

УДК 519.633.6

doi 10.26089/NumMet.v16r103

МОДИФИКАЦИЯ СХЕМЫ “КАБАРЕ” ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

А. В. Данилин¹, А. В. Соловьев²

Предложен явный численный алгоритм для расчета одномерного движения смеси идеальных газов. Приведены физическая модель и уравнения движения смеси в консервативной и характеристической формах. Дискретизация уравнений движения выполнена по методике “кабаре”. Предложенный численный алгоритм испытан на решении задачи о распаде разрыва с различными газами по разные стороны разрыва. Произведено сравнение численных решений с аналитическим, а также с решениями, полученными по другим численным методикам. Показано, что предложенный алгоритм демонстрирует высокую точность решений на рассмотренном классе задач.

Ключевые слова: односкоростная многокомпонентная среда, системы гиперболических уравнений, схема “кабаре”, вычислительная гидродинамика, конечно-объемные методы.

1. Введение. В последние десятилетия наблюдается большой интерес к расчету движения многокомпонентных газовых смесей. Этот интерес отражен в многочисленных публикациях, представляющих разнообразные подходы к данной тематике. Среди них — алгоритмы WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) [1, 2], TVD (Total Variation Diminishing) [3], методы Годунова [4–7], характеристические методы [8, 9] и др. Среди важных проблем, возникающих в случае исследования многокомпонентных сред, отметим осцилляции давления, порождаемые движением границы раздела двух различных газов [10], и неотрицательность массовых долей компонентов смеси [11].

Цель настоящей статьи — обобщить методику “кабаре”, впервые представленную А. А. Самарским и В. М. Головинским в работе [12] и успешно зарекомендовавшую себя на практике [13–17], на случай смесей идеальных газов и качественно сопоставить ее с другими алгоритмами, решающими те же задачи. Разностная схема “кабаре” обладает вторым порядком аппроксимации на гладких решениях и относится к классу схем, разрешающих ударные волны. Данный метод не использует настроечные параметры и алгоритмы, требующие априорных сведений о свойствах решения.

2. Уравнения движения.

2.1. Консервативная форма уравнений движения. Описываемая модель строится в следующих предположениях. Смесь состоит из N идеальных газов с постоянными удельными теплоемкостями и показателями адиабаты. Смесь находится в условиях, когда проскальзыванием ее отдельных компонентов можно пренебречь, что приводит к так называемой односкоростной модели. Кроме того, предполагается локальное термодинамическое равновесие, т.е. предполагается однотемпературность модели. Смесь существует в условиях отсутствия фазовых и химических превращений. Внешние силы, вязкость и диффузия отсутствуют.

В рамках указанных предположений система уравнений движения газовой смеси состоит из уравнения неразрывности для ее компонентов и законов сохранения импульса и энергии для смеси:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u}{\partial x} = 0, \quad f = \overline{1, N}; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho E + p)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ_f — плотности отдельных газовых компонентов смеси, u — скорость смеси, $\rho = \sum_{f=1}^N \rho_f$ — общая плотность газовой смеси, p — давление смеси, E — полная энергия единицы массы смеси.

Давление смеси задается суммой парциальных давлений ее компонентов (закон Дальтона):

$$p = \sum_{f=1}^N p_f, \quad p_f = \rho_f e_f (\gamma_f - 1), \quad (2)$$

¹ Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: bass-4@yandex.ru

² Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Большая Тульская ул., д. 52, 115191, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

где p_f , e_f и γ_f — парциальное давление, внутренняя энергия и показатель адиабаты отдельных компонентов смеси соответственно. Определим внутреннюю энергию единицы массы смеси:

$$e = \frac{1}{\rho} \sum_{f=1}^N e_f \rho_f. \quad (3)$$

Далее введем локальный эффективный показатель адиабаты

$$\bar{\gamma} = \frac{\sum_{f=1}^N \gamma_f C_f \rho_f}{\sum_{f=1}^N C_f \rho_f}, \quad (4)$$

где C_f — удельные теплоемкости при постоянном объеме отдельных газовых компонентов.

Давление смеси (2) представим следующим образом:

$$p = \sum_{f=1}^N (\gamma_f - 1) e_f \rho_f = \sum_{f=1}^N \gamma_f e_f \rho_f - \sum_{i=1}^N e_i \rho_i. \quad (5)$$

Выразим первый член в правой части выражения (5) через эффективный показатель адиабаты (4) и внутреннюю энергию каждого компонента смеси ($e_f = C_f T$, где T — локальная температура смеси):

$$\sum_{f=1}^N \gamma_f e_f \rho_f = \sum_{f=1}^N \gamma_f C_f \rho_f T = \bar{\gamma} \sum_{f=1}^N C_f \rho_f T = \bar{\gamma} \sum_{f=1}^N e_f \rho_f.$$

Затем выразим второй член в правой части выражения (5) через определение внутренней энергии смеси (3): $\sum_{f=1}^N e_f \rho_f = e \rho$. Окончательно получим $\sum_{f=1}^N \gamma_f e_f \rho_f = \bar{\gamma} e \rho$.

Подставив полученные выражения в (5), выпишем выражение для давления газа через эффективные параметры смеси:

$$p = (\bar{\gamma} - 1) e \rho. \quad (6)$$

Полная удельная энергия среды имеет вид

$$E = e + \frac{u^2}{2}. \quad (7)$$

2.2. Характеристическая форма уравнений движения. Система уравнений (1) является гиперболической, что позволяет преобразовать ее к характеристическому виду:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \lambda_+ \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda_- \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \xi_f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \xi_f}{\partial x} = 0, \quad f = \overline{1, N-1}.$$

Здесь $\lambda_+ = u + c$; $\lambda_- = u - c$; $\lambda = u$ — характеристические скорости; $c = \sqrt{\frac{\bar{\gamma} p}{\rho}}$ — скорость звука;

$\partial R = \partial u + \frac{\partial p}{\rho c}$, $\partial Q = \partial u - \frac{\partial p}{\rho c}$ и $\partial S = \partial p - \bar{\gamma} \partial \rho$ — частные дифференциалы инвариантов движения R , Q и S , являющихся аналогами инвариантов Римана для уравнений газовой динамики однокомпонентного газа. В систему инвариантов добавим массовые доли отдельных компонентов смеси:

$$\xi_f = \frac{\rho_f}{\rho}, \quad f = \overline{1, N-1}. \quad (8)$$

Система полностью определена при использовании $N - 1$ уравнения на перенос ξ_f , так как содержание оставшегося компонента находится из естественного условия нормировки $\sum_{f=1}^N \xi_f = 1$: $\xi_N = 1 - \sum_{f=1}^{N-1} \xi_f$.

Инварианты R , Q и S выражаются следующим образом:

$$R = u + \int \frac{dp}{\rho c}; \quad Q = u - \int \frac{dp}{\rho c}; \quad S = \ln \frac{p}{\rho^{\bar{\gamma}}}. \quad (9)$$

В общем случае получить аналитические выражения для инвариантов R и Q невозможно, поэтому в рамках нашей работы предполагается, что интеграл в правой части выражений (9) вычисляется для случая локальной изэнтропичности $\rho = \left(\frac{p}{\exp S}\right)^{1/\bar{\gamma}}$:

$$\int_0^p \frac{dp}{\rho c} = G p^\mu, \quad G = \frac{2\sqrt{\bar{\gamma}}}{(\bar{\gamma} - 1)} (\exp S)^{1/(2\bar{\gamma})}, \quad \mu = \frac{(\bar{\gamma} - 1)}{2\bar{\gamma}}.$$

3. Численный алгоритм.

3.1. Расчетная область и сетка. Расчетная область — отрезок $[0, L]$.

На отрезке введена сетка, заданная узловыми точками x_i : $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = L$. Узловые точки разбивают расчетную область на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$. Шаги сетки: $h_{x_{i+1/2}} = x_{i+1} - x_i$. Узловым точкам соответствуют потоковые переменные, а центрам расчетных ячеек — консервативные; первые обозначаются целыми нижними индексами i , вторые — полуцелыми $i + 1/2$. Схема оперирует тремя временными слоями: начальным n , полуцелым $n + 1/2$ и новым $n + 1$. Вычислительный шаблон алгоритма приведен на рис. 1.

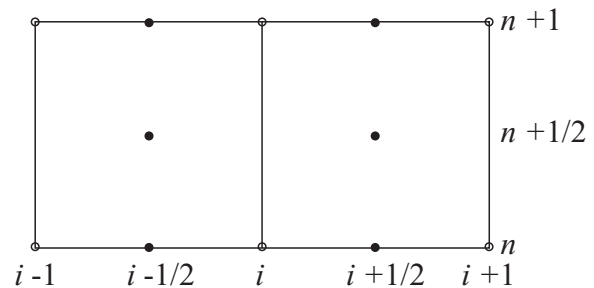


Рис. 1. Вычислительный шаблон схемы “кабаре”

3.2. Задание начальных данных. В качестве

глобальных физических констант задаются показатели адиабаты γ_f и удельные теплоемкости C_f компонентов смеси. В начальный момент времени задаются консервативные и потоковые переменные — плотность компонентов смеси ρ_f , скорость u и давление p . Из заданных величин через соотношения (6) и (7) определяется полная энергия E .

3.3. Временной шаг. При расчете нового временного слоя шаг по времени определяется исходя из нескольких требований.

Условие устойчивости Куранта (Courant–Friedrichs–Lewy condition):

$$\tau_{\text{CFL}} = \text{CFL} \min_{i=1, N} \frac{h_{x_{i+1/2}}}{|u_{i+1/2}^n| + c_{i+1/2}^n},$$

где CFL — число Куранта.

Условие на неотрицательность плотностей газовых компонентов:

$$\tau_\rho = \min_{f=1, N} \min_{i=1, N} \frac{\rho_{f_{i+1/2}}^n}{F_{i+1/2}^n}, \quad F_{i+1/2}^n > 0, \quad \rho_{f_{i+1/2}}^n > 0,$$

$$\text{где } F_{i+1/2}^n = \frac{\{\rho_f u\}_{i+1}^n - \{\rho_f u\}_i^n}{h_{x_{i+1/2}}}.$$

Условие на импульс:

$$\tau_{\rho u} = \min_{i=1, N} \left| \frac{\{\rho u\}_{i+1/2}^n}{W_{i+1/2}^n} \right|, \quad W_{i+1/2}^n \neq 0, \quad \{\rho u\}_{i+1/2}^n \neq 0,$$

$$\text{где } W_{i+1/2}^n = \frac{\{\rho u^2\}_{i+1}^n - \{\rho u^2\}_i^n}{h_{x_{i+1/2}}}.$$

Окончательный шаг по времени выбирается следующим образом: $\tau = \min(\tau_{\text{CFL}}, \tau_\rho, \tau_{\rho u})$.

3.4. Первый шаг алгоритма. Численный алгоритм разбит на три последовательных шага. На первом шаге происходит вычисление консервативных физических переменных на полуцелом временном

слое. На втором шаге производится переход в пространство характеристик, их экстраполяция на новый временной слой и коррекция в соответствии с принципом максимума с последующей реконструкцией физических потоковых величин. На третьем шаге производится расчет консервативных физических величин на новом временном слое.

Дискретизация уравнений неразрывности на первом шаге алгоритма:

$$\frac{[\rho_f^{n+1/2} - \rho_f^n]_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\{\rho_f u\}_{i+1}^n - \{\rho_f u\}_i^n}{h_{xi+1/2}} = 0, \quad f = \overline{1, N}.$$

Общая плотность смеси: $\rho_{i+1/2}^{n+1/2} = \sum_{f=1}^N \rho_{fi+1/2}^{n+1/2}$.

Дискретизация закона сохранения импульса смеси:

$$\frac{[\{\rho u\}^{n+1/2} - \{\rho u\}^n]_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\{\rho u^2\}_{i+1}^n - \{\rho u^2\}_i^n}{h_{xi+1/2}} + \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h_{xi+1/2}} = 0.$$

Дискретизация уравнения переноса полной энергии смеси:

$$\frac{[\{\rho E\}^{n+1/2} - \{\rho E\}^n]_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\{u(\rho E + p)\}_{i+1}^n - \{u(\rho E + p)\}_i^n}{h_{xi+1/2}} = 0.$$

3.5. Второй шаг алгоритма. На втором шаге при помощи изложенного ниже безытерационного характеристического подхода вычисляются потоковые переменные на новом временном слое. Для расчетной пространственно-временной ячейки $[x_i, x_{i+1}] \times [t_n, t_{n+1}]$ характеристические скорости считаются постоянными и определяются следующим образом:

$$\lambda_{+i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n+1/2} + c_{i+1/2}^{n+1/2}; \quad \lambda_{-i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n+1/2} - c_{i+1/2}^{n+1/2}; \quad \lambda_{i+1/2}^{n+1/2} = u_{i+1/2}^{n+1/2}.$$

Здесь $c_{i+1/2}^{n+1/2} = \left\{ \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \right\}_{i+1/2}^{n+1/2}$ – скорость звука на полуцелом временном слое.

Кроме характеристических скоростей в центрах ячеек определяются скорости на гранях ячеек:

$$\lambda_{+i}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\lambda_{+i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{+i+1/2}^{n+1/2}); \quad \lambda_{-i}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\lambda_{-i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{-i+1/2}^{n+1/2}); \quad \lambda_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\lambda_{i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{i+1/2}^{n+1/2}).$$

Теперь для каждой характеристики, приходящей на грань ячейки, по знаку соответствующей характеристической скорости можно определить, с какой стороны она приходит. Рассмотрим алгоритм вычисления некоторого инварианта, приходящего на грань i слева, из ячейки $i - 1/2$.

В ячейке $i - 1/2$ в точках $(i - 1, n)$, $(i - 1/2, n)$, (i, n) , $(i - 1, n + 1/2)$ вычисляются вспомогательные величины $\bar{\gamma}$, ξ_f и инварианты R , Q , S по формулам (4), (8) и (9) соответственно, причем при вычислении инвариантов R и Q во всех точках в рамках одной вычислительной ячейки предполагается, что величина G постоянна во всей ячейке и равна значению на полуцелом временном слое:

$$G = G_{i+1/2}^{n+1/2} = \left[\frac{2\sqrt{\bar{\gamma}}}{\bar{\gamma} - 1} (\exp S)^{1/(2\bar{\gamma})} \right]_{i+1/2}^{n+1/2}.$$

Вычисление инварианта производится по формуле: $(I_i^{n+1})^* = 2I_{i-1/2}^{n+1/2} - I_{i-1}^n$.

Далее производится коррекция вычисленных инвариантов на $n + 1$ временном слое:

$$(I_i^{n+1}) = \begin{cases} m, & (I_i^{n+1})^* \leq m; \\ M, & (I_i^{n+1})^* \geq M; \\ (I_i^{n+1})^*, & (I_i^{n+1})^* \in (m, M); \end{cases} \quad \text{где } m = \min(I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^{n+1/2}, I_i^n); \quad M = \max(I_{i-1}^n, I_{i-1/2}^{n+1/2}, I_i^n).$$

Аналогично вычисляются значения инвариантов, характеристические скорости для которых отрицательны. Такие инварианты рассчитываются в правой ячейке $i + 1/2$: $(I_i^{n+1})^* = 2I_{i+1/2}^{n+1/2} - I_{i+1}^n$;

$$(I_i^{n+1}) = \begin{cases} m, & (I_i^{n+1})^* \leq m; \\ M, & (I_i^{n+1})^* \geq M; \\ (I_i^{n+1})^*, & (I_i^{n+1})^* \in (m, M); \end{cases} \quad \text{где } m = \min(I_i^n, I_{i+1/2}^{n+1/2}, I_{i+1}^n); \quad M = \max(I_i^n, I_{i+1/2}^{n+1/2}, I_{i+1}^n).$$

После того как на грани i вычислены все инварианты для нового слоя по времени t^{n+1} , можно восстановить значения новых потоковых газодинамических переменных.

Вычислим величины G_Q и G_R , необходимые для расчета потоковых значений давления и скорости:

$$G_R = \begin{cases} G_{i+1/2}^{n-1/2}, & \lambda_{+i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{+i+1/2}^{n+1/2} \geq 0; \\ G_{i+1/2}^{n+1/2}, & \lambda_{+i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{+i+1/2}^{n+1/2} < 0; \end{cases} \quad G_Q = \begin{cases} G_{i+1/2}^{n-1/2}, & \lambda_{-i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{-i+1/2}^{n+1/2} \geq 0; \\ G_{i+1/2}^{n+1/2}, & \lambda_{-i-1/2}^{n+1/2} + \lambda_{-i+1/2}^{n+1/2} < 0. \end{cases}$$

По полученным значениям инвариантов $\xi_{f, f=\overline{1, N-1}}$ рассчитывается значение ξ_N : $\xi_N^{n+1} = 1 - \sum_{f=1}^{N-1} \xi_f^{n+1}$.

Из значений $\{\xi_f\}_i^{n+1}$ вычисляем средний показатель адиабаты $\bar{\gamma}_i^{n+1}$ и величину μ_i^{n+1} :

$$\bar{\gamma}_i^{n+1} = \frac{\sum_{f=1}^N \gamma_f C_f \xi_f^{n+1}}{\sum_{f=1}^N C_f \xi_f^{n+1}}, \quad \mu_i^{n+1} = \left(\frac{\bar{\gamma} - 1}{2\bar{\gamma}} \right)_i^{n+1}.$$

Перейдем к непосредственному вычислению потоковых величин на $n+1$ временном слое.

$$\text{Давление: } p_i^{n+1} = \left(\frac{R_i^{n+1} - Q_i^{n+1}}{G_R + G_Q} \right)^{1/(\mu_i^{n+1})}.$$

$$\text{Скорость: } u_i^{n+1} = \frac{G_R Q_i^{n+1} + G_Q R_i^{n+1}}{G_R + G_Q}.$$

$$\text{Суммарная плотность: } \rho_i^{n+1} = \left(\frac{p_i^{n+1}}{\exp S_i^{n+1}} \right)^{1/(\bar{\gamma}_i^{n+1})}.$$

$$\text{Плотности отдельных газовых компонентов: } \rho_{fi}^{n+1} = \rho_i^{n+1} \xi_f^{n+1}, \quad f = \overline{1, N}.$$

$$\text{Полная энергия: } E_i^{n+1} = \frac{p_i^{n+1}}{(\bar{\gamma}_i^{n+1} - 1) \rho_i^{n+1}} + \frac{(u_i^{n+1})^2}{2}.$$

Следует также отметить, что если в соседних ячейках присутствуют до- и сверхзвуковые течения, описанный выше алгоритм выбора направления переноса инвариантов дает неудовлетворительные результаты. В этом случае требуется использовать более сложные алгоритмы (например, описанные в работе [17]).

3.6. Третий шаг. На третьем шаге по известным значениям на полуцелом слое и вычисленным потоковым значениям на новом слое определяются значения консервативных переменных на новом слое t^{n+1} . Из уравнения неразрывности находят плотности каждого из газовых компонентов:

$$\frac{[\rho_f^{n+1} - \rho_f^{n+1/2}]_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\{\rho_f u\}_{i+1}^{n+1} - \{\rho_f u\}_i^{n+1}}{h_{xi+1/2}} = 0, \quad f = \overline{1, N}.$$

$$\text{Плотность смеси: } \rho_{i+1/2}^{n+1} = \sum_{f=1}^N \rho_{fi+1/2}^{n+1}.$$

Из закона сохранения импульса смеси вычисляется скорость:

$$\frac{[\{\rho u\}^{n+1} - \{\rho u\}^{n+1/2}]_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\{\rho u^2\}_{i+1}^{n+1} - \{\rho u^2\}_i^{n+1}}{h_{xi+1/2}} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{h_{xi+1/2}} = 0.$$

Из уравнения баланса энергии вычисляется полная энергия смеси:

$$\frac{[\{\rho E\}^{n+1} - \{\rho E\}^{n+1/2}]_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\{u(\rho E + p)\}_{i+1}^{n+1} - \{u(\rho E + p)\}_i^{n+1}}{h_{xi+1/2}} = 0.$$

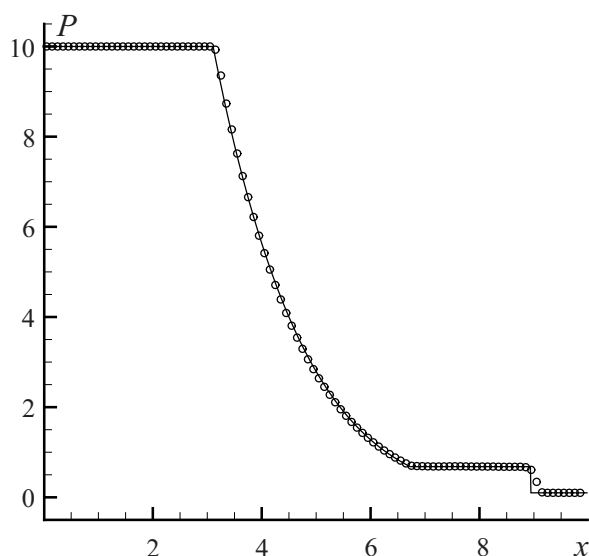


Рис. 2. Распределение давления на момент времени $t = 1.6$, $NX = 100$, $CFL = 0.3$

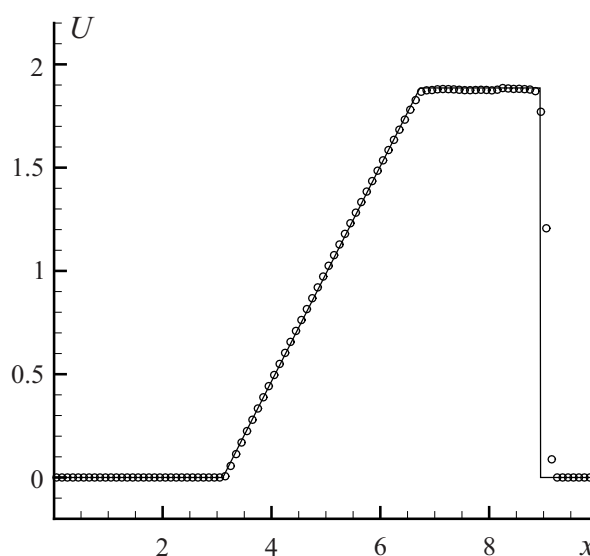


Рис. 3. Распределение скорости на момент времени $t = 1.6$, $NX = 100$, $CFL = 0.3$

4. Численные эксперименты. Распад разрыва. Рассматривается задача о распаде разрыва с двумя различными газами по разные стороны от разрыва. Расчетная область — отрезок $x \in [0; 10]$. В точке $x = 5$ располагается разрыв начальных данных. Слева от разрыва идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma_l = 1.4$, давлением $p_l = 10$, скоростью $u_l = 0$, плотностью $\rho_l = 10$. Справа от разрыва идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma_r = 1.2$, давлением $p_r = 0.1$, скоростью $u_r = 0$, плотностью $\rho_r = 0.125$. Рассматривается численное решение на момент времени $t = 1.6$, производится его сравнение с аналитическим. Расчетная сетка NX состоит из 100 ячеек, число Куранта CFL равно 0.3. Результаты данного теста представлены на рис. 2–4. На рис. 2 и 3 кружками обозначены результаты численного эксперимента, сплошной линией — аналитическое решение. На рис. 4 плотность газа, первоначально находящегося слева от разрыва, обозначена кружками; плотность газа, находящегося справа, — треугольниками; аналитическое решение для газов слева и справа от первоначального разрыва — штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно.

Анализ численного решения показывает, что предложенный алгоритм сохранил основные свойства схем, построенных по методике “кабаре” [16]: возможность счета сильных разрывов в начальных данных, разрешение ударных волн двумя расчетными ячейками и точное воспроизведение волн разрежения. Показано, что контактный разрыв на границе раздела двух газов разрешается 7 расчетными ячейками. Неотрицательность массовых долей газовых компонентов смеси достигается за счет процедуры нелинейной коррекции потоков и специального условия на шаг по времени. Осцилляции давления и скорости на контактном разрыве имеют в приведенном тесте достаточно умеренный характер. Эти результаты качественно соответствуют приведенным в работе [1], полученным при помощи алгоритма 5-го порядка точности.

В качестве дополнительных тестов по нашему алгоритму были также успешно рассчитаны задачи о переносе контактного разрыва, приведенные в [1] и [4], а также модификации задачи Сода для многокомпонентной смеси, приведенные в [4]. Результаты этих расчетов не приведены в виду сжатости формата настоящей публикации.

5. Заключение. Предложен алгоритм для численного решения одномерных уравнений движения смеси идеальных газов на основе методики “кабаре”. При сопоставлении численного и аналитического ре-

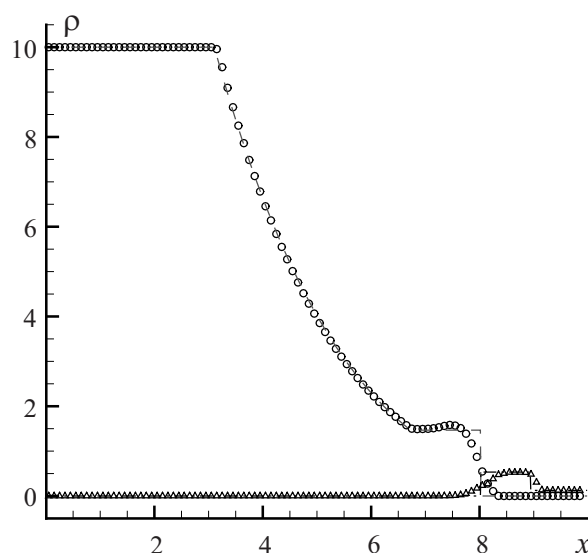


Рис. 4. Распределение плотностей на момент времени $t = 1.6$, $NX = 100$, $CFL = 0.3$

шений задачи о распаде разрыва показано, что характер течения при решении задачи о распаде разрыва передается точно. На ударной волне и волне разрежения характер решения полностью повторяет таковой для оригинального однокомпонентного алгоритма “кабаре”. Качество решения на контактном разрыве между двумя различными газами не уступает прочим алгоритмам для многокомпонентной газовой смеси. Все вышеизложенное демонстрирует перспективность обобщения предложенного одномерного алгоритма на случаи двух и трех пространственных измерений с дискретизацией уравнений движения на неструктурированных тетрагональных и гексаэдральных сетках соответственно (подобно обобщению, приведенному в работе [17]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johnsen E., Colonius T.* Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems // *Journal of Computational Physics*. 2006. **219**, N 2. 715–732.
2. *Coralic V., Colonius T.* Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multicomponent flows // *Journal of Computational Physics*. 2014. **274**. 95–121.
3. *Igra D., Takayama K.* A high resolution upwind scheme for multi-component flows // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002. **38**, N 10. 985–1007.
4. *Abgrall R., Karni S.* Computations of Compressible Multifluids // *Journal of Computational Physics*. 2001. **169**. 594–623.
5. *Cocchi J.-P., Saurel R.* A Riemann problem based method for the resolution of compressible multimaterial flows // *Journal of Computational Physics*. 1997. **137**. 265–298.
6. *Cocchi J.-P., Saurel R., Loraud J.C.* Treatment of interface problems with Godunov-type schemes // *Shock Waves*. 1996. **5**, N 6. 347–357.
7. *Saurel R., Abgrall R.* A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase Flows // *Journal of Computational Physics*. 1999. **150**, N 2. 425–467.
8. *Суров В.С., Степаненко Е.Н.* Сеточный метод характеристик для расчета течений односкоростной многокомпонентной теплопроводной среды // *Вестник Челябинского государственного университета. Физика. Вып. 8*. 2010. 15–22.
9. *Суров В.С.* Метод характеристик для расчета течений односкоростных гетерогенных смесей в лагранжевых переменных // *Математическое моделирование*. 2003. **15**, № 5. 37–46.
10. *Abgrall R.* How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi conservative approach // *Journal of Computational Physics*. 1996. **125**, N 1. 150–160.
11. *Larrouturou B.* How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows // *Journal of Computational Physics*. 1991. **95**, N 1. 59–84.
12. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Некоторые свойства разностной схемы “кабаре” // *Математическое моделирование*. 1998. **10**, № 1. 101–116.
13. *Головизнин В.М., Карабасов С.А.* Нелинейная коррекция схемы “кабаре” // *Математическое моделирование*. 1998. **10**, № 12. 107–123.
14. *Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М.* Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // *Математическое моделирование*. 2003. **15**, № 9. 29–48.
15. *Головизнин В.М.* Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // *Математическое моделирование*. 2006. **18**, № 11. 14–30.
16. *Karabasov S.A., Goloviznin V.M.* Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // *Journal of Computational Physics*. 2009. **228**, N 19. 7426–7451.
17. *Кондаков В.Г.* Обобщение схемы “кабаре” на многомерные уравнения задач газовой динамики. Канд. дис. М.: МГУ, 2014.

Поступила в редакцию
26.11.2014

A Modification of the CABARET Scheme for the Computation of Multicomponent Gaseous Flows

A. V. Danilin¹ and A. V. Solovjev²

¹ *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Junior Scientist, e-mail: bass-4@yandex.ru*

² *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences; ulitsa Bol'shaya Tul'skaya 52, Moscow, 115191, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru*

Received November 26, 2014

Abstract: An explicit numerical algorithm for computing one-dimensional motion of multicomponent gaseous mixtures is proposed. A physical model and the equations of motion are presented in conservative and characteristic forms. The discretization of the governing equations is made in accordance with the CABARET (Compact Accurately Boundary Adjusting-REsolution Technique) approach. The proposed algorithm is tested on the Riemann problem with different gases on the different sides of the initial discontinuity. The resulting numerical solutions are compared with the analytical one and with those obtained by other numerical approaches. It is shown that the proposed algorithm is of high accuracy on the class of problems being considered.

Keywords: one-velocity multicomponent medium, systems of hyperbolic equations, CABARET scheme, computational fluid dynamics (CFD), finite volume methods.

References

1. E. Johnsen and T. Colonius, "Implementation of WENO Schemes in Compressible Multicomponent Flow Problems," *J. Comput. Phys.* **219** (2), 715–732 (2006).
2. V. Coralic and T. Colonius, "Finite-Volume WENO Scheme for Viscous Compressible Multicomponent Flows," *J. Comput. Phys.* **274**, 95–121 (2014).
3. D. Igra and K. Takayama, "A High Resolution Upwind Scheme for Multi-Component Flows," *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **38** (10), 985–1007 (2002).
4. R. Abgrall and S. Karni, "Computations of Compressible Multifluids," *J. Comput. Phys.* **169** (2), 594–623 (2001).
5. J.-P. Cocchi and R. Saurel, "A Riemann Problem Based Method for the Resolution of Compressible Multimaterial Flows," *J. Comput. Phys.* **137** (2), 265–298 (1997).
6. J.-P. Cocchi, R. Saurel, and J. C. Loraud, "Treatment of Interface Problems with Godunov-Type Schemes," *Shock Waves* **5** (6), 347–357 (1996).
7. R. Saurel and R. Abgrall, "A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows," *J. Comput. Phys.* **150** (2), 425–467 (1999).
8. V. S. Surov and E. N. Stepanenko, "The Grid Method of Characteristics for Calculating Flows of a Single-Velocity Multicomponent Heat-Conducting Medium," *Vestn. Chelyabinsk Univ., Ser. Fiz.*, No. 8, 15–22 (2010).
9. V. S. Surov, "Method of the Characteristics for Calculation of Currents of One-Speed Heterogeneous Mixtures in Lagrange Variables," *Mat. Model.* **15** (5), 37–46 (2003).
10. R. Abgrall, "How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations: A Quasi Conservative Approach," *J. Comput. Phys.* **125** (1), 150–160 (1996).
11. B. Larrouturou, "How to Preserve the Mass Fractions Positivity when Computing Compressible Multi-Component Flows," *J. Comput. Phys.* **95** (1), 59–84 (1991).
12. V. M. Goloviznin and A. A. Samarskii, "Some Characteristics of Finite Difference Scheme "Cabaret"," *Mat. Model.* **10** (1), 101–116 (1998).
13. V. M. Goloviznin and S. A. Karabasov, "Nonlinear Correction of Cabaret Scheme," *Mat. Model.* **10** (12), 107–123 (1998).
14. V. M. Goloviznin, S. A. Karabasov, and I. M. Kobrinskii, "Balance-Characteristic Schemes with Separated Conservative and Flux Variables," *Mat. Model.* **15** (9), 29–48 (2003).
15. V. M. Goloviznin, "Balanced Characteristic Method for 1D Systems of Hyperbolic Conservation Laws in Eulerian Representation," *Mat. Model.* **18** (11), 14–30 (2006).
16. S. A. Karabasov and V. M. Goloviznin, "Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics," *J. Comput. Phys.* **228** (19), 7426–7451 (2009).
17. V. G. Kondakov, *A Generalization of the "Cabaret" Scheme to Multidimensional Equations of Gas Dynamics*, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Moscow State Univ., Moscow, 2014).