УДК 519.6

ВЕРОЯТНОСТНАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ ОЦЕНКАМИ ОШИБОК, ПОЛУЧЕННЫХ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

М. К. Абубекеров[1], Н. Ю. Гостев[2]

Получена функция распределения отношения оценок ошибок физических величин, вычисляемых методом доверительных областей (на основе статистики хи-квадрат) к оценкам ошибок, полученных методом наименьших квадратов. Используя аналитический вид этой функции распределения по одним лишь оценкам, вычисленным методом наименьших квадратов, можно легко получить наиболее вероятные значения ошибок, получаемых методом доверительных областей (без новой обработки исходных наблюдательных данных). Помимо чисто математического интереса, настоящая статья представляет интерес для экспериментаторов, занимающихся обработкой наблюдательных данных, в частности астрофизических наблюдений.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, статистика, доверительный интервал, хи-квадрат, метод доверительных областей, оценки ошибок, обработка наблюдательных данных.

Введение. Обычно в качестве итоговых результатов математической обработки количественных данных, полученных в ходе физических наблюдений (эксперимента), исследователями рассматриваются численные значения искомых физических величин вместе с ошибками их определения. В силу вероятностного характера физических процессов и измерений, сама обработка наблюдательных данных, как правило, сводится к статистическому оцениванию искомых величин на основании серии независимых наблюдений физического процесса (рассматриваемых как независимые случайные величины). Окончательные же результаты приводятся непосредственно в виде доверительных интервалов или характерных параметров доверительной области многомерного пространства, в которые истинные значения искомых величин или совокупность их истинных значений попадают с заданной доверительной вероятностью (характеризующей, как правило, некоторый субъективный выбор).

Однако одной лишь информации о доверительных интервалах или областях и о значении доверительной вероятности недостаточно, чтобы однозначно приписать эту вероятность событию попадания истинного значения искомой величины в доверительную область, — из этой информации нельзя определить условия, при которых указанное событие будет повторяться с относительной частотой, в среднем равной заданной доверительной вероятности. Таким образом, чтобы приписать вероятность попадания в доверительный интервал, необходимо исходить из дополнительных предположений, связанных с использованным способом статистического оценивания. Например, приписать вероятность попаданию истинного значения в доверительный интервал можно исходя из предположения, что центр этого интервала является значением случайной величины, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием, равным истинному значению искомой величины, и дисперсией σ^2, такой, что полудлина интервала равна $k\sigma$, где k зависит от выбранной доверительной вероятности. Такое предположение может соответствовать случаю несмещенной линейной оценки с наименьшей дисперсией (например, полученной методом наименьших квадратов).

В то же время, оценки искомой величины могут производиться другими методами, отражающими как субъективный выбор, так и практические цели исследования. Например, при выборе метода оценки можно исходить из необходимости надежно согласовать (в пределах ошибок) значения одной и той же величины, полученные из разных экспериментов (по разным сериям наблюдений), и (или) из необходимости учета возможной неадекватности используемой модели наблюдательным данным. Другой пример: если построить доверительный интервал по квантилю χ^2-распределения, то вероятность попадания истинного значения искомой величины в такой интервал будет равна вероятности его попадания в несколько раз меньший по длине интервал, полученный методом наименьших квадратов.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Ленинские горы, 119992, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: marat@sai.msu.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Ленинские горы, 119992, Москва; науч. сотр., e-mail: ngostev@mail.ru

Таким образом, возникает вопрос о конкретном соотношении между оценками одной и той же величины, полученными различными методами. В настоящей статье исследуется зависимость между интервалами ошибок, полученными методом наименьших квадратов и методом с использованием статистик, распределенных по закону χ^2. Аналитически выводится и исследуется функция плотности распределения отношения оценок ошибок, полученных разными методами.

1. Линейная модель и метод наименьших квадратов. Рассмотрим линейную P-параметрическую модель, описывающую эксперимент из M независимых наблюдений физического явления. Такая модель задается матрицей g_{ij}, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, P$ (i соответствует номеру наблюдения, P — номеру параметра), вектором $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_P)^T$ вещественного P-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^P$, соответствующего набору истинных значений физических величин. Предполагается, что матрица $A_{qp} = \sum\limits_{m=1}^{M} g_{mq} g_{mp}$ является невырожденной.

Введем набор линейных функций $f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_P)$, определенных для вещественных $\alpha_1, \dots, \alpha_P$ и $i = 1, \dots, M$:

$$f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_P) = \sum_{p=1}^{P} g_{ip} \alpha_p. \tag{1}$$

Кроме того, зададимся вектором случайных наблюдаемых величин $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_M)^T$, каждая из которых принимает значение на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$, в отношении которых предполагается, что они статистически независимы, т.е. их ковариации $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$, и что их математические ожидания удовлетворяют соотношению $\mathrm{M}(\xi_k) = f_k(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_P)$. Кроме того, предполагается, что $\sigma^2(\xi_1) = \sigma^2(\xi_2) = \dots = \sigma^2(\xi_M) = 1$, где через $\sigma^2(\cdot)$ здесь и далее обозначается операция вычисления дисперсии. Зададим для данной модели *функционал невязки* выражением

$$R(\alpha_1, \dots, \alpha_P, \xi) = \sum_{m=1}^{M} \big(\xi_m - f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_P)\big)^2 = \sum_{m=1}^{M} \left(\xi_m - \sum_{p=1}^{P} g_{mp} \alpha_p\right)^2. \tag{2}$$

Задача оценки параметров методом наименьших квадратов заключается в нахождении значений $\alpha_1^c(\xi), \dots, \alpha_P^c(\xi)$, при которых функционал (2) достигает минимума, и дисперсии этих значений. Указанные значения $\alpha_1^c(\xi), \dots, \alpha_P^c(\xi)$ мы будем далее называть *оптимальными*. Эти оптимальные значения при фиксированных $\xi_1, \dots, \xi_M$ находятся как решения системы P линейных уравнений

$$\frac{\partial R(\alpha_1, \dots, \alpha_P)}{\partial \alpha_q} = 2B_q - 2\sum_{p=1}^{P} A_{qp}\, \alpha_p = 0, \quad q = 1, \dots, P, \tag{3}$$

где

$$A_{q\,p} = \sum_{m=1}^{M} g_{mq} g_{mp}, \quad B_q = \sum_{m=1}^{M} \xi_m g_{mq}. \tag{4}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\alpha_p^c(\xi) = \sum_{q=1}^{P} A_{qp}^{\mathrm{inv}} B_q = \sum_{m=1}^{M} \xi_m \sum_{q=1}^{P} A_{qp}^{\mathrm{inv}} g_{mq}, \quad p = 1, \dots, P, \tag{5}$$

где A_{qp}^{inv} обозначаются элементы матрицы, обратной к матрице A: $A_{qp}^{\mathrm{inv}} \equiv (A^{-1})_{qp}$.

Вектор $(\alpha_1^c(\xi), \dots, \alpha_P^c(\xi))^T$ является P-мерной случайной величиной, принимающей значения в $\mathbb{R}^P$.

Математические ожидания оптимальных значений параметров $\alpha_1^c(\xi), \dots, \alpha_P^c(\xi)$ равны $\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_P$, что получается, если взять математическое ожидание от обеих частей (5) и подставить в него (1). Таким образом, оценка методом наименьших квадратов является несмещенной. Матрица ковариаций оптимальных значений параметров $\alpha_1^c, \dots, \alpha_P^c$ имеет вид

$$\operatorname{cov}(\alpha_p^c(\xi), \alpha_q^c(\xi)) = \sum_{m=1}^{M} \sigma^2(\xi_m) \left(\sum_{i,j=1}^{P} A_{ip}^{\mathrm{inv}} A_{jq}^{\mathrm{inv}} g_{mi} g_{mj}\right) = \sum_{i,j=1}^{P} A_{ip}^{\mathrm{inv}} A_{jq}^{\mathrm{inv}} \left(\sum_{m=1}^{M} g_{mi} g_{mj}\right) = A_{pq}^{\mathrm{inv}}. \tag{6}$$

Дисперсии оптимальных значений параметров $\alpha_1^c(\xi), \dots, \alpha_P^c(\xi)$ являются диагональными элементами матрицы ковариаций

$$\sigma^2(\alpha_p^c(\xi)) = A_{pp}^{\mathrm{inv}}. \tag{7}$$

Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_M$ распределены по нормальному закону, то оптимальные значения $\alpha_1^c(\xi), \ldots, \alpha_P^c(\xi)$ тоже распределены по нормальному закону (поскольку выражаются через линейную комбинацию $\xi_1, \ldots, \xi_M$). В таком случае, зная дисперсию оптимального значения параметра, можно построить интервал, в который с заданной вероятностью γ попадает истинное значение параметра $\bar{\alpha}_p$. Для этого достаточно заметить, что если оптимальное значение параметра распределено по нормальному закону, то

$$\mathbf{P}\left(\left|\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p\right| \leqslant \kappa(\gamma)\,\sigma(\alpha_p^c(\xi))\right) = \gamma, \tag{8}$$

где символ $\mathbf{P}$ означает вероятность выполнения условия, а κ зависит от выбранной вероятности попадания (уровня доверия) γ и находится как корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\kappa \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = \gamma. \tag{9}$$

Например, при κ равном 1, 2 и 3 уровень доверия γ равен $0.6827..., 0.9545...$ и $0.9973...$ соответственно (правило одной, двух и трех σ).

2. Метод доверительных областей. Найдем теперь распределение значений функционала невязки (2) из вышеописанной модели в предположении, что $\xi_1, \ldots, \xi_M$ распределены по нормальному закону. По теореме о χ^2-распределении имеем

$$R(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_P, \xi) \sim \chi_M^2. \tag{10}$$

где символ “$\sim$” означает “распределено как”. Функцию распределения χ_M^2 запишем в форме

$$\chi_m^2(t) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}, 0, \frac{t}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}, \tag{11}$$

где $\Gamma(n, x_0, x) \equiv \int_{x_0}^x t^{n-1}e^{-t}\,dt$ — неполная обобщенная гамма-функция. Следовательно, если $\chi_M^2(\mathfrak{q}) = \gamma$, где $\mathfrak{q}$ — это квантиль χ_M^2-распределения для некоторого уровня доверия $\gamma < 1$, то для соответствующей вероятности верно равенство

$$\mathbf{P}\big(R(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_P, \xi) \leqslant \mathfrak{q}\big) = \gamma. \tag{12}$$

Пусть D_P — P-мерное множество значений вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_P)^T$, удовлетворяющих условию

$$R(\alpha_1 \ldots . \alpha_P, \xi) \leqslant \mathfrak{q}\,. \tag{13}$$

Тогда (12) эквивалентно утверждению: с вероятностью γ множество D_P не пусто и истинные значения $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_P) \in D_P$. Множество D является доверительной областью для $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_P)$. Отметим, что множество D_P зависит от значений случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$, в том числе может быть пустым для некоторого значения ξ. Кроме того, отметим, что если доверительное множество не пусто, то оно содержит точку $(\alpha_1^c, \ldots, \alpha_P^c)^T$.

Пусть теперь $\tilde{\alpha}_1(\alpha_{K+1}, \ldots, \alpha_P, \xi), \ldots, \tilde{\alpha}_K(\alpha_{K+1}, \ldots, \alpha_P, \xi)$ — значения, доставляющие при фиксированных $\alpha_{K+1}, \ldots, \alpha_P$ и ξ минимум невязке $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_P, \xi)$, рассматриваемой как квадратичная форма по $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$. Тогда [1]

$$R\big(\tilde{\alpha}_1(\bar{\alpha}_{K+1}, \ldots, \bar{\alpha}_P, \xi), \ldots, \tilde{\alpha}_K(\bar{\alpha}_{K+1}, \ldots, \bar{\alpha}_P, \xi), \bar{\alpha}_{K+1}, \ldots, \bar{\alpha}_P, \xi\big) \sim \chi_{M-K}^2. \tag{14}$$

При $1 \leqslant k \leqslant P$ отсюда получается соотношение

$$R\big(\tilde{\alpha}_1(\bar{\alpha}_k, \xi), \ldots, \bar{\alpha}_k, \ldots, \tilde{\alpha}_P(\bar{\alpha}_k, \xi), \xi\big) \sim \chi_{M-P+1}^2, \tag{15}$$

где $\tilde{\alpha}_p(\alpha_k, \xi)$, $1 \leqslant p \leqslant P$, $p \neq k$, минимизируют невязку при фиксированном α_k. Соотношение (15) позволяет построить доверительный интервал T_k для параметра α_k, такой, что с вероятностью γ он не пуст и содержит истинное значение $\bar{\alpha}_k$. Такой интервал определяется условием

$$R\big(\tilde{\alpha}_1(\bar{\alpha}_k, \xi), \ldots, \bar{\alpha}_k, \ldots, \tilde{\alpha}_P(\bar{\alpha}_k, \xi), \xi\big) \leqslant \mathfrak{q}, \tag{16}$$

где $\chi_{M-P+1}^2(\mathfrak{q}) = \gamma$. Если же квантиль $\mathfrak{q}$ взять такой, что $\chi_M^2(\mathfrak{q}) = \gamma$, то соотношение (16) будет определять проекцию P-мерной области D_P, определенной соотношением (13), на k-ю ось в пространстве $\mathbb{R}^P$.

Далее, найдем закон распределения разности между значением функционала невязки, вычисленным при истинных значениях параметров, и значением функционала невязки, вычисленным при оптимальных значениях параметров. Положив $K = P$ в (14), получим закон распределения невязки, вычисленной при оптимальных значениях параметров:

$$R\bigl(\alpha_1^c(\xi), \dots, \alpha_P^c(\xi), \xi\bigr) \sim \chi^2_{M-P}. \tag{17}$$

Обозначим $R_{\min}(\xi) \equiv R(\alpha_1^c(\xi), \dots, \alpha_P^c(\xi), \xi)$. Нетрудно показать, что

$$R(\bar\alpha_1, \dots, \bar\alpha_P, \xi) - R_{\min}(\xi) \sim \chi^2_P. \tag{18}$$

Отметим, что доверительное множество, полученное с помощью статистки (18), никогда не пусто. При $K = P - 1$ из (14) и (17) получается

$$R\bigl(\tilde\alpha_1(\bar\alpha_k, \xi), \dots, \bar\alpha_k, \dots, \tilde\alpha_P(\bar\alpha_k, \xi), \xi\bigr) - R_{\min} \sim \chi^2_1. \tag{19}$$

Вероятность нахождения истинного значения параметра $\bar\alpha_k$ в интервале значений α_k, удовлетворяющих соотношению

$$R\bigl(\tilde\alpha_1(\bar\alpha_k, \xi), \dots, \bar\alpha_k, \dots, \tilde\alpha_P(\bar\alpha_k, \xi), \xi\bigr) - R_{\min} \leqslant \mathfrak{q} \tag{20}$$

при $\chi^2_1(\mathfrak{q}) = \gamma$, совпадает с вероятностью попадания истинного значения $\bar\alpha_k$ в доверительный интервал, полученный методом наименьших квадратов из условия (8) для той же выборки ξ.

3. Распределение отношения оценок ошибок. Теперь найдем распределение отношения длины доверительного интервала для параметра α_k, полученного из условия (16) (проекции области D_P либо интервала T_k), к длине доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов. Невязку R, минимизированную по всем компонентам α кроме α_k (из левой части (15)), можно представить в виде

$$R\bigl(\tilde\alpha_1(\alpha_k, \xi), \dots, \alpha_k, \dots, \tilde\alpha_P(\alpha_k, \xi), \xi\bigr) = C_k(\alpha_k - \alpha_k^c(\xi))^2 + R_{\min}(\xi),$$

где $R_{\min}$ — ее минимальное значение по α, достигаемое в $\alpha^c(\xi)$, а коэффициент C_k выражается определенным образом через заданные параметры модели g_{ij} и не зависит от случайных величин ξ. Это следует из (2), где квадратичные по α члены не содержат случайных величин ξ.

Определим функцию $\Delta_n(\gamma)$ для $\gamma \in (0, 1)$ соотношением

$$\chi^2_n(\Delta_n(\gamma)) = \gamma,$$

т.е. через функцию, обратную к χ^2_n.

Величина интервала значений α_k, полученного из условия (20) при квантиле $\mathfrak{q}$, определяется как расстояние между корнями квадратного уравнения относительно α_k:

$$C_k(\alpha_k - \alpha_k^c(\xi))^2 = \mathfrak{q}\,.$$

Обозначим половину величины указанного интервала через $\mathfrak{d}_k(\mathfrak{q})$. Очевидно, что $\mathfrak{d}_k(\mathfrak{q})$ удовлетворяет соотношению

$$C_k = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{d}_k^2(\mathfrak{q})}$$

и не зависит от выборки случайных величин ξ, так же как и полудлина интервала, полученного из условия (8) методом наименьших квадратов. Очевидно также, что совпадают центры этих интервалов (полусуммы их граничных точек), которыми является α_k^c. Если интервал имеет центр в α_k^c и его длина не зависит от ξ, то зависимость вероятности γ попадания истинного значения $\bar\alpha_k$ в этот интервал от длины этого интервала является возрастающей функцией (γ дается формулой (9), если в ней положить κ равным отношению полудлины указанного интервала к стандартному отклонению $\sigma(\alpha_k^c(\xi))$). Значит, любая вероятность попадания γ соответствует единственному значению длины такого интервала. Как уже отмечалось выше, вероятность попадания истинного значения $\bar\alpha_k$ в интервал, полученный из условия (20) при $\chi^2_1(\mathfrak{q}) = \gamma$, совпадает с вероятностью попадания данного истинного значения в доверительный интервал, полученный из условия (8). Поэтому при $\chi^2_1(\mathfrak{q}) = \gamma$ или при $\mathfrak{q} = \Delta_1(\gamma)$ интервал, полученный из условия (20), совпадает с интервалом, полученным из условия (8). Отсюда получим

$$C_k = \frac{\Delta_1(\gamma)}{\mathrm{d}_k^2(\gamma)}\,, \tag{21}$$

где $\mathrm{d}_k(\gamma) \equiv \mathfrak{d}_k(\Delta_1(\gamma))$ — доверительный интервал, полученный из условия (8) для заданного уровня доверия γ. Кроме того, $\mathrm{d}_k(\gamma) = \kappa(\gamma)\,\sigma(\alpha_k^c(\xi))$, где κ определяется из (9).

Находимая из условия (16) длина проекции P-мерной доверительной области D_P, определенной соотношением (13), на k-ю ось в пространстве $\mathbb{R}^P$ при заданном уровне доверия γ и $\mathfrak{q} = \Delta_M(\gamma)$ равна расстоянию между корнями квадратного уравнения

$$C_k(\alpha_k - \alpha_k^c(\xi))^2 + R_{\min}(\xi) = \Delta_M(\gamma) \tag{22}$$

относительно α_k. Положим $\delta_k(\gamma,\xi)$ равным половине величины указанной проекции в том случае, когда последнее уравнение имеет положительные корни (т.е. соответствующее доверительное множество не пустое), и нулю в противном случае. При этом для положительных значений $\delta_k(\gamma,\xi)$ справедливо соотношение

$$C_k\delta_k^2(\gamma,\xi) + R_{\min}(\xi) = \Delta_M(\gamma), \tag{23}$$

где $\delta_k(\gamma,\xi)$ зависит от случайных величин ξ и сама является случайной величиной. С учетом (17) получим, что

$$\Delta_M(\gamma) - C_k\delta_k^2(\gamma,\xi) \sim \chi^2_{M-P}.$$

Последнее выражение означает, что вероятность

$$\mathbf{P}\left(\Delta_M(\gamma) - C_k\delta_k^2(\gamma,\xi) < t\right) = \chi^2_{M-P}(t).$$

Путем несложных линейных и сдвиговых преобразований относительно t, а также используя (21), из последнего выражения получим

$$\mathbf{P}\left(\frac{\delta_k^2(\gamma,\xi)}{\mathrm{d}_k^2(\gamma)} > t\right) = \chi^2_{M-P}\big(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t\big).$$

Из (17) следует, что вероятность того, что $\delta_k(\gamma,\xi) > 0$ (т.е. того, что доверительный интервал окажется непустым для заданного уровня доверия γ), равна $\chi^2_{M-P}(\Delta_M(\gamma))$.

Запишем соответствующую условную вероятность:

$$\mathbf{P}\left(\delta_k(\gamma,\xi) > 0 \middle| \frac{\delta_k(\gamma,\xi)}{\mathrm{d}_k(\gamma)} > t\right) = \frac{\chi^2_{M-P}\left(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2\right)}{\chi^2_{M-P}(\Delta_M(\gamma))},$$

или

$$\mathbf{P}\left(\delta_k(\gamma,\xi) > 0 \middle| \frac{\delta_k(\gamma,\xi)}{\mathrm{d}_k(\gamma)} \leqslant t\right) = 1 - \frac{\chi^2_{M-P}\left(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2\right)}{\chi^2_{M-P}(\Delta_M(\gamma))}\,. \tag{24}$$

Правая часть (24) представляет собой кумулятивную функцию распределения положительных значений величины $\dfrac{\delta_k(\gamma,\xi)}{\mathrm{d}_k(\gamma)}$, являющейся отношением длины проекции P-мерной доверительной области D_P на k-ю ось в пространстве $\mathbb{R}^P$, к интервалу, полученному для параметра α_k методом наименьших квадратов для заданного уровня доверия γ. Соответствующая плотность распределения $a_P(t)$, полученная дифференцированием функции распределения, с точностью до нормировочного коэффициента Q принимает вид

$$a_P(t) = Q\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\left(\Delta_1(\gamma)t^2 - \Delta_M(\gamma)\right)}t\left(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2\right)^{\frac{M-P-2}{2}}, & 0 < t < \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}} \\ 0, & t \leqslant 0 \text{ или } t \geqslant \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}} \end{cases}. \tag{25}$$

Эта функция достигает максимума при

$$t_{\max P} = \sqrt{\frac{1 + P - M + \Delta_M(\gamma) + \sqrt{(1 + P - M)^2 + \Delta_M(\gamma)(2P - 2M - 2 + \Delta_M(\gamma) + 8)}}{2\Delta_1(\gamma)}}\,. \tag{26}$$

Отметим, что полученное распределение не зависит от индекса k, т.е. не зависит от модельной конфигурации, определяемой коэффициентами g_{ij}.

Выражения для функции плотности распределения отношения длины интервала T_k к доверительному интервалу, полученному методом наименьших квадратов, для параметра α_k (при условии, что интервал T_k не пуст) и для максимума этой функции получаются, если в (22) и (23), определяющих $\delta_k(\gamma)$, заменить квантиль $\Delta_M(\gamma)$ на квантиль $\Delta_{M-P+1}(\gamma)$. Тогда и конечный результат получится путем замены $\Delta_M(\gamma)$ на $\Delta_{M-P+1}(\gamma)$ в выражениях (24)–(26).

4. Использование в практических задачах. Часто астрономы наблюдают объект в разные эпохи, разделенные годами или даже десятками лет. Полученные центральные значения искомых параметров при интерпретации кривых блеска разных эпох для затменных двойных звезд могут значительно отличаться. Причем отличие вызвано не глубокими физическими процессами и не методом интерпретации, а именно статистической реализацией кривой блеска (например, легкой запятненностью изучаемой звезды, которая в разные эпохи проявляет себя по-разному). Численные значения оптимальных значений искомых параметров (например, радиуса звезды) нередко в пределах полученных ошибок не согласуются между собой. Часто используемый для вычисления ошибки метод дифференциальных поправок (нелинейный метод наименьших квадратов) дает формальное значение ошибки в пределах, в которых искомые оптимальные значения параметров рассогласованы. Для того чтобы избежать подобного рассогласования центральных значений и обойти предельно низкое формальное численное значения ошибки, приходится искусственно, руководствуясь интуицией, увеличивать ошибку [2].

Так, в работе [3] полученные значения геометрических параметров (радиуса звезды, радиуса экзопланеты и наклонения орбиты) двойной системы HD 209458 по кривой блеска 2000 г. и 2003 г. расходятся в пределах ошибок, полученных методом дифференциальной поправки (см. табл. 5 в работе [4]). Лишь увеличив ошибку вдвое, удается согласовать данные. Иногда исследователь, интуитивно понимая, что формальное значение ошибки, полученное методом наименьших квадратов, неправдоподобно мало, искусственно увеличивает ошибку искомых параметров в 5–10 раз [5] (тем самым переходя к наиболее вероятным ошибкам, полученным методом доверительных областей). Результаты настоящей работы позволяют обоснованно подойти к данной практике.

Более надежно с точки зрения уровня доверия интервалов ошибок искомых параметров использовать метод доверительных областей [3, 4]. В качестве ошибки параметра метода доверительных областей используется проекция области на ось искомого параметра. Построение же доверительной области и ее проекции на ось искомого параметра достаточно трудоемко и требует повторной обработки наблюдательных данных. Полученное соотношение (26) позволяет легко пересчитать значение ошибки искомого параметра из значения, полученного в рамках метода наименьших квадратов, в наиболее вероятное значение ошибки, которое получилось бы при использовании метода доверительных интервалов. При этом нет необходимости в повторной обработке наблюдательных данных: достаточно лишь использовать уже имеющиеся формальные значения ошибок, полученные методом наименьших квадратов (или равноценным ему методом Монте-Карло). Полученного таким образом нового значения ошибки (большего, чем формальное) достаточно для того чтобы надежно и обосновано согласовать результаты, полученные из разных экспериментов. Можно сказать, что искусственное увеличение значения ошибки, вычисленного методом наименьших квадратов, получило математическое обоснование. Например, для одномерной функции в случае 100 наблюдательных точек для уровня доверия от 0.99 до 0.5 наиболее вероятное отношение значения ошибок, полученных методом доверительных интервалов, к ошибке, рассчитанной в рамках метода дифференциальных поправок, лежит в пределах от 2 до 6 соответственно [4]. Поэтому, когда исследователю нужно делать особенно ответственные суждения о природе исследуемого объекта, ему целесообразно использовать метод доверительных областей. Метод доверительных областей широко применяется, например, в рентгеновской астрономии [7], где часто приходится выполнять интерпретацию дорогостоящих экспериментов.

Заключение. Таким образом, получено распределение отношения статистических оценок ошибок, вычисленных методом доверительных областей и методом наименьших квадратов (при условии, что доверительная область не пуста). При этом в качестве оценки, полученной методом доверительных областей, рассматривается либо проекция многомерной доверительной области на ось соответствующего параметра, либо определенный во втором разделе интервал T_k. Если известна ошибка физической величины, полученная методом наименьших квадратов, а сам исходный наблюдательный материал отсутствует, то по характерной величине $t_{\max P}$ можно определить “наиболее вероятное” значение оценки ошибки, полученной методом доверительных областей (в предположении, что доверительная область не пуста). Видно, что эти оценки могут различаться в несколько раз, причем параметры распределения их отношения зависят от числа точек наблюдения M (чем больше это число, тем больше вероятное отношение оценок), а также от выбранного уровня доверия.

Обычно оценки ошибки, полученные методом доверительных областей, используются тогда, когда надо отказаться от предположения о том, что используемая модель идеально верна: например, если по ошибкам, полученным методом наименьших квадратов, не удается надежно согласовать значения одной и той же физической величины, полученные на основе разных наблюдательных материалов (без их повторной обработки). Поэтому возможность получить хотя бы "наиболее вероятные" значения оценок ошибок методом доверительных областей может быть полезна в случаях, когда нужно делать особо ответственные суждения о параметрах модели (хотя бы допустив завышение ошибок их определения), в том числе, когда нужно обеспечить надежное согласование результатов разных экспериментов.

Вышеизложенный подход оценки ошибок был апробирован при интерпретации кривой блеска классической затменной двойной системы YZ Cas [4] и на транзитных кривых блеска двойных систем с экзопланетами HD209458 и HD189733 [3, 6].

Авторы благодарят А. М. Черепащука за полезные советы и обсуждение работы. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки (проект RFMEFI60414X0094).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
2. *Черепащук А.М.* Тесные двойные звезды. М.: Физматлит, 2013.
3. *Абубекеров М.К., Гостев Н.Ю., Черепащук А.М.* Анализ кривых блеска затменных систем с экзопланетами. Система HD 209458 // Астрономический журнал. 2010. **87**, № 12. 1199–1220.
4. *Абубекеров М.К., Гостев Н.Ю., Черепащук А.М.* Оценка ошибок параметров в обратных параметрических задачах. Поиск потемнения к краю звезд в классических затменных системах // Астрономический журнал. 2009. **86**, № 8. 778–806.
5. *Popper D.M.* Error analysis of light curves of detached eclipsing binary systems // Astronomical Journal. 1984. **89**, N 1. 132–144.
6. *Абубекеров М.К., Гостев Н.Ю., Черепащук А.М.* Анализ кривых блеска затменных систем с экзопланетами. Система HD 189733 // Астрономический журнал. 2011. **88**, № 12. 1139–1163.
7. *Lampton M., Margon B., Bowyer S.* Parameter estimation in X-ray astronomy // Astrophysical Journal. 1976. **208**. 177–190.

Поступила в редакцию
22.09.2014

A Probabilistic Relation between the Error Estimates of Physical Quantities Obtained by Different Methods

M. K. Abubekerov [1] and N. Yu. Gostev [2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute; Universitetskii prospekt 13, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Senior Scientist, e-mail: marat@sai.msu.ru*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute; Universitetskii prospekt 13, Moscow, 119991, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: ngostev@mail.ru*

Received Sepember 29, 2014

Abstract: A distribution function for the ratio of the error estimates of physical quantities calculated using the confidence region method (based on the chi-square statistics) to the errors estimates calculated using the least-squares method is obtained. If the analytical form of this function is used, then the most probable values of the error estimates calculated by the confidence region method can easily be obtained using only the error estimates calculated by the least-squares method (without new observational data processing). Apart from a purely mathematical interest, this paper is of interest to experimenters involved in the processing of observational data, in particular, in the processing of astrophysical observations.

Keywords: least-squares method, statistics, confidence interval, chi-square, confidence region method, error estimates, processing of observational data.

References

1. S. S. Wilks, *Mathematical Statistics* (Wiley, New York, 1962; Nauka, Moscow, 1967).
2. A. M. Cherepashchuk, *Close Binary Stars* (Fizmatlit, Moscow, 2013) [in Russian].

3. M. K. Abubekerov, N. Yu. Gostev, and A. M. Cherepashchuk, “Light Curve Analysis for Eclipsing Systems with Exoplanets. The system HD 209458,” Astron. Zh. **87** (12), 1199–1220 (2010) [Astron. Rep. **54** (12), 1105–1124 (2010)].

4. M. K. Abubekerov, N. Yu. Gostev, and A. M. Cherepashchuk, “Estimation of Parameter Errors in Inverse Problems. Determining Limb-Darkening Coefficients in Classical Eclipsing Systems,” Astron. Zh. **86** (8), 778–806 (2009) [Astron. Rep. **53** (8), 722–749 (2009)].

5. D. M. Popper, “Error Analysis of Light Curves of Detached Eclipsing Binary Systems,” Astron. J. **89** (1), 132–144 (1984).

6. M. K. Abubekerov, N. Yu. Gostev, and A. M. Cherepashchuk, “Analysis of Light Curves of Eclipsing Systems with Exoplanets: HD 189733,” Astron. Zh. **88** (12), 1139–1163 (2011) [Astron. Rep. **55** (12), 1051–1073 (2011)].

7. M. Lampton, B. Margon, and S. Bowyer, “Parameter Estimation in X-Ray Astronomy,” Astrophys. J. **208**, 177–190 (1976).