УДК 517.948 doi 10.26089/NumMet.v16r101

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО АЛГОРИТМА, ОСНОВАННОГО НА ОБОБЩЕННОМ ПРИНЦИПЕ НЕВЯЗКИ, ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. П. Танана[1], А. И. Сидикова[2]

Исследован регуляризующий алгоритм приближенного решения интегральных уравнений первого рода, включающий в себя конечномерную аппроксимацию исходной задачи, а также получена оценка погрешности этого алгоритма. Для получения этой оценки доказана эквивалентность обобщенного метода невязки и обобщенного принципа невязки. Этот результат может быть положен в основу оценивания конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений.

Ключевые слова: регуляризация, обобщенный метод невязки, модуль непрерывности, оценка погрешности, некорректные задачи, интегральные уравнения, операторные уравнения, конечномерные аппроксимации.

Введение. Многие задачи математической физики, анализа и геофизики сводятся к интегральным уравнениям первого рода. Эти уравнения относятся к классу некорректно поставленных задач, теория которых в настоящее время интенсивно развивается. В работе [1] был предложен и обоснован обобщенный принцип невязки для решения уравнений с приближенно заданным оператором, который является обобщением известного принципа невязки для уравнений с точно заданным оператором [2, 3]. Это позволило учитывать ошибку дискретизации при решении задачи и использовано в [4] для доказательства сходимости конечно-разностных аппроксимаций регуляризованных решений интегральных уравнений. К настоящему моменту получено большое число результатов, посвященных доказательству сходимости конечномерных аппроксимаций к регуляризованному решению [5–8], а также исследованы обобщенный метод и принцип невязки применительно к решению нелинейных задач [9].

Однако наряду с решением вопроса о сходимости конечномерных аппроксимаций важную роль играет получение оценки их погрешности. Впервые такая оценка при достаточно больших значениях размерности аппроксимаций была получена в работе [10].

В настоящей статье на основе обобщенного принципа невязки получена оценка погрешности регуляризующего алгоритма, включающего в себя и конечномерные аппроксимации. Один из таких подходов к получению оценок может быть основан на использовании эквивалентности обобщенного принципа и обобщенного метода невязки [11].

1. Постановка задачи. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)\,ds = f(t), \quad c \leqslant t \leqslant d, \tag{1}$$

где $P(s,t) \in C([a,b]\times[c,d])$, $u(s) \in L_2[a,b]$, $f(t) \in L_2[c,d]$ и ядро оператора $P(s,t)$ замкнуто.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M, где

$$M = \bigl\{u(s) : u(s),\ u'(s) \in L_2[a,b],\ u(a) = 0\bigr\}, \tag{2}$$

а $u'(s)$ — производная $u(s)$ по s. Из замкнутости ядра $P(s,t)$ следует единственность решения $u_0(s)$ уравнения (1).

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны $f_\delta \in L_2[c,d]$ и $\delta > 0$, такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{L_2} < \delta.$$

[1] Южно-Уральский государственный университет, факультет вычислительной математики и информатики, просп. Ленина, д. 76, 454080, г. Челябинск; профессор, зав. кафедрой, e-mail: tvpa@susu.ac.ru
[2] Южно-Уральский государственный университет, факультет вычислительной математики и информатики, просп. Ленина, д. 76, 454080, г. Челябинск; доцент, e-mail: 7413604@mail.ru

Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M определить приближенное решение $u_\delta(s)$ и оценить его отклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int\limits_a^s v(\xi)\,d\xi, \quad v(s),\, Bv(s) \in L_2[a,b]. \tag{3}$$

Оператор C зададим следующим образом:

$$C\,v(s) = ABv(s), \quad v(s) \in L_2[a,b], \quad Cv(s) \in L_2[c,d]. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$Cv(s) = \int\limits_a^b K(s,t)v(s)\,ds, \tag{5}$$

где

$$K(s,t) = \int\limits_b^s P(\xi,t)\,d\xi. \tag{6}$$

Для численного решения уравнения (1) аппроксимируем оператор C конечномерным оператором C_n, для которого известна величина h_n, определяемая соотношением

$$\|C_n - C\| \leqslant h_n.$$

Для определения величины h_n введем функцию

$$N(t) = \max_{a\leqslant s\leqslant b} |P(s,t)|, \quad t \in [c,d]. \tag{7}$$

Так как $P(s,t) \in C([a,b]\times[c,d])$, то из (7) следует, что

$$N(t) \in C[c,d].$$

Для определения оператора C_n разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и введем функции $\overline{K}_i(t)$ и $K_n(s,t)$ по формулам

$$\overline{K}_i(t) = K(\bar{s}_i, t), \tag{8}$$

где

$$\bar{s}_i = \frac{s_i + s_{i+1}}{2}, \quad s_{i+1} = a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}, \quad s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i = 0,1,\ldots,n-1,$$

и

$$K_n(s,t) = \overline{K}_i(t), \quad s_i \leqslant s < s_{i+1}, \quad t \in [c,d], \quad i = 0,1,...,n-1. \tag{9}$$

Используя (9), определим конечномерный оператор C_n формулой

$$C_n v(s) = \int\limits_a^b K_n(s,t)v(s)ds, \quad t \in [c,d], \tag{10}$$

где C_n отображает пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$. Из (5)–(10) следует, что

$$\|C_n - C\| \leqslant \sqrt{d-c}\,\|N(t)\|_{L_2} H = h_n, \tag{11}$$

где $H = (b-a)/n$.

2. Обобщенный принцип невязки. Для решения уравнения (1) воспользуемся методом регуляризации А. Н. Тихонова нулевого порядка [12]:

$$\inf\left\{\|C_n v(s)-f_\delta(t)\|^2+\alpha\int\limits_a^b [v(s)]^2\,ds\;:\;v(s)\in L_2[a,b]\right\},\quad \alpha>0. \tag{12}$$

Из [5] следует существование и единственность решения $v^\alpha_{\delta h_n}(s)$ вариационной задачи (12).

Обозначим через $\overline{f}_{\delta,n}(t)$ функцию, являющуюся метрической проекцией $f_\delta(t)$ на множество значений $R(C_n)$ оператора C_n:

$$\overline{f}_{\delta,n}(t)=\mathrm{pr}\,[f_\delta(t);R(C_n)]. \tag{13}$$

Рассмотрим задачу

$$\inf\left\{\|C_n v(s)-\overline{f}_{\delta,n}(t)\|^2+\alpha\|v(s)\|^2\;:\;v(s)\in L_2[a,b]\right\}. \tag{14}$$

Лемма 1. *Вариационные задачи* (12) *и* (14) *эквивалентны.*

Доказательство очевидно.

Значение параметра регуляризации $\overline{\alpha}=\overline{\alpha}(C_n,f_\delta,h_n,\delta)$ в задаче (12) выберем из обобщенного принципа невязки [1]

$$\|C_n v^\alpha_{\delta h_n}(s)-\overline{f}_{\delta,n}(t)\|=\|v^\alpha_{\delta h_n}(s)\|h_n+\delta. \tag{15}$$

Известно, что при условии

$$\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\|>\delta+\|u_0'(s)\|h_n$$

существует единственное решение $\overline{\alpha}(C_n,f_\delta,h_n,\delta)$ уравнения (15).

Если решение $v^{\overline{\alpha}(C_n,f_\delta,h_n,\delta)}_{\delta h_n}(s)$ задачи (12), (15) обозначить через $v_{\delta h_n}(s)$, то приближенное решение $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) будет иметь вид

$$u_{\delta h_n}(s)=Bv_{\delta h_n}(s). \tag{16}$$

Из (8)–(10) следует, что

$$C_n v(s)=\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t)\int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} v(s)\,ds.$$

Так как

$$\int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} v(s)\,ds=\sqrt{H}\,v_i,$$

где

$$v_i=\frac{1}{\sqrt{H}}\int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} v(s)\,ds, \tag{17}$$

то

$$C_n v(s)=\sqrt{H}\,\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t)\;v_i. \tag{18}$$

Пусть $X_n\subset L_2[a,b]$ является подпространством кусочно-постоянных функций $\varphi(s)$:

$$\varphi(s)=\{c_i\;:\;s_i\leqslant s<s_{i+1},\ i=0,1,\dots,n-1\},\quad c_i=\mathrm{const}.$$

В качестве базиса, определяющего пространство X_n, рассмотрим систему $\{e_i\}$, $i=0,1,\dots,n-1$:

$$e_i(s)=\begin{cases}1\,, & s_i\leqslant s<s_{i+1};\\ 0\,, & s\notin[s_i,s_{i+1}),\quad i=0,1,\dots,n-1.\end{cases} \tag{19}$$

После нормировки система (19) примет вид

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{H}}, & s_i \leqslant s < s_{i+1}; \\ 0\ , & s \notin [s_i, s_{i+1}). \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть величины* v_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *определены формулой* (17). *Тогда для любой функции* $v(s) \in L_2[a, b]$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 \leqslant \int_a^b v^2(s)\, ds.$$

Доказательство. Имеет место оценка

$$\sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{H}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} v(s)\, ds \right)^2 \leqslant H \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{H} \int_{s_i}^{s_{i+1}} v^2(s)\, ds = \int_a^b v^2(s)\, ds.$$

Таким образом, лемма доказана.

Теперь наряду с задачей (12) рассмотрим задачу

$$\inf \left\{ \|C_n \hat{v}(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|\hat{v}(s)\|^2 \,:\, \hat{v}(s) \in X_n \right\}. \tag{20}$$

Из [5] следует существование и единственность решения $\hat{v}^\alpha_{\delta,n}$ задачи (20).

Теорема 1. *Вариационные задачи* (12) *и* (20) *эквивалентны.*

Доказательство. Так как $X_n \subset L_2[a, b]$, то

$$\inf\big\{ \|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|v(s)\|^2 \,:\, v(s) \in L_2[a, b] \big\} \leqslant \inf\big\{ \|C_n \hat{v}(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|\hat{v}(s)\|^2 \,:\, \hat{v}(s) \in X_n \big\}. \tag{21}$$

Положив $\hat{v}(s) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i \varphi_i(s) \in X_n$, получим равенство (18):

$$C_n \hat{v}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_i(t)\, v_i \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi_i(s)\, ds = \sqrt{H} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_i(t)\, v_i. \tag{22}$$

Из (18)–(22) следует, что для любого $v(s) \in L_2[a, b]$ справедливо равенство

$$\|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 = \|C_n \hat{v}(s) - f_\delta(t)\|^2. \tag{23}$$

Из леммы 2 следует, что для любого $v(s) \in L_2[a, b]$, положив $\hat{v}(s) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} v_j \varphi_j(s)$, получим

$$\alpha \|v(s)\|^2 \geqslant \alpha \sum_{j=0}^{n-1} v_j^2 = \alpha \|\hat{v}(s)\|^2. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что для любого $v(s) \in L_2[a, b]$ существует сумма $\hat{v}(s) \in X_n$, такая, что

$$\|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|v(s)\|^2 \geqslant \|C_n \hat{v}(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|\hat{v}(s)\|^2.$$

Поэтому

$$\inf\{ \|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|v(s)\|^2 \,:\, v(s) \in L_2[a, b] \} \geqslant \inf\{ \|C_n \hat{v}(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|\hat{v}(s)\|^2 \,:\, \hat{v}(s) \in X_n \}, \tag{25}$$

а из (21) и (25) следует, что

$$\inf\{ \|C_n v(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|v(s)\|^2 \,:\, v(s) \in L_2[a, b] \} = \inf\{ \|C_n \hat{v}(s) - f_\delta(t)\|^2 + \alpha \|\hat{v}(s)\|^2 \,:\, \hat{v}(s) \in X_n \}. \tag{26}$$

Так как решения задач (12) и (20) единственны, то из (26) следует эквивалентность этих задач. Тем самым теорема доказана.

Для сведения задачи (20) к системе линейных алгебраических уравнений рассмотрим задачу

$$\inf\left\{\int\limits_c^d \left[\sqrt{H}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t)v_i - f_\delta(t)\right]^2 dt + \alpha\sum_{j=0}^{n-1} v_j^2 \,:\, (v_j)\in\mathbb{R}^n\right\}. \tag{27}$$

Из [5] следует, что для любого $\alpha > 0$ существует единственное решение $(\overline{v}_i^\alpha) \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, задача (27) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$H\sum_{i=0}^{n-1} b_{ij}v_i + \alpha v_j = g_j; \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{28}$$

где $b_{ij} = \displaystyle\int_c^d \overline{K}_i(t)\overline{K}_j(t)\,dt$ и $g_j = \sqrt{H}\displaystyle\int_c^d \overline{K}_j(t)f_\delta(t)\,dt$.

Теорема 2. *Пусть* $v_{\delta,n}^\alpha(s)$ *и* $(\overline{v}_i^\alpha)$ *— решения задач* (20) *и* (27) *соответственно. Тогда эти решения связаны соотношением*

$$\hat{v}_{\delta,n}^\alpha(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{v}_i^\alpha \varphi_i(s). \tag{29}$$

Доказательство следует из формул (17) и (18), а также из существования и единственности решений задач (20) и (27), доказанных в работе [5].

Так как из теорем 1 и 2 следует, что вариационная задача (12) может быть с помощью формулы (29) сведена к системе линейных алгебраических уравнений (28), то, решив последнюю, получим $(\overline{v}_i^\alpha) \in \mathbb{R}^n$. Тогда для определения параметра регуляризации $\overline{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)$ в этом решении воспользуемся уравнением (15), которое с помощью (29) сведем к уравнению

$$\left\{\int\limits_c^d \left[\sqrt{H}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t)\overline{v}_i^\alpha - \overline{f}_{\delta,n}(t)\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=0}^{n-1}(\overline{v}_i^\alpha)^2\right]^{\frac{1}{2}} h_n + \delta. \tag{30}$$

Если $\|\overline{f}_{\delta,n}\| > \delta + \|u_0'(s)\|h_n$, то существует единственное решение $\overline{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)$ уравнения (30).

Окончательно приближенное решение $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) будет иметь вид

$$u_{\delta,h_n}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{v}_i^{\overline{\alpha}} B\varphi_i(s),$$

где $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(C_n, f_\delta, h_n, \delta)$.

3. Оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta h_n}(s)$ **уравнения** (1)**.** Рассмотрим две вариационные задачи, приведенные в [11, 13]:

$$\inf\left\{\|v(s)\|^2 \,:\, v(s)\in L_2[a,b],\ \|C_n v(s) - \overline{f}_{\delta,n}(t)\| \leqslant \delta + \|v(s)\|\ h_n\right\} \tag{31}$$

и

$$\inf\left\{\|v(s)\|^2 \,:\, v(s)\in L_2[a,b],\ \|C_n v(s) - \overline{f}_{\delta,n}(t)\| \leqslant \delta + \tau h_n\right\}, \tag{32}$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant \dfrac{\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\| - \delta}{h_n}$.

Из теоремы, доказанной в [5], следует, что выполнение условия

$$\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\| > \delta + \tau h_n$$

влечет существование и единственность решения $v_{\delta h_n}^\tau(s)$ вариационной задачи (32).

Теперь запишем уравнение относительно τ:

$$\|v^{\tau}_{\delta h_n}(s)\| = \tau. \tag{33}$$

Теорема 3. *Пусть*

$$\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\| > \delta + \|u_0^{'}(s)\|\ h_n.$$

Тогда вариационная задача (31) *эквивалентна задаче* (32), (33).

Эта теорема является следствием известной теоремы 1 из книги [14, с. 83–84].

Теорема 4. *Пусть*

$$\|\overline{f}_{\delta,n}(t)\| > \delta + \|u_0^{'}(s)\|\ h_n.$$

Тогда вариационная задача (31) *эквивалентна задаче* (14) *с параметром* α*, выбранным из уравнения* (15).

Эта теорема является следствием известной теоремы 1 из книги [14, с. 86–87].

Перейдем к оценке отклонения $\|u_{\delta h_n} - u_0\|_{L_2}$ приближенного решения $u_{\delta h_n}(s)$ уравнения (1) от его точного решения в метрике $L_2[a,b]$. Для этого используем функции $\omega_1(\sigma,r)$ и $\omega(\sigma,r)$, заданные формулами

$$\omega_1(\sigma,r) = \sup_{u,\overline{u}}\{\|u(s)-\overline{u}(s)\|_{L_2}\ :\ u(s),\overline{u}(s) \in M_r,\ \|Au(s) - A\overline{u}(s)\| \leqslant \sigma\},$$

$$\omega(\sigma,r) = \sup_{u}\{\|u(s)\|_{L_2}\ :\ u(s) \in M_r,\ \|Au(s)\| \leqslant \sigma\},$$

где оператор A определен формулой (1), $M_r = B\overline{S}_r$, $\overline{S}_r = \{v(s)\ :\ v(s) \in L_2[a,b],\ \|v(s)\| \leqslant r\}$, оператор B определен формулой (3), а $\sigma, r > 0$.

Из теоремы, доказанной в [15], следует, что

$$\omega_1(\sigma,r) = \omega(\sigma,2r). \tag{34}$$

Теорема 5. *Пусть* $u_0(s) \in M$*, а* $u_{\delta h_n}(s)$ *определена формулой* (16) *и* $\|\overline{f}_{\delta,n}\| > \delta + \|u_0^{'}(s)\|\, h_n$*. Тогда существует число* $r > 0$*, такое, что*

$$\|u_{\delta h_n}(s) - u_0(s)\|_{L_2} \leqslant 2\omega(\delta + 2r\ h_n, r).$$

Доказательство. Так как $u_0(s) \in M$, то из (2) следует существование числа $r > 0$, такого, что

$$u_0(s) \in B\overline{S}_r. \tag{35}$$

Из теоремы 4 следует существование приближенного решения

$$u_{\delta h_n}(s) = Bv_{\delta h_n}(s), \tag{36}$$

в котором $v_{\delta h_n}$ является решением вариационной задачи (31), т.е.

$$\|v_{\delta h_n}\|^2 = \inf\{\|v(s)\|^2\ :\ v(s) \in L_2[a,b],\ \|C_n v(s) - \overline{f}_{\delta,h_n}(t)\| \leqslant \delta + \|v\|\ h_n\}. \tag{37}$$

Поскольку $u_0 \in BS_r$, то

$$\|C_n v_0 - f_\delta\| \leqslant \|C_n v_0 - Cv_0 + Cv_0 - f_\delta\| \leqslant \|C_n v_0 - Cv_0\| + \|Cv_0 - f_\delta\|,$$

где $v_0 = B^{-1}u_0$ и $Cv_0 = ABv_0$. Поэтому

$$\|C_n v_0 - f_\delta\| \leqslant \delta + \|v_0\|\ h_n$$

и

$$\|C_n v_0 - \overline{f}_{\delta,n}\| \leqslant \delta + \|v_0\|\ h_n. \tag{38}$$

Из (37) и (38) получим

$$\|v_{\delta,h_n}\| \leqslant \|v_0\|. \tag{39}$$

Из (35), (36) и (39) следует, что

$$u_{\delta h_n}(s) \in BS_r = M_r. \tag{40}$$

Теперь оценим величину $\|Au_{\delta h_n} - Au_0\|$:

$$\|Au_{\delta h_n} - Au_0\| \leqslant \|Au_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\| + \|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\|.$$

Так как

$$\|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\| = \|Cv_0 - \overline{f}_{\delta,n}\| \leqslant \|Cv_0 - C_n v_0\| + \|C_n v_0 - \overline{f}_{\delta,n}\|,$$

то из (38) следует, что

$$\|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\| \leqslant \delta + 2\|v_0\|\ h_n,$$

или с учетом (35)

$$\|Au_0 - \overline{f}_{\delta,n}\| \leqslant \delta + 2rh_n. \tag{41}$$

Аналогично,

$$\|Au_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\| \leqslant \|Cv_{\delta h_n} - C_n v_{\delta h_n}\| + \|C_n v_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\|.$$

Из (31), (13) и (39) ясно, что

$$\|C_n v_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\| \leqslant \delta + r\ h_n, \tag{42}$$

а из (39) и (11), что

$$\|Cv_{\delta h_n} - C_n v_{\delta h_n}\| \leqslant rh_n. \tag{43}$$

Таким образом, формулы (42) и (43) дают

$$\|Au_{\delta h_n} - \overline{f}_{\delta,n}\| \leqslant \delta + 2rh_n. \tag{44}$$

Из (41) и (44) следует, что

$$\|Au_{\delta h_n} - Au_0\| \leqslant 2\delta + 4rh_n. \tag{45}$$

Из (35), (40) и (45) получаем

$$\|u_{\delta h_n} - u_0\| \leqslant \omega_1(2\delta + 4rh_n, r), \tag{46}$$

а из (34) и (46) имеем неравенство

$$\|u_{\delta h_n} - u_0\| \leqslant \omega(2[\delta + 2rh_n], 2r).$$

Используя известное свойство функции $\omega(\sigma, r)$, приведенное в [13, с. 12], окончательно получим, что

$$\|u_{\delta h_n} - u_0\| \leqslant 2\omega(\delta + 2rh_n, r).$$

Тем самым теорема доказана.

Заключение. В настоящей статье рассмотрен численный алгоритм решения интегральных уравнений первого рода в пространствах L_2. Этот алгоритм использует метод регуляризации Тихонова с параметром, выбранным из обобщенного принципа невязки. Кроме того, алгоритм учитывает дискретизацию интегрального уравнения по одной из переменных. Это позволяет свести интегральное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений, зависящих от параметра, определяемого трансцендентным уравнением. Получены оценки погрешности этого алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. **13**, № 2. 294–302.
2. *Морозов В.А.* О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1966. **6**, № 1. 170–175.

3. *Морозов В.А.* О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1968. **8**, № 2. 295–309.
4. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1974. **14**, № 1. 15–24.
5. *Васин В.В., Танана В.П.* Приближенное решение операторных уравнений первого рода // Мат. зап. Уральск. универ. 1968. **6**, № 2. 27–37.
6. *Танана В.П.* Проекционные методы и конечно-разностная аппроксимация линейных некорректных задач // Сиб. мат. журн. 1975. **16**, № 6. 1301–1307.
7. *Васин В.В.* Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1979. **19**, № 1. 11–21.
8. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974.
9. *Леонов А.С.* О связи метода обобщенной невязки и обобщенного принципа невязки для нелинейных некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1982. **22**, № 4. 783–790.
10. *Данилин А.Р.* Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1985. **25**, № 8. 1123–1130.
11. *Танана В.П.* Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором // Докл. АН СССР. 1975. **224**, № 5. 1028–1029.
12. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. **151**, № 3. 501–504.
13. *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
14. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
15. *Иванов В.К., Королюк Т.И.* Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. **9**, № 1. 30–41.

Поступила в редакцию
14.11.2014

An Error Estimate of a Regularizing Algorithm Based on the Generalized Residual Principle when Solving Integral Equations

V. P. Tanana[1] **and A. I. Sidikova**[2]

[1] *South Ural State University, Faculty of Computational Mathematics and Informatics; prospekt Lenina 76, Chelyabinsk, 454080, Russia; Dr. Sci., Professor, Head of Department, e-mail: tvpa@susu.ac.ru*

[2] *South Ural State University, Faculty of Computational Mathematics and Informatics; prospekt Lenina 76, Chelyabinsk, 454080, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: 7413604@mail.ru*

Received November 14, 2014

Abstract: A regularizing algorithm for the approximate solution of integral equations of the first kind is studied. This algorithm involves a finite-dimensional approximation of the original problem. An error estimate is proposed. In order to obtain this estimate, the equivalence of the generalized residual method and the generalized residual principle is proved. This result can be used to estimate the finite-dimensional approximations of regularized solutions.

Keywords: regularization, generalized residual method, modulus of continuity, error estimates, ill-posed problems, integral equations, operator equations, finite-dimensional approximations.

References

1. A. V. Goncharskii, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, “A Generalized Discrepancy Principle,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **13** (2), 294–302 (1973) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **13** (2), 25–37 (1973)].

2. V. A. Morozov, “Regularization of Incorrectly Posed Problems and the Choice of Regularization Parameter,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **6** (1), 170–175 (1966) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **6** (1), 242–251 (1966)].

3. V. A. Morozov, “The Error Principle in the Solution of Operational Equations by the Regularization Method,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **8** (2), 295–309 (1968) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **8** (2), 63–87 (1968)].

4. A. V. Goncharskii, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, “Finite-Difference Approximation of Linear Incorrectly Posed Problems,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **14** (1), 15–24 (1974) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **14** (1), 14–23 (1974)].

5. V. V. Vasin and V. P. Tanana, “Approximate Solution of Operator Equations of the First Kind,” Mat. Zap. Ural'sk. Univ. **6** (2), 27–37 (1968).

6. V. P. Tanana, “Projection Methods and Finite-Difference Approximation of Linear Incorrectly Formulated Problems,” Sib. Mat. Zh. **16** (6), 1301–1307 (1975) [Sib. Math. J. **16** (6), 999–1004 (1975)].

7. V. V. Vasin, “Discrete Convergence and Finite-Dimensional Approximation of Regularizing Algorithms,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **19** (1), 11–21 (1979) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **19** (1), 8–19 (1979)].

8. V. A. Morozov, *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1974; Springer, New York, 1984).

9. A. S. Leonov, “On the Connection between the Generalized Discrepancy Method and the Generalized Discrepancy Principle for Non-Linear Ill-Posed Problems,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **22** (4), 783–790 (1982) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **22** (4), 13–22 (1982)].

10. A. R. Danilin, “Order-Optimal Estimates of Finite-Dimensional Approximations of Solutions of Ill-Posed Problems,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **25** (8), 1123–1130 (1985) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **25** (4), 102–106 (1985)].

11. V. P. Tanana, “On a Projection-Iterative Algorithm for Operator Equations of the First Kind with Perturbed Operator,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **224** (5), 1028–1029 (1975).

12. A. N. Tikhonov, “Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method,” Dokl. Akad. Nauk SSSR **151** (3), 501–504 (1963) [Sov. Math. Dokl. **5**, 1035–1038 (1963)].

13. V. P. Tanana, *Methods for Solving Operator Equations* (Nauka, Moscow, 1981; VSP Press, Utrecht, 1997).

14. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications* (Nauka, Moscow, 1978; VSP Press, Utrecht, 2002).

15. V. K. Ivanov and T. I. Korolyuk, “Error Estimates for Solutions of Incorrectly Posed Linear Problems,” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **9** (1), 30–41 (1969) [USSR Comput. Math. Math. Phys. **9** (1), 35–49 (1969)].