

точностей малоранговой аппроксимации достаточно узок, а экономия по памяти и числу операций при использовании точности $\varepsilon = 10^{-4.5}$ в сравнении с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ составляет порядка 10–15% (рис. 7), что позволяет исключить этот интервал при практическом использовании рассмотренного подхода.

Заключение. В настоящей статье представлен алгоритм численного решения уравнения Гельмгольца в трехмерно-неоднородных средах. Для решения комплексной закононеопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной в результате конечно-разностной аппроксимации, используется прямой метод Гаусса с применением техники аппроксимации матрицами малого ранга и иерархического формата данных HSS (Hierarchically Semiseparable Structure).

Для повышения точности получаемого решения предлагается использовать итерационные методы: широко используемый и высокоэффективный метод — BiCGStab, а также простейший и экономный с точки зрения реализации — метод итерационного уточнения. В этом случае решение СЛАУ методом Гаусса с применением малоранговой аппроксимации является, по сути, предобусловливанием исходной задачи. Одним из основных результатов работы является построение апостериорных оценок скоростей сходимости указанных итерационных методов в зависимости от точности малоранговой аппроксимации. Показано, что метод BiCGStab сходится для широкого диапазона точности предобусловливания, однако для низких значений точности его скорость сходимости чрезвычайно низка. Метод итерационного уточ-

нения не сходится при низкой точности предобусловливания, в приведенных примерах соответствующий диапазон точности — от 10^{-4} до 10^{-6} . При более высокой точности скорость сходимости у метода простой итерации и у BiCGStab практически одинаковая. При этом метод итерационного уточнения гораздо проще и экономичнее в реализации, что делает его использование предпочтительным.

При высокой точности малоранговой аппроксимации $\varepsilon \sim 10^{-12}$ получаемое решение практически не отличается от решения, полученного с помощью прямого метода, реализованного в Intel MKL PARDISO. Временные характеристики и количество использованной памяти в случаях HSS и PARDISO при такой точности также соизмеримы. При меньшей точности ($\varepsilon \sim 10^{-6.5}$), достаточной для решения практических задач, показано 2.5, . . . , 3-кратное превышение производительности предложенного алгоритма по сравнению с PARDISO. Экономия по использованию памяти составляет более чем 50%. Указанное преимущество продемонстрировано на примере решения задачи как с одной, так и со многими правыми частями, что является весьма актуальным для решения практических задач из области геофизики.

Работа выполнена при поддержке фонда CRDF (US Civilian Research and Development Foundation) (грант RUE1-30034-NO-13) и РФФИ (коды проектов 14-01-31340, 14-05-31222, 14-05-93090, 14-05-00049). Расчеты проводились на кластере НКС-30Т Сибирского суперкомпьютерного центра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бажалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973.
2. *Белоносов М.А., Костов К., Решетова Г.В., Соловьев С.А., Чеверда В.А.* Организация параллельных вычислений для моделирования сейсмических волн с использованием аддитивного метода Шварца // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 525–535.
3. *Гадьльшин К.Г., Чеверда В.А.* Обращение полных волновых полей нелинейным методом наименьших квадратов: SVD анализ // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 499–513.
4. *Зайцева А.Ф., Лисица В.В.* Влияние возмущений условий согласования на сходимость метода декомпозиции области для уравнения Гельмгольца // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 476–486.
5. *Неклюдов Д.А., Сильвестров И.Ю., Чеверда В.А.* Итерационный метод решения трехмерного уравнения Гельмгольца с “почти аналитическим” предобусловливателем для моделирования акустических волновых полей в задачах сейсмозащиты // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 514–529.
6. *Мацюкин А.М., Непомнящих С.В.* Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия ВУЗов. Математика. 1985. **29**, В 10. 61–66.
7. *Соловьев С.А.* Решение разреженных систем линейных уравнений прямым методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // Вычислительные методы и программирование. 2014. **15**. 441–460.
8. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. **1**, № 5. 922–927.
9. *Al-Kurdi A., Kincaid D.R.* LU-decomposition with iterative refinement for solving sparse linear systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. **185**, N 2. 391–403.
10. *Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D.* Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2002. **39**, N 5. 1749–1779.
11. *Asvadurov S., Druskin V., Guddati M.N., Knizhnerman L.* On optimal finite-difference approximation of PML // SAIM J. Numer. Anal. 2003. **41**, N 1. 287–305.
12. *Balay S., Abhyankar S., Adams M., Brown J., Brune P., Buschelman K., Eijkhout V., Groppe W.D., Kaushik D., Knepley M.G., McInnes L.C., Rupp K., Smith B.F., Zhang H.* PETSc users manual. Revision 3.5. Technical Report ANL-95/11. Argonne: Argonne National Laboratory, 2014.
13. *Belonosov M.A., Kostov C., Reshetova G.V., Soloviev S.A., Tcheverda V.A.* Parallel numerical simulation of seismic waves propagation with Intel Math Kernel Library // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 7782. Heidelberg: Springer, 2013. 153–167.
14. *Berenger J.P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Comput. Phys. 1994. **114**, N 2. 185–200.
15. *Brossier R., Operto S., Virieux J.* Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion // Geophysics. 2009. **74**, N 6. 105–118.
16. *Chandrasekaran S., Gu M., Pals T.* A fast ULV decomposition solver for hierarchically semiseparable representations // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. **28**, N 3. 603–622.
17. *Collino F., Tsogka C.* Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // Geophysics. 2001. **66**, N 1. 294–307.
18. *Erlangga Y.A., Vuik C., Oosterlee C.* On a class of preconditioners for solving the Helmholtz equation. Applied Numerical Mathematics. 2004. **50**, N 3/4. 409–425.
19. *Ernst O.G., Gander M.J.* Why it is difficult to solve Helmholtz problems with classical iterative methods // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 83. Heidelberg: Springer, 2012. 325–363.

20. Gander M.J., Halpern L., Magoulès F. An optimized Schwarz method with two-sided robin transmission conditions for the Helmholtz equation // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2007. **55**, N 2. 163–175.
21. George A. Nested dissection of a regular finite element mesh // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1973. **10**, N 2. 345–363.
22. Goreinov S.A., Tyrtyshnikov E.E., Zamarashkin N.L. A theory of pseudo-skeleton approximations // *Linear Algebra Appl.* 1997. **261**, № 1–3. 1–21.
23. Xia J., Chandrasekaran S., Gu M., Li X.S. Superfast multifrontal method for large structured linear systems of equations // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2009. **31**, N 3. 1382–1411.
24. Hackbusch W. A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. Part I: Introduction to H-matrices // *Computing*. 1999. **62**, N 2. 89–108.
25. Kriemann R. HLIBpro (<http://www.hlibpro.com/>).
26. Kwok F. Optimized additive Schwarz with harmonic extension as a discretization of the continuous parallel Schwarz method // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2011. **49**, N 3. 1289–1316.
27. Lisitsa V. Optimal discretization of PML for elasticity problems // *Electron. Trans. Numer. Anal.* 2008. **30**. 258–277.
28. Operto S., Virieux J., Ribodetti A., Anderson J.E. Finite-difference frequency-domain modeling of viscoacoustic wave propagation in 2D tilted transversely isotropic (TTI) media // *Geophysics*. 2009. **74**, N 5. 75–95.
29. Rjasanow S. Adaptive cross approximation of dense matrices // *Proc. International Association for Boundary Element Methods*. Austin: Univ. of Texas at Austin, 2002. 1–12.
30. Rouet F.-H., Li X.S., Ghysels P. A distributed-memory package for dense hierarchically semi-separable matrix computations using randomization // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2014 (in press).
31. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: SIAM Press, 2003.
32. Stüben K. A review of algebraic multigrid // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. **128**, N 1/2. 281–309.
33. Suh S.Y., Yeh A., Wang B., Cai J., Yoon K., Li Z. Cluster programming for reverse time migration // *The Leading Edge*. 2010. **29**, N 1. 94–97.
34. Symes W.W. Reverse time migration with optimal checkpointing // *Geophysics*. 2007. **72**, N 5. 213–221.
35. Thompson L.L. A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006. **119**, N 3. 1315–1330.
36. Tyrtyshnikov E. Mosaic-skeleton approximations // *Calcolo*. 1996. **33**, N 1/2. 47–57.
37. Van der Vorst H.A. Bi-CGStab: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* 1992. **13**, N 2. 631–644.
38. Virieux J., Operto S., Ben-Hadj-Ali H., Brossier R., Etienne V., Sourbier F., Giraud L., Haidar A. Seismic wave modeling for seismic imaging // *The Leading Edge*. 2009. **28**, N 5. 538–544.
39. Xia J. Robust and efficient multifrontal solver for large discretized PDEs // *High-Performance Scientific Computing*. London: Springer, 2012. 199–217.

Поступила в редакцию
19.03.2015

Solution of the Helmholtz Problem Using the Preconditioned Low-Rank Approximation Technique

K. V. Voronin¹ and S. A. Solovyev²

¹ *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Engineer, e-mail: kvoronin@labchem.sccc.ru*

² *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Koptyuga 3, Novosibirsk, 630090, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: 511ssa@mail.ru*

Received March 19, 2015

Abstract: An algorithm for solving the Helmholtz problem in 3D heterogeneous media using the low-rank approximation technique is proposed. This technique is applied as a preconditioner for two different iterative processes: an iterative refinement and BiCGStab. The iterative refinement approach is known to be very simple and straightforward but can suffer from the lack of convergence; BiCGStab is more stable and more sophisticated as well. A dependence of the convergence rate on low-rank approximation quality is studied for these iterative processes. For typical problems of seismic exploration, it is shown that, starting with some low-rank accuracy,

the convergence rate of the iterative refinement is very similar to BiCGStab. Therefore, it is preferable to use the more efficient iterative refinement method. Numerical experiments also show that, for reasonable (from the practical standpoint) low-rank accuracy, the proposed method provides three times performance gain (for sequential code) and reduces the memory usage up to a factor of two in comparison with the Intel MKL PARDISO high performance direct solver.

Keywords: 3D Helmholtz problem, algorithms for sparse systems of linear algebraic equations, Gaussian elimination method, low-rank approximation, HSS matrix representation, BiCGStab method, iterative refinement.

References

1. N. S. Bakhvalov, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
2. M. A. Belonosov, K. Kostov, G. V. Reshetova, et al., "Parallel Computations for the Simulation of Seismic Waves on the Basis of the Additive Schwarz Method," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 525–535 (2012).
3. K. G. Gadylshin and V. A. Tcheverda, "Nonlinear Least-Squares Full Waveform Inversion: SVD Analysis," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 499–513 (2014).
4. A. F. Zaitseva and V. V. Lisitsa, "Influence of Perturbations in Transmission Conditions on the Convergence of the Domain Decomposition Method for the Helmholtz Equation," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 476–486 (2014).
5. D. A. Neklyudov, I. Yu. Silvestrov, and V. A. Tcheverda, "A 3D Helmholtz Iterative Solver with a Semi-Analytical Preconditioner for Acoustic Wavefield Modeling in Seismic Exploration Problems," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 514–529 (2014).
6. A. M. Matsokin and S. V. Nepomnyashchikh, "The Schwarz Alternation Method in a Subspace," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, No. 10, 61–66 (1985) [Russ. Math. **29** (10), 78–84 (1985)].
7. S. A. Solovyev, "Application of the Low-Rank Approximation Technique in the Gauss Elimination Method for Sparse Linear Systems," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 441–460 (2014).
8. R. P. Fedorenko, "A Relaxation Method for Solving Elliptic Difference Equations," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **1** (5), 922–927 (1961) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **1** (4), 1092–1096 (1962)].
9. A. Al-Kurdi and D. R. Kincaid, "LU-Decomposition with Iterative Refinement for Solving Sparse Linear Systems," *J. Comput. Appl. Math.* **185** (2), 391–403 (2006).
10. D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, "Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems," *SIAM J. Numer. Anal.* **39** (5), 1749–1779 (2002).
11. S. Asvadurov, V. Druskin, M. N. Guddati, and L. Knizhnerman, "On Optimal Finite-Difference Approximation of PML," *SAIM J. Numer. Anal.* **41** (1), 287–305 (2003).
12. S. Balay, S. Abhyankar, M. Adams, et al., *PETSc Users Manual. Revision 3.5*, Technical Report ANL-95/11 (Argonne Nat. Lab., Argonne, 2015).
13. M. A. Belonosov, C. Kostov, G. V. Reshetova, et al., "Parallel Numerical Simulation of Seismic Waves Propagation with Intel Math Kernel Library," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2013), Vol. 7782, pp. 153–167.
14. J.-P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *J. Comput. Phys.* **114** (2), 185–200 (1994).
15. R. Brossier, S. Operto, and J. Virieux, "Seismic Imaging of Complex Onshore Structures by 2D Elastic Frequency-Domain Full-Waveform Inversion," *Geophys.* **74** (6), 105–118 (2009).
16. S. Chandrasekaran, M. Gu, and T. Pals, "A Fast *ULV* Decomposition Solver for Hierarchically Semiseparable Representations," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **28** (3), 603–622 (2006).
17. F. Collino and C. Tsogka, "Application of the Perfectly Matched Layer Absorbing Layer Model to the Linear Elastodynamic Problem in Anisotropic Heterogeneous Media," *Geophys.* **66** (1), 294–307 (2001).
18. Y. A. Erlangga, C. Vuik, and C. W. Oosterlee, "On a Class of Preconditioners for Solving the Helmholtz Equation," *Appl. Numer. Math.* **50** (3–4), 409–425 (2004).
19. O. G. Ernst and M. J. Gander, "Why it is Difficult to Solve Helmholtz Problems with Classical Iterative Methods," in *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* (Springer, Heidelberg, 2012), Vol. 83, pp. 325–363.
20. M. J. Gander, L. Halpern, and F. Magoulès, "An Optimized Schwarz Method with Two-Sided Robin Transmission Conditions for the Helmholtz equation," *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **55** (2), 163–175 (2007).
21. A. George, "Nested Dissection of a Regular Finite Element Mesh," *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (2), 345–363 (1973).
22. S. A. Goreinov, E. E. Tyrtyshnikov, and N. L. Zamarashkin, "A Theory of Pseudo-Skeleton Approximations," *Linear Algebra Appl.* **261** (1–3), 1–21 (1997).

23. J. Xia, S. Chandrasekaran, M. Gu, and X. S. Li, "Superfast Multifrontal Method for Large Structured Linear Systems of Equations," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **31** (3), 1382–1411 (2009).
24. W. Hackbusch, "A Sparse Matrix Arithmetic Based on H-Matrices. Part I: Introduction to H-Matrices," *Computing* **62** (2), 89–108 (1999).
25. HLIBpro. <http://www.hlibpro.com/>. Cited April 24, 2015.
26. F. Kwok, "Optimized Additive Schwarz with Harmonic Extension as a Discretization of the Continuous Parallel Schwarz Method," *SIAM J. Numer. Anal.* **49** (3), 1289–1316 (2011).
27. V. Lisitsa, "Optimal Discretization of PML for Elasticity Problems," *Electron. Trans. Numer. Anal.* **30**, 258–277 (2008).
28. S. Operto, J. Virieux, A. Ribodetti, and J. E. Anderson, "Finite-Difference Frequency-Domain Modeling of Viscoacoustic Wave Propagation in 2D Tilted Transversely Isotropic (TTI) Media," *Geophys.* 2009. **74** (5), 75–95 (2009).
29. S. Rjasanow, "Adaptive Cross Approximation of Dense Matrices," in *Proc. Int. Association for Boundary Element Methods, Austin, USA, May 28–30, 2002* (Univ. Texas at Austin, Austin, 2002), pp. 1–12.
30. F.-H. Rouet, X. S. Li, and P. Ghysels, "A Distributed-Memory Package for Dense Hierarchically Separable Matrix Computations Using Randomization," *ACM Trans. Math. Softw.* 2014 (in press).
31. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 2003).
32. K. Stüben, "A Review of Algebraic Multigrid," *J. Comput. Appl. Math.* **128** (1–2), 281–309 (2001).
33. S. Y. Suh, A. Yeh, B. Wang, et al., "Cluster Programming for Reverse Time Migration," *The Leading Edge* **29** (1), 94–97 (2010).
34. W. W. Symes, "Reverse Time Migration with Optimal Checkpointing," *Geophys.* **72** (5), 213–221 (2007).
35. L. L. Thompson, "A review of Finite-Element Methods for Time-Harmonic Acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.* **119** (3), 1315–1330 (2006).
36. E. Tyrtyshnikov, "Mosaic-Skeleton Approximations," *Calcolo* **33** (1–2), 47–57 (1996).
37. H. A. van der Vorst, "Bi-CGStab: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **13** (2), 631–644 (1992).
38. J. Virieux, S. Operto, H. Ben-Hadj-Ali, et al., "Seismic Wave Modeling for Seismic Imaging," *The Leading Edge* **28** (5), 538–544 (2009).
39. J. Xia, "Robust and Efficient Multifrontal Solver for Large Discretized PDEs," in *High-Performance Scientific Computing* (London, Springer, 2012), pp. 199–217.