

УДК 519.6

СЖАТИЕ фМРТ-ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ WWT-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**П. В. Харюк¹, И. В. Оселедец², В. Л. Ушаков³**

Рассмотрено применение Wavelet Tensor Train (WTT) разложения к наборам данных функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ) для их сжатия. В отличие от популярных вейвлет-преобразований, это WTT-разложение обладает свойством адаптивности и, в то же время, необходимостью хранения фильтров разложения для каждого отдельного массива. Проведено сравнение с преобразованиями Добеши в применении к реальным фМРТ-данным. Полученные результаты свидетельствуют о возможности успешного использования WTT-преобразования для сжатия с потерями.

Ключевые слова: вычислительные тензорные методы, вейвлет-преобразование Добеши, Wavelet Tensor Train (WTT) разложение, фМРТ-данные, сжатие данных.

1. Введение. С развитием технологий неинвазивных исследований головного мозга расширились возможности изучения его нейроактивности при решении сложных когнитивных задач. Одна из модальностей подобных исследований представлена функциональной магнитно-резонансной томографией (фМРТ). Биомедицинские данные указанной модальности отражают гемодинамические процессы, вызванные нейронной активностью головного мозга. Ряд экспериментов требует большого количества собранной информации, что приводит к проблеме хранения фМРТ-данных. Какие существуют подходы для решения обозначенной проблемы? Большая часть алгоритмов связана с вейвлет-преобразованиями [1–3]; используются также статистические алгоритмы, основанные на высокой степени корреляции соседних пикселей [4]. Кроме того, вейвлет-преобразования используются для сжатия не только фМРТ, но и других биомедицинских данных [5–7]. Тем не менее, у подобных подходов есть существенный недостаток — преобразования не являются адаптивными к исходным данным.

Для устранения такого недостатка существует способ построения вейвлет-преобразований на основе тензорных разложений: Wavelet Tensor Train (WTT) преобразование. К сожалению, использование WTT-преобразования приводит к необходимости дополнительного хранения фильтров.

Исследование проводилось для 4D фМРТ-данных, которые можно интерпретировать как тензор. Существуют разные подходы для построения преобразования 4D данных [1, 2, 8]. Отличительная особенность WTT-преобразования состоит в том, что это преобразование основывается на тензорном разложении.

Техники сжатия данных обычно разделяют на сжатие без потерь (англ. lossless) с однозначным восстановлением сигнала при обратном преобразовании [9–11] и с потерями (англ. lossy), при котором допустимо внесение некоторых несущественных искажений, не имеющих ощутимого влияния на сигнал. В настоящей статье рассмотрен подход на основе WTT-преобразования для организации сжатия с потерями. Эмпирическое исследование применения WTT-преобразования к фМРТ-данным показало, что для приемлемого значения величины PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio, отношение пикового уровня сигнала к шуму) достаточно выбирать малый ранг, который и определяет размер фильтров.

2. фМРТ-модальность. Суть магнитно-резонансного томографического (МРТ) исследования состоит в реализации особого качественного анализа амплитуды сигнала ядерного магнитного резонанса (ЯМР). МРТ-метод позволяет визуализировать с высоким разрешением головной, спинной мозг, другие внутренние органы человека. Одно из главных преимуществ метода — возможность неинвазивных исследований, позволяющих изучать организм человека на основе насыщенности тканей организма водородом и особенностей их магнитных свойств, связанных с нахождением атомов водорода в окружении разных атомов и молекул.

Для повышения разрешающей способности сигнала МРТ в кровь пациента вводят специальные контрастные вещества на основе парамагнетиков. Более того, ряд МРТ-исследований невозможен без использования контраста. В работе [12] впервые был предложен подход к использованию BOLD-эффекта

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; аспирант, email: hariyuki.pavel@gmail.com

² Институт вычислительной математики РАН, ул. Губкина, д. 8, 119333, Москва; ст. науч. сотр.; email: ivan.oseledets@gmail.com;

³ Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, пл. Академика Курчатова, д. 1, 123182, Москва; нач. лаборатории, e-mail: tiuq@yandex.ru

(англ. Blood Oxygenation Level-Dependent effect), при котором в роли контрастного вещества при регистрации МРТ-сигнала выступает гемоглобин, содержащийся в крови. Данный эффект выражает зависимость степени насыщения крови кислородом от нейроактивности: при активной работе мозгового центра усиливается приток крови к соответствующей области мозга, и данная картина регистрируется томографом. На основе BOLD-эффекта был предложен метод изучения мозга человека, носящий название *функциональной магнитно-резонансной томографии*.

Отметим, что фМРТ-модальность совместима с электроэнцефалографическими измерениями (ЭЭГ), представляющими собой данные об электрической активности коры головного мозга. В силу того, что фМРТ-измерения имеют лучшее разрешение по пространству, а ЭЭГ — по времени, совмещение данных, представляющих обе модальности, позволяет выполнять более расширенный анализ, чем использование данных только одной модальности [13].

Измерения фМРТ состоят из набора двумерных изображений — срезов. Для организации файлов, сохраняющих эти измерения, используется стандарт DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine), который является одним из наиболее распространенных стандартов хранения визуальных медицинских данных.

В рамках одного эксперимента фМРТ-данные представляют собой набор объемов из одинакового количества срезов, которые, в свою очередь, имеют эквивалентные размеры. В силу этого фМРТ-измерения можно представить в виде тензора и применить тензорные разложения. Поэтому WTT-подход потенциально применим для решения указанной задачи компактного хранения фМРТ-данных.

3. WTT-разложение. В работах [15, 16] предложено семейство преобразований, основанное на тензорном подходе к конструированию фильтров и сочетающее в себе достоинства вейвлетов и свойство адаптивности. Такое преобразование было названо Wavelet Tensor Train (WTT) разложением. WTT-преобразование основано на Tensor Train (TT) разложении [17–19], которое в матричном представлении для тензора A размерами $n_1 \times \dots \times n_d$ имеет вид $A(i_1, i_2, \dots, i_d) = G_1(i_1) \cdot \dots \cdot G_d(i_d)$, где $i_k = \overline{1, n_k}$ — индекс по k -й размерности, $G_k(i_k)$ — матрица размеров $(r_{k-1} \times r_k)$, $r_0 = r_d = 1$, r_k — ранг матрицы развертки тензора A по k -му индексу, $r_k = \text{rank } A_k$.

Матрицы $G_k(i_k)$ возникают из сингулярного разложения матричной развертки тензора, построенного из элементов исходных данных. Их можно интерпретировать как фильтры вейвлет-разложения.

Для построения WTT-разложения нужно знать только дискретизацию сигнала, что достаточно для его представления в псевдоразреженном виде в базисе некоторого набора фильтров. Исходный сигнал подвергают процедуре *квантизации* с тем, чтобы получить его тензорное представление. Далее, если ввести критерий обнуления элементов в псевдоразреженном виде, то приходим уже к разреженному представлению, что является целью сжатия.

К недостатку WTT-преобразования относится необходимость дополнительного хранения фильтров разложения: мы выигрываем по разреженности полученного вектора, но требуется дополнительная память для хранения фильтров разложения.

К недостатку WTT-преобразования относится необходимость дополнительного хранения фильтров разложения: мы выигрываем по разреженности полученного вектора, но требуется дополнительная память для хранения фильтров разложения.

Тем не менее, если возможно использование малого ранга, проблема хранения фильтров может стать менее существенной. В нашем исследовании использованы данные fMRI-активности, представимые в виде тензора размеров $64 \times 64 \times 30 \times 64$, после дополнения нулями — размеров $64 \times 64 \times 32 \times 64$ (все измерения проводились за вычетом дополнительных нулей). В таблице указано число элементов всех фильтров разложения, построенного для использованных данных в случае квантизации по основанию 2, а также их процентная доля от общего числа элементов исходных данных. Тем не менее, следует учитывать, что исходные данные хранятся в формате uint16, фильтры и результирующий псевдоразреженный вид используют float64-представление, откуда вытекает дополнительная подзадача: выяснить, можно ли обойтись для хранения фильтров и преобразованного сигнала иным форматом данных. Данная подзадача не рассматривалась в настоящем исследовании.

В работе [20] рассмотрен один из способов преодоления указанной проблемы хранения, основанный на конструировании некоторого общего фильтра для семейства однородных массивов данных (т.е. имеющих

Хранение фильтров (исходные данные содержат 7 864 320 элементов)

rank	1	2	3	4	5	6	7
elements	92	356	756	1316	1964	2756	3692
%	0.0012	0.0045	0.0096	0.017	0.025	0.035	0.045
rank	8	9	10	11	12	13	14
elements	4772	5860	7076	8420	9892	11492	13220
%	0.061	0.075	0.09	0.11	0.126	0.146	0.168

одинаковые размерности и размеры). Для этого конструировался $(d + 1)$ -мерный тензор из всего массива d -мерных однородных данных, на основе которого строились общие фильтры, и затем построенные фильтры, за исключением последнего, применялись к каждому представителю.

4. Численные эксперименты. В нашем исследовании использованы данные фМРТ-измерений, предоставленные Курчатковским НБИКС-центром. Отметим, что фМРТ-данные представляют собой 64 считанных объемов головы, каждый из которых состоит из 30 срезов размерами 64×64 .

При программировании были использованы следующие источники:

- 1) <http://scipy.org/> — обработка сигналов, методы линейной алгебры;
- 2) <http://www.numpy.org/> — работа с массивами;
- 3) <http://medical.nema.org/standard.html/> — спецификации DICOM-стандарта хранения медицинских данных;
- 4) <http://code.google.com/p/pydicom/> — чтение файлов в DICOM-формате.

WTT-преобразование строится на основе исходных данных и тем самым зависит от способа их организации. Совокупность исходных данных естественным образом представляется в виде четырехмерного тензора. Построим фильтры WTT-преобразования указанного тензора: если далее использовать их все на всем массиве данных, то получим 4D преобразование; если проигнорировать последний фильтр и использовать оставшиеся к каждому 3D тензору, полученному фиксированием значения индекса исходного тензора, отвечающего последней размерности, то получим 3D вариант преобразования с общим фильтром. Таким образом, один раз построив фильтры разложения, получаем возможность сжатия–восстановления как отдельного представителя, так и всего множества данных.

В работе [2] сделано замечание, что при использовании вейвлет-преобразований лучшие результаты были получены при такой организации данных, когда внутри можно выделить трехмерные структуры вида (x, y, t) (по сравнению с (x, y, z)), что выглядит понятным: срезы головного мозга $((x, y))$ имеют гораздо больше сходства по времени, нежели по пространству.

Получены результаты применения 4D WTT преобразования рангов 1–14 в сравнении с 4D вейвлетами Добеши (db1–db10).

Для оценивания результатов использовались следующие характеристики: коэффициент сжатия (CR, Compress Ratio) и Peak-to-Signal Noise Ratio (PSNR, пиковое отношение сигнала к шуму).

Применим к дискретизированному сигналу v преобразование F , получим $w = F(v)$. Построим \hat{w} по следующему правилу: $\hat{w}_i = \begin{cases} w_i, & |w_i| > \text{асс}, \\ 0 & |w_i| \leq \text{асс}, \end{cases}$ где асс — параметр.

Тогда коэффициент сжатия можно определить как $CR = \frac{N_w^{nz}}{N_{\hat{w}}}$, где N_w^{nz} — число ненулевых элементов в w , $N_{\hat{w}}$ — общее число элементов.

Теперь восстановим сигнал по \hat{w} : $c = F^{-1}(\hat{w})$. PSNR определяется как логарифм отношения величины $MAX_I = 2^B - 1$, характеризующей максимальное значение, которое может принимать элемент (B — число бит, требуемое для хранения одного числа; конечно, диапазон принимаемых значений при этом имеет вид $[0, MAX_I]$), к среднеквадратичной ошибке MSE (Mean Squared Error) между исходным v и восстановленным c сигналами: $PSNR = 20 \lg \frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}}$.

На рис. 1 представлены результаты исследования зависимости коэффициента сжатия от PSNR для WTT-преобразования: а) в случае порядка осей $xyzt$, б) в случае порядка осей $xytz$, в) сравнительные результаты. Рис. 2 иллюстрирует результаты восстановления из огрубленного сжатия.

Справедливы следующие наблюдения:

- с ростом ранга кривые сближаются;
- порядок осей $xytz$ улучшает качество сжатия;
- разрыв между кривыми для меньших и больших рангов растет при увеличении CR;
- при значениях PSNR, меньших 70 дБ, возникают заметные визуальные искажения.

Из указанных наблюдений можно сделать следующие выводы:

- 1) порядок “естественных” осей влияет на качество сжатия,
- 2) оправдано использование малого ранга (в силу сгущения кривых при росте ранга, а также из-за ограничений на минимальность значения PSNR).

Имеется еще одна проблема: 4D WTT-преобразование требует для работы информацию со всего множества исходных данных, а если оно будет достаточно велико, то возникнут проблемы с размещением данных в оперативной памяти. Частично подобную проблему можно решить параллельной реализацией WTT-преобразования.

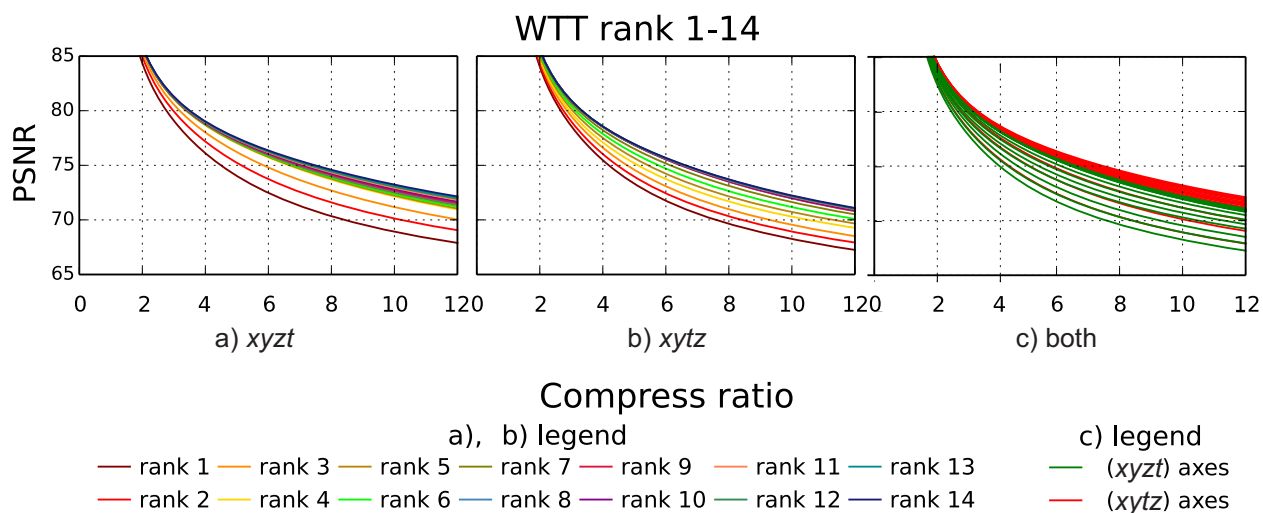


Рис. 1. Результаты сжатия фМРТ-данных: 4D WTT

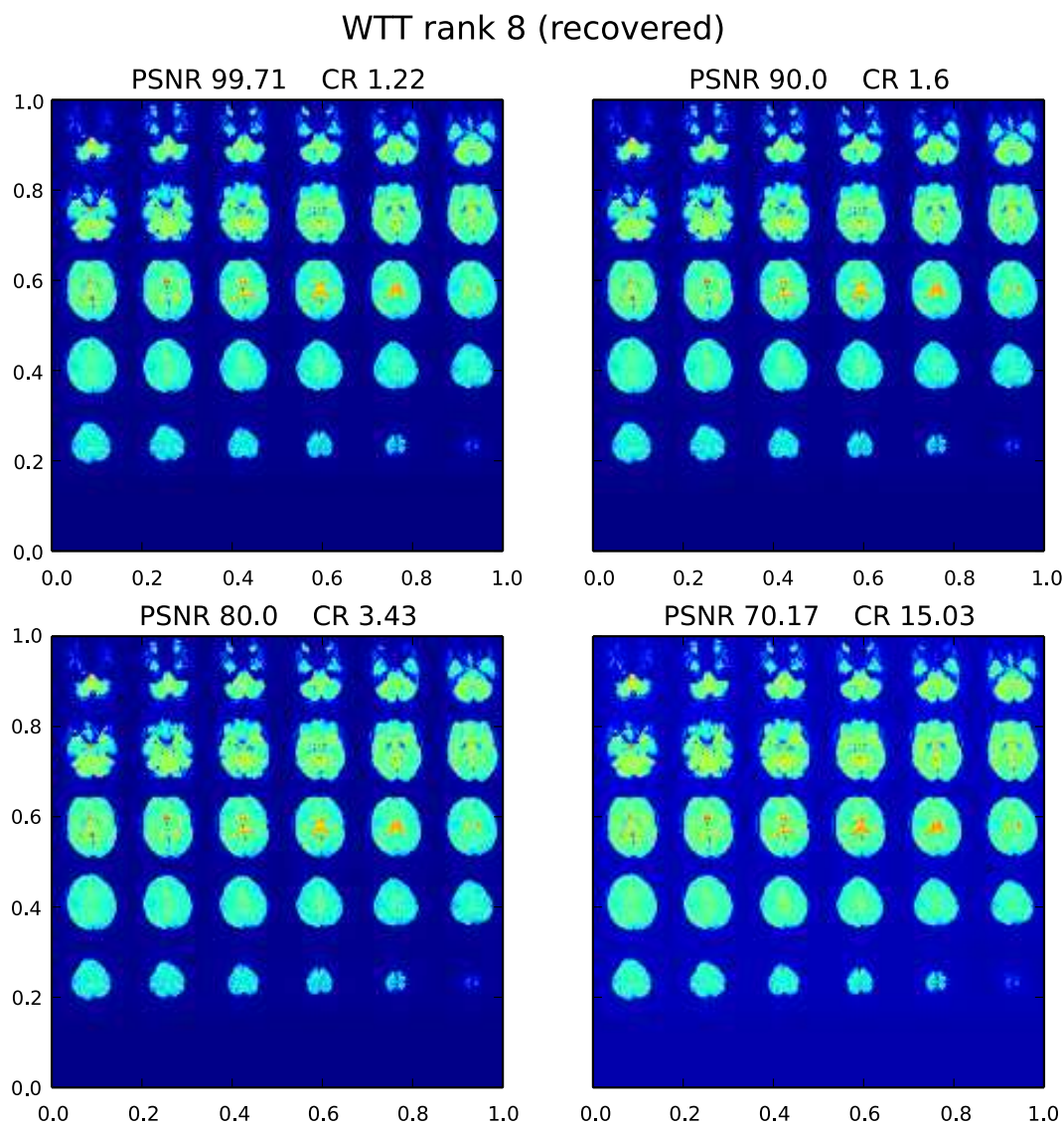


Рис. 2. Результаты сжатия фМРТ-данных: 4D WTT, восстановленный сигнал

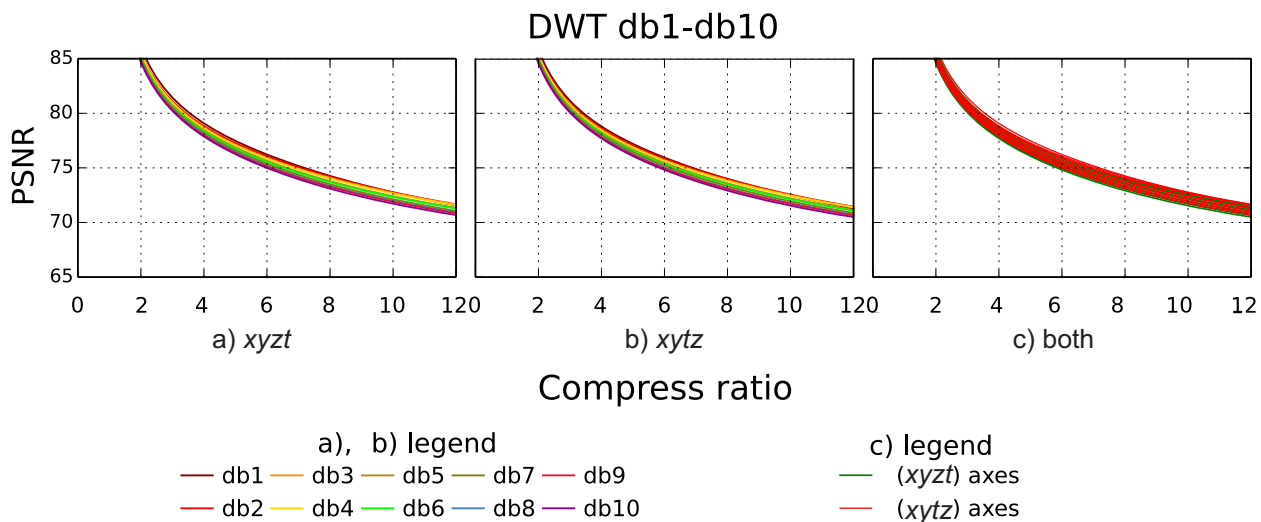


Рис. 3. Результаты сжатия фМРТ данных: 4D DWT

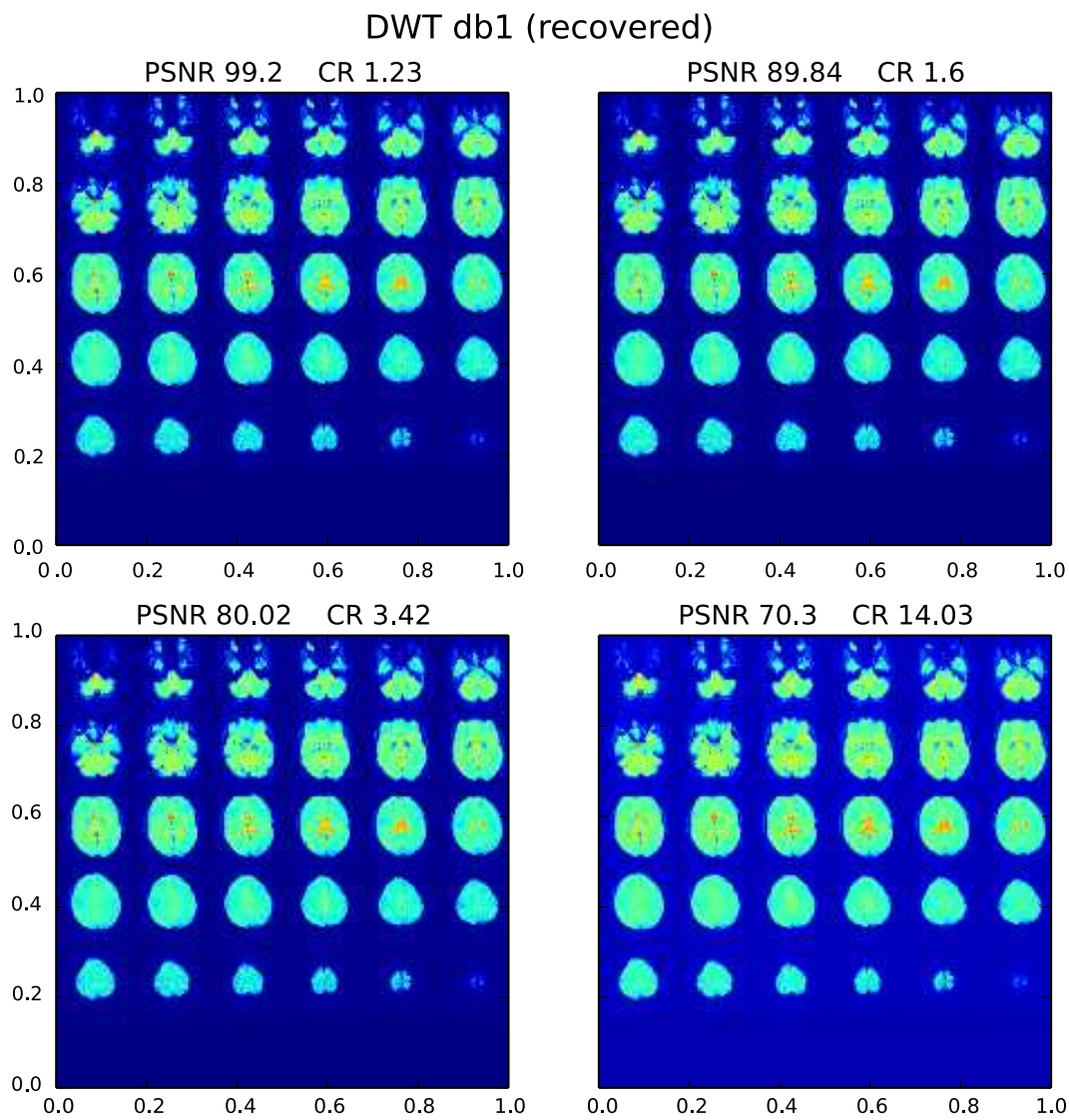


Рис. 4. Результаты сжатия фМРТ данных: 4D DWT, восстановленный сигнал

На иллюстрации восстановленного сигнала видно, что фон становится более светлым — таким образом на графиках отражено появление близких к нулю отрицательных чисел. Избавиться от подобной неприятности и улучшить показания качества сжатия можно, используя, например, шаблоны (маски). Подобный подход как опция использован в работе [21].

Аналогичные исследования были проведены для 4D преобразования Добеши (db1-db10); результаты приведены на графиках рис. 3 и на рис. 4, обозначения аналогичны обозначениям на предыдущих иллюстрациях.

Справедливы следующие замечания:

- порядок осей $xyzt$ дает небольшой выигрыш, который уменьшается с ростом фильтров;
- увеличение размера фильтров ухудшает качество сжатия.

Отчетливо видно, что вейвлет Хаара, который является одним из первых предложенных ортогональных вейвлетов, дает самые лучшие результаты сжатия, которые ухудшаются с ростом порядка вейвлетов Добеши.

В работе [22] приведены аналогичные результаты относительно свойств качества сжатия вейвлетов Добеши и отмечено, что именно вейвлет Хаара обладает лучшими указанными свойствами.

Comparison of DWT db1-2 and WTT rank 11, 14

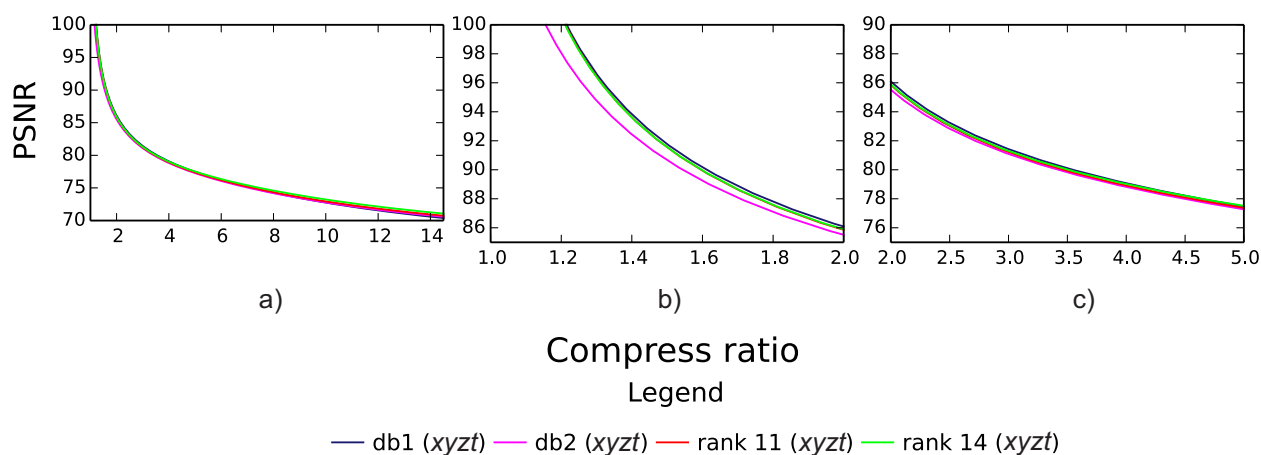


Рис. 5. Сравнение WTT-подхода и вейвлетов Добеши

Наконец, на рис. 5 представлено сравнение рассмотренных выше преобразований. Видно, что кривые ведут себя немного по-разному: так, при более высоких значениях PSNR имеем выигрыш для вейвлета Хаара (db1) (b), но после прохождения некой точки пересечения уже WTT-преобразование обладает лучшими показателями сжатия (c).

5. Выводы. В рамках данной работы проведено исследование сжатия с потерями на основе 4D WTT-преобразования рангов 1–14 в сравнении с 4D вейвлет-преобразованиями Добеши (db1–db10) для реальных данных фМРТ-измерений. В результате исследования выявленных закономерностей получены следующие результаты. Для WTT-преобразования характерны лучшие показатели качества сжатия в терминах PSNR и CR, чем для вейвлет-преобразований Добеши. При этом оправдано использование малого ранга, откуда следует меньшая значимость проблемы хранения фильтров разложения.

Таким образом, 4D WTT-преобразование можно успешно использовать для решения задачи сжатия набора фМРТ-данных.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-28-00234) и Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu Y., Pearlman W.A. Four-dimensional wavelet compression of 4-D medical images using scalable 4-D SBHP // Proc. Data Compression Conference. Washington DC: IEEE Press, 2007. 233–242.
2. Lalgudi H.G., Bilgin A., Marcellin M.W., et al. Four-dimensional compression of fMRI using JPEG2000 // SPIE Proc. 2005. **5747**. 1028–1037.
3. Rajeswari R., Rajesh R. Efficient compression of 4D fMRI images using bandelet transform and fuzzy thresholding // Proc. World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing. New York: IEEE Press, 2009. 543–547.

4. Knezovic J., Kovač M., Žagar M., et al. Novel prediction based technique for efficient compression of medical imaging data // *Telemedicine Techniques and Applications*. Rijeka: InTech Press, 2011. 169–184.
5. Ruchika M., Singh M., Singh A.R. Compression of medical images using wavelet transforms // *Int. J. of Soft Computing and Engineering*. 2012. **2**, N 2. 339–343.
6. Brechet L., Lucas M.-F., Doncarli C., Farina D. Compression of biomedical signals with mother wavelet optimization and best-basis wavelet packet selection // *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*. 2007. **54**, N 12. 2186–2192.
7. Nielsen M., Kamavuako E.N., Andersen M.M., et al. Optimal wavelets for biomedical signal compression // *Medical and Biological Engineering and Computing*. 2006. **44**, N 7. 561–568.
8. Nguyen B.P., Chui C.-K., Ong S.-H., Chang S. An efficient compression scheme for 4-D medical images using hierarchical vector quantization and motion compensation // *Computers in Biology and Medicine*. 2011. **41**, N 9. 843–856.
9. Anusuya V., Raghavan V.S., Kavitha G. Lossless compression on MRI images using SWT // *Journal of Digital Imaging*. 2014. **27**, N 5. 594–600.
10. Taquet J., Labit C. Hierarchical oriented predictions for resolution scalable lossless and near-lossless compression of CT and MRI biomedical images // *IEEE Trans. on Image Processing*. 2012. **21**, N 5. 2641–2652.
11. Pizzolante R., Carpentieri B. Lossless, low-complexity, compression of three-dimensional volumetric medical images via linear prediction // *Proc. 18th Int. Conf. on Digital Signal Processing*. New York: IEEE Press, 2013. 1–6.
12. Ogawa S., Lee T.M., Kay A.R., Tank D.W. Brain magnetic resonance imaging with contrast dependent on blood oxygenation // *Proc. of the National Academy of Sciences of USA*. 1990. **87**, N 24. 9868–9872.
13. Mulert C., Lemieux L. EEG – fMRI: physiological basis, technique, and applications. Heidelberg: Springer, 2010.
14. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
15. Oseledets I.V., Tyrtshnikov E.E. Algebraic wavelet transform via quantum tensor train decomposition // *SIAM J. Sci. Comput.* 2011. **33**, N 3. 1315–1328.
16. Kazeev V.A., Oseledets I.V. The tensor structure of a class of adaptive algebraic wavelet transforms. Preprint N 2013-28. Zürich: Swiss Federal Inst. of Technology, 2013.
17. Oseledets I.V. Tensor-train decomposition // *SIAM J. Sci. Comput.* 2011. **33**, N 5. 2295–2317.
18. Oseledets I.V. Approximation of $2^d \times 2^d$ matrices using tensor decomposition // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2010. **31**, N 4. 2130–2145.
19. Khoromskij B.N. $O(d \log N)$ -quantics approximation of $N - d$ tensors in high-dimensional numerical modeling // *Constr. Appr.* 2011. **34**, N 2. 257–280.
20. Харюк П.В., Оселедец И.В. WTT-разложение для семейств массивов и его применение для сжатия изображений // *Вычислительные методы и программирование*. 2014. **15**. 229–238.
21. Theis F.J., Tanaka T. A fast and efficient method for compressing fMRI data sets // *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 3697. Heidelberg: Springer, 2005. 769–777.
22. Taswell C. Wavelet transform compression of functional magnetic resonance image sequences // *Proc. Int. Conf. on Signal and Image Processing*. 1998. <http://www.toolsmiths.com/docs/sip98.pdf>.

Поступила в редакцию
5.11.2014

Compression of fMRI Data Using Wavelet Tensor Train Decomposition

P. V. Kharyuk¹, I. V. Oseledets², and V. L. Ushakov³

¹ *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Graduate Student, e-mail: hariyuki.pavel@gmail.com*

² *Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences; ulitsa Gubkina 8, Moscow, 119333, Russia; Dr. Sci., Senior Scientist, e-mail: ivan.oseledets@gmail.com*

³ *National Research Center “Kurchatov Institute”; ploshchad Kurchatova 1, Moscow, 123182, Russia; Ph.D., Head of Laboratory, e-mail: tiuq@yandex.ru*

Received November 5, 2014

Abstract: The application of the Wavelet Tensor Train (WTT) decomposition to the compression of functional magnetic resonance imaging (fMRI) data is considered. Contrary to the classical wavelet transforms, the WTT decomposition is an algebraic technique for the construction of adaptive wavelet transforms, but it requires to store filters for each data array. The WTT method of compressing realistic fMRI data is compared with Daubechies wavelet transforms. The numerical results show that the WTT transform can be successfully used to compress lossy data.

Keywords: numerical tensor methods, Daubechies wavelet transform, wavelet tensor train decomposition, functional magnetic resonance imaging (fMRI) data, lossy data compression.

References

1. Y. Liu and W. A. Pearlman, "Four-Dimensional Wavelet Compression of 4-D Medical Images Using Scalable 4-D SBHP," in *Proc. Data Compression Conference, Snowbird, UT, USA, March 27–29, 2007* (IEEE Press, Washington DC, 2007), pp. 233–242.
2. H. G. Lalgudi, A. Bilgin, M. W. Marcellin, et al., "Four-Dimensional Compression of fMRI Using JPEG2000," *SPIE Proc.* **5747**, 1028–1037 (2005).
3. R. Rajeswari and R. Rajesh, "Efficient Compression of 4D fMRI Images Using Bandelet Transform and Fuzzy Thresholding," in *Proc. World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing, Coimbatore, India, December 9–11, 2009* (IEEE Press, New York, 2009), pp. 543–547.
4. J. Knezovic, M. Kovač, M. Žagar, et al., "Novel Prediction Based Technique for Efficient Compression of Medical Imaging Data," in *Telemedicine Techniques and Applications* (InTech Press, Rijeka, 2011), pp. 169–184.
5. M. Ruchika, M. Singh, and A. R. Singh, "Compression of Medical Images Using Wavelet Transforms," *Int. J. Soft Comput. Eng.* **2** (2), 339–343 (2012).
6. L. Brechet, M.-F. Lucas, C. Doncarli, and D. Farina, "Compression of Biomedical Signals with Mother Wavelet Optimization and Best-Basis Wavelet Packet Selection," *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **54** (12), 2186–2192 (2007).
7. M. Nielsen, E. N. Kamavuako, M. M. Andersen, et al., "Optimal Wavelets for Biomedical Signal Compression," *Med. Biol. Eng. Comput.* **44** (7), 561–568 (2006).
8. B. P. Nguyen, C.-K. Chui, S.-H. Ong, and S. Chang, "An Efficient Compression Scheme for 4-D Medical Images Using Hierarchical Vector Quantization and Motion Compensation," *Comput. Biol. Med.* **41** (9), 843–856 (2011).
9. V. Anusuya, V. S. Raghavan, and G. Kavitha, "Lossless Compression on MRI Images Using SWT," *J. Digit. Imaging* **27** (5), 594–600 (2014).
10. J. Taquet and C. Labit, "Hierarchical Oriented Predictions for Resolution Scalable Lossless and Near-Lossless Compression of CT and MRI Biomedical Images," *IEEE Trans. Image Process.* **21** (5), 2641–2652 (2012).
11. R. Pizzolante and B. Carpentieri, "Lossless, Low-Complexity, Compression of Three-Dimensional Volumetric Medical Images via Linear Prediction," in *Proc. 18th Int. Conf. on Digital Signal Processing, Barcelona, Spain, July 1–3, 2013* (IEEE Press, New York, 2013), pp. 1–6.
12. S. Ogawa, T. M. Lee, A. R. Kay, and D. W. Tank, "Brain Magnetic Resonance Imaging with Contrast Dependent on Blood Oxygenation," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **87** (24), 9868–9872 (1990).
13. C. Mulert and L. Lemieux (Eds.), *EEG – fMRI: Physiological Basis, Technique, and Applications* (Springer, Heidelberg, 2010).
14. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets* (SIAM, Philadelphia, 1992).
15. I. V. Oseledets and E. E. Tyrtyshnikov, "Algebraic Wavelet Transform via Quantics Tensor Train Decomposition," *SIAM J. Sci. Comput.* **33** (3), 1315–1328 (2011).
16. V. A. Kazeev and I. V. Oseledets, *The Tensor Structure of a Class of Adaptive Algebraic Wavelet Transforms*, Preprint No. 2013-28 (Swiss Federal Inst. of Technology, Zürich, 2013).
17. I. V. Oseledets, "Tensor-Train Decomposition," *SIAM J. Sci. Comput.* **33** (5), 2295–2317 (2011).
18. I. V. Oseledets, "Approximation of $2^d \times 2^d$ Matrices Using Tensor Decomposition," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **31** (4), 2130–2145 (2010).
19. B. N. Khoromskij, " $O(d \log N)$ -Quantics Approximation of $N-d$ Tensors in High-Dimensional Numerical Modeling," *Constr. Appr.* **34** (2), 257–280 (2011).
20. P. V. Kharyuk and I. V. Oseledets, "WTT Decomposition for the Compression of Array's Families and Its Application to Image Processing," *Vychisl. Metody Programm.* **15**, 229–238 (2014).
21. F. J. Theis and T. Tanaka, "A Fast and Efficient Method for Compressing fMRI Data Sets," in *Lecture Notes in Computer Science* (Springer, Heidelberg, 2005), Vol. 3697, pp. 769–777.
22. C. Taswell, "Wavelet Transform Compression of Functional Magnetic Resonance Image Sequences," in *Proc. Int. Conf. on Signal and Image Processing, Las Vegas, USA, October 28–31, 1998*.
<http://www.toolsmiths.com/docs/sip98.pdf>. Cited October 30, 2014.