

УДК 519.688

doi 10.26089/NumMet.v16r114

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Е. А. Берендеев<sup>1</sup>, В. А. Вшивков<sup>2</sup>, А. А. Ефимова<sup>3</sup>, Е. А. Месяц<sup>4</sup>

Рассматривается задача взаимодействия электронного пучка с плазмой. Физический механизм взаимодействия плазмы с релятивистским электронным пучком включает в себя резонансное возбуждение колебаний плазмы, возникновение модуляции плотности плазмы и последующее рассеяние электронов на флуктуациях плотности. Для моделирования использовался метод частиц-в-ячейках (PIC-метод). При решении задачи реализован параллельный алгоритм вычислений, расчеты проводились на различных суперЭВМ.

**Ключевые слова:** физика плазмы, пучковая неустойчивость, уравнение Власова, уравнения Максвелла, метод частиц-в-ячейках.

**1. Введение.** Одной из важнейших задач физики плазмы является нагрев высокотемпературной плазмы в термоядерных установках. В настоящей статье на основе численного моделирования рассмотрены процессы установления и нелинейной эволюции квазистационарной плазменной турбулентности, возбуждаемой мощным электронным пучком в открытой ловушке ГОЛ-3 (Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН) [1]. Установка ГОЛ-3 состоит из многопучковой ловушки открытого типа с плотной плазмой и генератора сильноточного релятивистского электронного пучка (РЭП), используемого для нагрева плазмы. Одним из важных достижений последних лет в физике открытых ловушек стало обнаружение подавления продольной электронной теплопроводности на торцы установки в процессе инжекции РЭП.

Несмотря на то что задача о релаксации электронного пучка в плазме является классической проблемой физики плазмы [2, 3] и существует целый ряд теоретических моделей, описывающих различные режимы пучково-плазменного взаимодействия, исследования в этой области остаются актуальными [4–9]. Максимально приближенная к условиям лабораторных экспериментов постановка задачи зачастую требует отказа от привычных для теории идеализаций, таких как слабое или сильное магнитное поле, гидродинамический или кинетический характер пучковой неустойчивости, приближение случайных фаз возбуждаемых в плазме турбулентных пульсаций и др. Кроме того, при длительной инжекции пучка эволюция пучково-плазменной системы может проходить через длинную последовательность стадий, определяемых совершенно разными нелинейными процессами.

Для изучения влияния пучковых нелинейностей на поведение неустойчивости в условиях развитой турбулентности необходимо численное моделирование, которое, с одной стороны, будет способно на больших временах отслеживать эволюцию возбуждаемой пучком турбулентности, а с другой, позволит обеспечить достаточно подробное описание кинетических эффектов, связанных с захватом пучка.

В работе описана созданная численная модель, основанная на методе частиц-в-ячейках (Particle-in-Cell method) [10–13] и ориентированная на исследование устойчивости и нагрева плазмы теплым электронным пучком. Известно, что электронный пучок, распространяющийся в плотной плазме, неустойчив по отношению к продольной модуляции плотности. Для нахождения гармоник с максимальным инкрементом нарастания напряженности электрического поля проводился дисперсионный анализ. Рассматривалась трехмерная полная гидродинамическая постановка задачи в предположении, что движение происходит вдоль оси  $x$ . С помощью численного моделирования удалось воспроизвести различные сценарии возбуждения плазменной турбулентности электронным пучком.

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; аспирант, e-mail: evgeny.berendeev@gmail.com

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; зав. лабораторией, e-mail: vsh@ssd.sscs.ru

<sup>3</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: anna.an.efimova@gmail.com

<sup>4</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; мл. науч. сотр., e-mail: mesyats@gmail.com

**2. Постановка задачи.** Наиболее полное исследование физических процессов в плазме может быть проведено только при комплексном подходе, сочетающем как экспериментальные исследования, так и исследования вычислительными методами, адекватно описывающими эти процессы. Общепринято, что хорошей исходной моделью полностью ионизованной бесстолкновительной плазмы является система уравнений, состоящая из кинетических уравнений Власова [10, 13] для функций распределения ионов и электронов и уравнений Максвелла с самосогласованными электромагнитными полями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ie}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{ie}}{\partial \mathbf{r}} + \kappa_{ie} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]) \frac{\partial f_{ie}}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \quad \kappa_e = -1, \quad \kappa_i = \frac{m_e}{m_i}, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{aligned}$$

Здесь индексами  $i$  и  $e$  помечены величины, относящиеся к ионам и электронам;  $f_{ie}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  — функция распределения частиц;  $m_{ie}$ ,  $\mathbf{p}_{ie}$  и  $\mathbf{r}_{ie}$  — масса, импульс и положение иона или электрона;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженности электрического и магнитного полей. Для перехода к безразмерному виду в качестве единиц использовались следующие величины: скорость света  $c$ , масса электрона  $m_e$ , время  $t = \omega_{pe}^{-1}$ ,  $\omega_{pe} = 5.6 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$ . Далее все уравнения будут приводиться в безразмерном виде.

В начальный момент времени в области решения, имеющей форму прямоугольника (параллелепипеда)  $x \in [0, L]$ ,  $y(z) \in [0, L_\perp]$ , находится плазма, состоящая из электронов и ионов водорода, и пучок электронов. Предполагается, что пучок уже полностью вошел в моделируемую область. Задаются плотности пучка  $n_b$  и электронов плазмы  $n_e = 1 - n_b$ , температура электронов плазмы  $T_e$  и пучка  $T_b$ ; температура ионов считается нулевой  $T_i = 0$ . Начальное распределение частиц по скоростям максвелловское с плотностью распределения

$$f(v) = \frac{1}{\Delta v \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{2\Delta v^2}\right),$$

где  $\Delta v$  — разброс частиц по скоростям ( $T_b = \Delta v^2$ ),  $v_0$  — средняя скорость. Все частицы (электроны и ионы плазмы, электроны пучка) распределены по области равномерно, начальная средняя скорость пучка направлена по оси  $x$  и равна  $v_0 = 0.2$ . Граничные условия периодические, т.е.  $F|_{x=0} = F|_{x=L_x}$ ,  $F|_{y=0} = F|_{y=L_y}$ , где  $F$  может быть одной из следующих величин:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $f_k$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\rho$ .

**3. Решение основных уравнений.** Решение уравнения Власова проводится методом частиц в ячейках [10]. Плазма представляется набором модельных частиц, траекториями движения которых являются характеристики уравнения Власова:

$$\frac{d\mathbf{p}_{ie}}{dt} = \kappa_{ie} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \quad \frac{d\mathbf{r}_{ie}}{dt} = \mathbf{v}_{ie}, \quad \mathbf{p}_{ie} = \frac{\mathbf{v}_{ie}}{\sqrt{1 - v_{ie}^2}}. \quad (1)$$

Для решения системы уравнений (1) используется схема с перешагиванием:

$$\frac{p_j^{m+1/2} - p_j^{m-1/2}}{\tau} = \kappa_{ie} \left( E_i^m + \left[ \frac{v_j^{m+1/2} + v_j^{m-1/2}}{2}, H_j^m \right] \right). \quad (2)$$

Плотности вычисляются по положениям частиц, токи — из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0.$$

Уравнения Максвелла решаются в эйлеровых переменных. Для нахождения электрических и магнитных полей используется схема Лэнгдона–Лазинского, описанная в работах [14–16]. В этой схеме напряженность электрического и магнитного полей вычисляются на сетках, смещенных относительно друг друга по времени и пространству 2-го порядка точности:

$$\frac{H^{m+1/2} - H^{m-1/2}}{\tau} = -\text{rot}_h E^m, \quad \frac{E^{m+1} - E^m}{\tau} = -j^{m+1/2} + \text{rot}_h H^{m+1/2}. \quad (3)$$

Значения  $H$  вычисляется на дробном шаге по времени,  $E$  вычисляется на целом шаге по времени.

Таким образом, схема решения задачи на одном шаге разбивается на два этапа. На первом (лагранжевом) этапе по схеме (2) вычисляются скорости и координаты частиц, определяются компоненты плотности тока  $j^{m+1/2}$  и плотности заряда  $\rho^{m+1}$ . На втором (эйлеровом) этапе по схеме (3) решаются уравнения

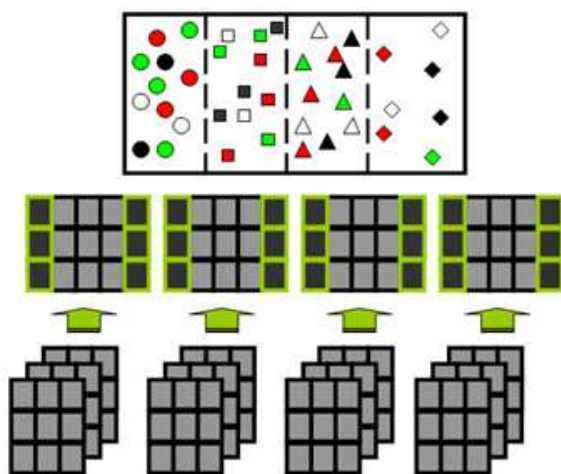


Рис. 1. Декомпозиция области и межпроцессорные коммуникации

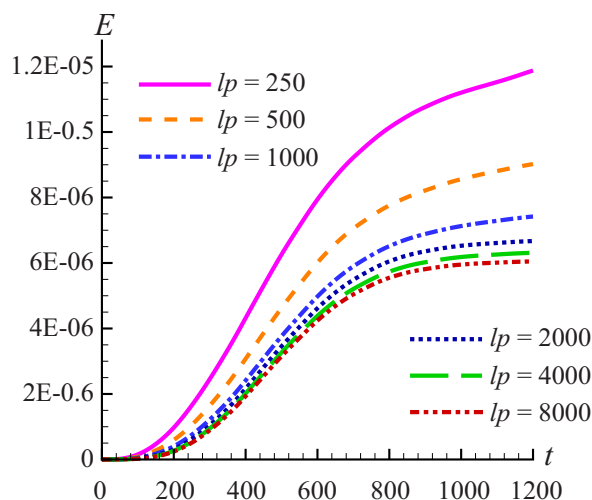


Рис. 2. Напряженность электрического поля в зависимости от времени (время в 0.001 плазменного периода) для различного числа частиц в ячейке ( $l_p$ )

Максвелла, т.е. определяются значения  $H^{m+1/2}$  и  $E^{m+1}$  в узлах сетки. Значения электрических и магнитных полей, действующих на каждую частицу, вычисляются с помощью билинейной интерполяции.

**4. Параллельная реализация алгоритма.** В настоящей работе используется смешанная эйлерово-лагранжевая декомпозиция. Область делится на несколько подобластей вдоль одного измерения. На рис. 1 приведена иллюстрация используемого метода: с каждой подобластью связана группа процессоров, а частицы в каждой подобласти разделены между всеми процессорами группы. Каждая группа решает уравнения Максвелла только в своей подобласти. В этом случае происходит обмен граничными значениями полей между группами; кроме того, группы должны обмениваться частицами, переместившимися в соответствующую подобласть. Внутри этой группы происходит обмен значениями плотности тока.

Как было показано в работе [17], использование эйлерово-лагранжевой декомпозиции может дать существенное ускорение расчета по сравнению с другими реализациями — это связано с уменьшением объема пересылаемых данных и более эффективным использованием кэш-памяти процессорных ядер. В то же время, из-за декомпозиции области может возникать дисбаланс по количеству частиц на разных процессорах, что приводит к неравномерной загрузке вычислительных ядер. Использование одномерной декомпозиции отчасти помогает решить эту проблему. Программа реализована на языке Fortran-90 с использованием MPI. Расчеты проводились на следующих вычислительных системах:

- суперкомпьютер “Ломоносов” (Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва; процессоры Intel Xeon 5570 2932 МГц, Cache 8 Mb);
- суперкомпьютер “НКС-30Т” (НКС-G6) (Сибирский суперкомпьютерный центр ИВМиМГ СО РАН, г. Новосибирск; процессоры Intel Xeon E5540 2530 МГц, Cache 8 Mb).

Время счета одного шага (в секундах) для различного числа процессоров и полученное ускорение

Общее количество используемых процессорных ядер	Число процессорных ядер на подобласть	Время расчета одного шага, сек.	Ускорение по сравнению с 256 процессорными ядрами
256	4	2.737	1
512	8	1.448	1.89
1024	16	0.763	3.58

**4.1. Масштабируемость.** Проведено исследование масштабируемости параллельного алгоритма на суперкомпьютере “Ломоносов”. В таблице представлено время расчета одного шага (в секундах) при ис-

пользовании различного количества процессорных ядер, а также полученное при этом ускорение. В связи с большим объемом требуемой оперативной памяти масштабируемость рассматривается относительно 256 процессорных ядер. Использование меньшего количества процессорных ядер не представляет интереса с точки зрения реальных задач. Параметры задачи (2D постановка):

- сетка  $1024 \times 1024$ , декомпозиция области вдоль направления  $Y$  на 64 подобласти;
- число частиц в ячейке 2500 (всего 2 621 440 000 частиц).

**5. Вычислительный эксперимент.** Рассмотрим результаты решения задачи развития пучковой неустойчивости. Расчетная область имеет форму прямоугольника. Ионы образуют однородный неподвижный фон. В расчетной области находятся два пучка электронов. Предполагается, что оба пучка занимают все пространство области. Начальное распределение электронов пространственно однородно и представляет собой суперпозицию двух встречных максвелловских потоков, т.е.

$$f_0(v) = a_1 \exp\left[-\frac{(v - v_0)^2}{2\sigma_1^2}\right] + a_2 \exp\left[-\frac{(v + v_0)^2}{2\sigma_2^2}\right],$$

где  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  — дисперсии. С течением времени пучки начинают взаимодействовать, и постепенно образуется один пучок электронов с максвелловской функцией распределения частиц по скоростям. В процессе этого взаимодействия возникает пучковая неустойчивость. На рис. 2 представлен график изменения напряженности электрического поля в зависимости от времени для разного числа частиц в ячейке ( $lp$ ).

На некотором временном участке происходит нарастание амплитуды электрического поля. Напряженность электрического поля в этом случае описывается экспоненциальной функцией. Из рис. 2 видно, что при увеличении числа частиц в ячейке наблюдается сходимость решения. Было найдено численное и аналитическое значение инкремента нарастания амплитуды поля, получено хорошее соответствие с имеющимся теоретическим решением.

Так как граничные условия для всех функций по всем направлениям периодические, то из непрерывного спектра волновых чисел  $k$  можно вырезать дискретные значения  $k_s = \frac{2\pi s}{L}$  ( $s = x, y, z$ ), из которых только основная мода с  $k_x = \frac{2\pi}{L}, k_y = k_z = 0$  попадает в область большого инкремента.

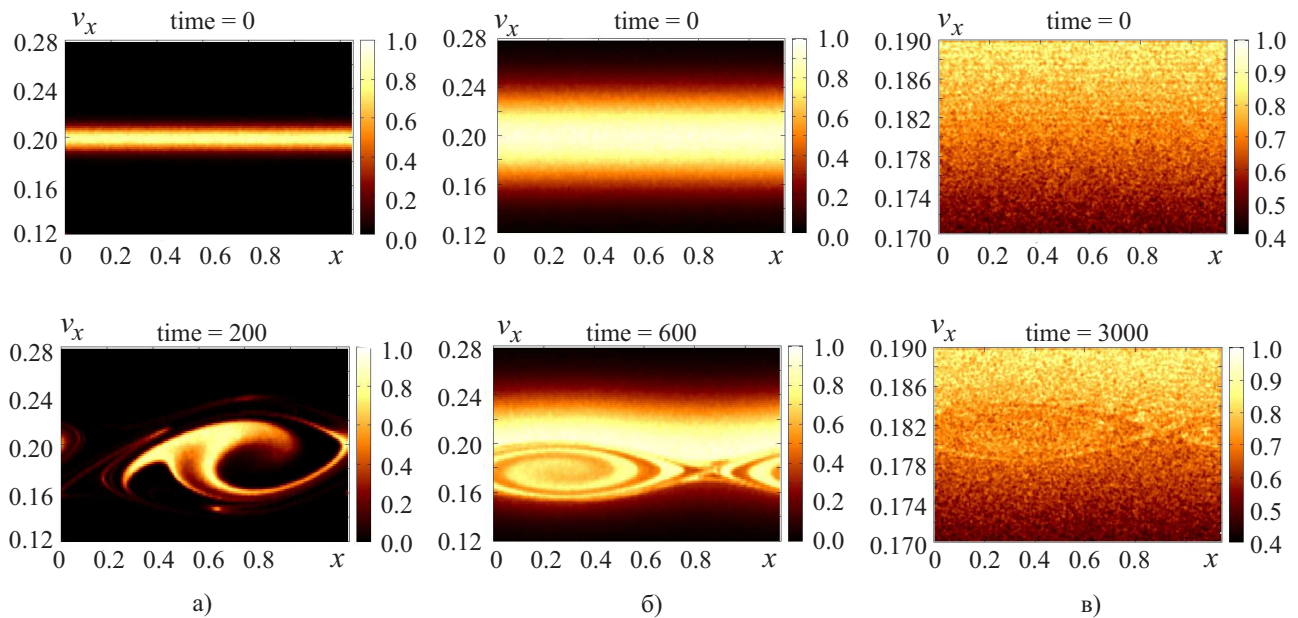


Рис. 3. Электроны пучка на фазовой плоскости  $(x, v_x)$  для гидродинамического ((а),  $\Delta v = 0.007, lp = 100$ ), переходного ((б),  $\Delta v = 0.02, lp = 500$ ) и кинетического ((в),  $\Delta v = 0.02, lp = 5000$ ) режимов

Рассматривается поведение пучка в трех режимах развития неустойчивости.

1. *Гидродинамический режим* ( $k\Delta v \ll \gamma$ ). *Основные параметры:* отношение плотности пучка к плотности плазмы  $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ , разброс электронов пучка по скоростям  $\Delta v/v_0 = 0.035$ , длина области  $L = 1.2566$ .

2. *Переходный режим* ( $k\Delta v \sim \gamma$ ). *Основные параметры:* отношение плотности пучка к плотности плазмы  $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ , разброс электронов пучка по скоростям  $\Delta v/v_0 = 0.14$ , длина области  $L = 1.1424$ .

3. *Кинетический режим* ( $k\Delta v \gg \gamma$ ). *Основные параметры*: отношение плотности пучка к плотности плазмы  $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-4}$ , разброс электронов пучка по скоростям  $\Delta v/v_0 = 0.14$ , длина области  $L = 1.1424$ .

Для визуализации поведения электронов пучка на фазовой плоскости  $(x, v_x)$  отслеживалась эволюция выбранных частиц, начальное положение которых представлено на рис. 3 (верхний ряд). В нижнем ряду показано положение электронов пучка в моменты времени, соответствующие насыщению неустойчивости. Для кинетического режима (рис. 3в) показана только узкая область по скорости  $0.17 < v_x < 0.2$ , но ширина начального распределения частиц такая же, как и в переходном режиме (рис. 3б,  $t = 0$ ). Видно, что в гидродинамическом режиме возбуждаемой волной захватывается весь пучок, а в переходном и кинетическом все более узкая его часть, при этом остальные электроны во взаимодействие с волной не вступают. По этой причине в кинетическом режиме требуется брать очень большое число частиц (5000 частиц-в-ячейке). Видно, что происходит захват именно тех частиц, скорость которых близка к расчетной фазовой скорости волны  $v = 0.9$ ,  $v_0 = 0.18$ . Это соответствует аналитическим оценкам для одномерной задачи [18].

Обозначим ширину области захваченных частиц  $\delta v_x$ . Для переходного и кинетического режима она равна  $\delta v_x = C_0 \frac{\gamma}{k}$ , где значение константы  $C_0$  для всех расчетов в переходном и кинетическом режимах одинаково и приближенно равно  $C_0 \sim 14$ , что соответствует теоретическому значению [19]. Следовательно, можно заключить, что построенная нами модель позволяет не только качественно, но и количественно моделировать пучковую неустойчивость.

Была исследована эволюция плотности заряда электронного пучка с развитием плазменной турбулентности при следующих характерных значениях: температура плазмы 500 эВ, отношение плотности пучка к плотности плазмы  $2 \times 10^{-3}$ . Размер области 1024 микрометра по каждому направлению. Сетка  $1024 \times 1024$  узла, общее число модельных частиц равно 5 242 880 000. Расчеты проводились на суперкомпьютере “Ломоносов” с использованием до 8192 процессорных ядер. В начальный момент времени заряд электронов пучка распределен по области равномерно. При взаимодействии с плазмой в результате резонансных колебаний образуются участки модуляции плотности. Этот эффект хорошо виден из рис. 4, на котором изображен график плотности заряда в момент времени 100. Как предполагается, именно за счет модуляции плотности плазмы и возбуждения резонансных колебаний происходит подавление продольной теплопроводности на торце установки в процессе инжекции РЭП.

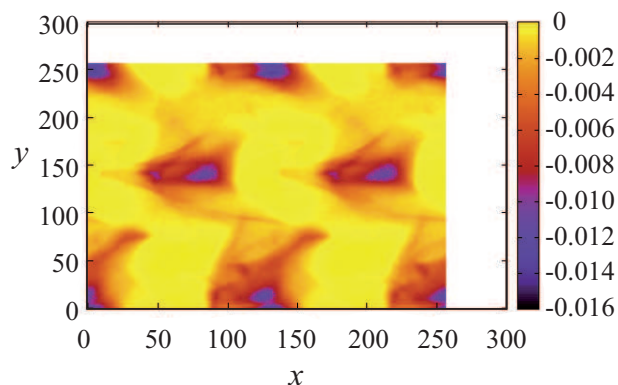


Рис. 4. Плотность заряда электронного пучка

**6. Заключение.** Созданы модель и программа, позволяющие моделировать эволюцию и неустойчивость теплового электронного пучка малой плотности в плазме, а также различные эффекты теплопроводности. Исследовано поведение решения в трех разных режимах неустойчивости при различных счетных параметрах. Удалось воспроизвести эффект возникновения модуляций плотности плазмы и резонансных колебаний плазмы. Рассматриваемая задача достаточно ресурсоемка, но используемый масштабируемый параллельный алгоритм, обеспечивающий равномерную загрузку вычислительных ядер, позволяет выполнять сложные расчеты.

Авторы выражают благодарность Г. И. Дудниковой за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 14-01-00392 и 14-01-31220) и Интеграционного проекта СО РАН № 130. Задача о модуляции плотности заряда электронного пучка рассматривалась в рамках гранта РНФ № 14-11-00485.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burdakov A.V., Avrorov A.P., Arzhannikov A.V., et al. Development of extended heating pulse operation mode at GOL-3 // Fusion Science and Technology. 2013. **63**, N 1T. 29–34.
2. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1970.
3. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. М.: Атомиздат, 1971.
4. Timofeev I.V., Lotov K.V. Relaxation of a relativistic electron beam in plasma in the trapping regime // Physics of Plasmas. 2006. **13**. doi: 10.1063/1.2217934.
5. Burdakov A.V., Kotelnikov I.A., Erofeev V.I. Explanation of turbulent suppression of electron heat transfer in GOL-3 facility at the stage of relativistic electron beam injection // Fusion Science and Technology. 2005. **47**, N 1T. 74–77.

6. Coppi B., Pegoraro F., Pozzoli R., Rewoldt G. Slide-away distributions and relevant collective modes in high-temperature plasmas // Nuclear Fusion. 1976. **16**, N 2. 309–328.
7. Baumgärtel K. Ion dynamics in electron beam-plasma interaction: particle-in-cell simulations // Ann. Geophys. 2014. **32**, N 8. 1025–1033.
8. Grassi A., Fedeli L., Macchi A., Bulanov S.V., Pegoraro F. Phase space dynamics after the breaking of a relativistic Langmuir wave in a thermal plasma // The European Physical Journal D. 2014. **68**. doi: 10.1140/epjd/e2014-50153-0.
9. Valentini F., Perrone D., Califano F., Pegoraro F., Veltri P., Morrison P.J., O’Neil T.M. Response to “Comment on undamped electrostatic plasma waves” // Phys. Plasmas. 2013. **20**. doi: 10.1063/1.4794728.
10. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004.
11. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Изд-во “Мир”, 1987.
12. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma physics via computer simulation. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1991.
13. Tajima T. Computational plasma physics. Boulder: Westview Press, 2004.
14. Вшивков В.А., Вшивков К.В., Дудникова Г.И. Алгоритмы решения задачи взаимодействия лазерного импульса с плазмой // Вычислительные технологии. 2001. **6**, № 2. 47–63.
15. Villasenor J., Buneman O. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solver // Computer Phys. Comm. 1992. **69**, N 2–3. 306–316.
16. Qin H., Zhang S., Xiao J., et al. Why is Boris algorithm so good? // Physics of Plasmas. 2013. **20**. doi: 10.1063/1.4818428.
17. Берендеев Е.А., Ефимова А.А. Реализация эффективных параллельных вычислений при моделировании больших задач физики плазмы методом частиц в ячейках // Вестник УГАТУ. Уфа. 2013. **17**, № 2 (55). 112–116.
18. Лотов К.В., Тимофеев И.В. Переходный режим одномерной двухпотоковой неустойчивости // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2008. **3**, вып. 1. 62–65.
19. Лотов К.В., Терехов А.В., Тимофеев И.В. О насыщении двухпотоковой неустойчивости электронного пучка в плазме // Физика плазмы. 2009. **35**, № 6. 567–574.

Поступила в редакцию  
10.02.2015

---

## Numerical Simulation of the Turbulence Development at Interaction of an Electron Beam with Plasma

E. A. Berendeev<sup>1</sup>, V. A. Vshivkov<sup>2</sup>, A. A. Efimova<sup>3</sup>, and E. A. Mesyats<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Graduate Student, e-mail: evgeny.berendeev@gmail.com

<sup>2</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Laboratory, e-mail: vsh@ssd.ssc.ru

<sup>3</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Junior Scientist, e-mail: anna.an.efimova@gmail.com

<sup>4</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; prospekt Lavrentyeva 6, Novosibirsk, 630090, Russia; Junior Scientist, e-mail: mesyats@gmail.com

Received February 10, 2015

**Abstract:** The interaction of an electron beam with plasma is considered. The physical mechanism of interaction between plasma and a relativistic electron beam includes a resonant excitation of plasma oscillations and the occurrence of plasma density modulation, followed by electron scattering. The numerical simulation is based on the particle-in-cell (PIC) method. A parallel algorithm is implemented to solve the problem under consideration. Two supercomputing systems were used to perform a number of numerical experiments.

**Keywords:** plasma physics, beam instability, Vlasov equation, Maxwell’s equations, particle-in-cell (PIC) method.

## References

1. A. V. Burdakov, A. P. Avrorov, A. V. Arzhannikov, et al., “Development of Extended Heating Pulse Operation Mode at GOL-3,” *Fusion Sci. Technol.* **63** (1T), 29–34 (2013).
2. A. B. Mikhailovskii, *Theory of Plasma Instabilities* (Atomizdat, Moscow, 1970; Consultants Bureau, New York, 1974).
3. V. N. Tsytovich, *Theory of Turbulent Plasma* (Atomizdat, Moscow, 1971; Consultants Bureau, New York, 1977).
4. I. V. Timofeev and K. V. Lotov, “Relaxation of a Relativistic Electron Beam in Plasma in the Trapping Regime,” *Phys. Plasmas* **13** (2006). doi: 10.1063/1.2217934
5. A. V. Burdakov, I. A. Kotelnikov, and V. I. Erofeev, “Explanation of Turbulent Suppression of Electron Heat Transfer in GOL-3 Facility at the Stage of Relativistic Electron Beam Injection,” *Fusion Sci. Technol.* **47** (1T), 74–77 (2005).
6. B. Coppi, F. Pegoraro, R. Pozzoli, and G. Rewoldt, “Slide-away Distributions and Relevant Collective Modes in High-Temperature Plasmas,” *Nucl. Fusion* **16** (2), 309–328 (1976).
7. K. Baumgärtel, “Ion Dynamics in Electron Beam-Plasma Interaction: Particle-in-Cell Simulations,” *Ann. Geophys.* **32** (8), 1025–1033 (2014).
8. A. Grassi, L. Fedeli, A. Macchi, et al., “Phase Space Dynamics after the Breaking of a Relativistic Langmuir Wave in a Thermal Plasma,” *Eur. Phys. J. D* **68** (2014). doi: 10.1140/epjd/e2014-50153-0
9. F. Valentini, D. Perrone, F. Califano, et al., “Response to ‘Comment on Undamped Electrostatic Plasma Waves’,” *Phys. Plasmas* **20** (2013). doi: 10.1063/1.4794728
10. Yu. N. Grigoryev, V. A. Vshivkov, and M. P. Fedoruk, *Numerical Simulation by Particle-in-Cell Methods* (Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2004) [in Russian].
11. R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (New York: McGraw-Hill, 1981; Mir, Moscow, 1987).
12. C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation* (IOP Publ., Bristol, 1991).
13. T. Tajima, *Computational Plasma Physics* (Westview Press, Boulder, 2004).
14. V. A. Vshivkov, K. V. Vshivkov, and G. I. Dudnikova, “Algorithms for Solving the Problem of Interaction of the Laser Pulse with Plasma,” *Vychisl. Tekhnol.* **6** (2), 47–63 (2001).
15. J. Villasenor and O. Buneman, “Rigorous Charge Conservation for Local Electromagnetic Field Solver,” *Comput. Phys. Comm.* **69** (2–3), 306–316 (1992).
16. H. Qin, S. Zhang, J. Xiao, et al., “Why is Boris Algorithm so Good?,” *Phys. Plasmas* **20** (2013). doi: 10.1063/1.4818428
17. E. A. Berendeev and A. A. Efimova, “Implementation of the Effective Parallel Calculations to Model Large-Scale Plasma Physics Problems by the PIC-Method,” *Vestn. Ufa Aviatcion. Tekh. Univ.* **17** (2), 112–116 (2013).
18. K. V. Lotov and I. V. Timofeev, “Transition Regime of the One-Dimensional Two-Stream Instability,” *Vestn. Novosibirsk Univ., Ser.: Fiz.* **3** (1), 62–65 (2008).
19. K. V. Lotov, A. V. Terekhov, and I. V. Timofeev, “Saturation of Two-Stream Instability of an Electron Beam in Plasma,” *Fiz. Plazmy* **35** (6), 567–574 (2009) [*Plasma Phys. Rep.* **35** (6), 518–525 (2009)].