

УДК 519.6; 532.5; 551.465

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА АДВЕКЦИИ КОНТУРОВ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ БАРОТРОПНОГО УРАВНЕНИЯ ВИХРЯ

А. А. Баранов¹, М. С. Пермяков²

Рассмотрены различные варианты метода адвекции контуров, представляющего собой лагранжев подход для моделирования двумерных потоков идеальной несжимаемой жидкости. Проведено их сравнение с известным лагранжевым методом контурной динамики. На примере решения баротропного уравнения вихря выполнен анализ точности и вычислительной эффективности указанных методов. Полученные результаты позволяют говорить об эффективности полулагранжева метода адвекции контуров при проведении долгосрочных расчетов в случае, когда отношение размеров расчетной области к характерным масштабам течения невелико либо исходное поле аппроксимируется достаточно большим числом контуров. В подобных условиях данный метод способен достигать более высокой точности при меньших временных затратах.

Ключевые слова: геофизическая гидродинамика, вычислительная гидродинамика, контурная динамика, адвекция контуров.

1. Введение. Большинство потоков, рассматриваемых в геофизической гидродинамике, характеризуются высокими значениями чисел Рейнольдса. При их численном моделировании возникает необходимость разработки методов с минимальной схемной вязкостью. К таким методам относятся разнообразные лагранжевы методы, рассматривающие перенос физических величин отдельными жидкими частицами или элементами.

Основой многих моделей геофизической гидродинамики является уравнение переноса потенциальной завихренности, пространственное распределение которой, в свою очередь, определяет поле скорости потока. Одним из эффективных лагранжевых подходов для решения подобных уравнений переноса является метод адвекции контуров [1–8]. Данный метод представляет собой развитый вариант известного метода контурной динамики [9–16]. На каждом временном шаге его алгоритм может быть условно разделен на два этапа: адвекция завихренности и инверсия поля вихря для получения поля скорости. На этапе адвекции рассматривается перенос частиц на контурах исходного поля, представленных конечным, но масштабируемым набором точек. Основное отличие от метода контурной динамики проявляется на этапе инверсии. В методе адвекции контуров решение задачи инверсии проводится на эйлеровой сетке. Использование сравнительно грубой эйлеровой сетки совместно с более мелкой лагранжевой сеткой, связанной с точками на множестве контуров, позволяет значительно повысить вычислительную эффективность. При этом сохраняются основные достоинства лагранжева подхода: малая схемная вязкость и, как следствие, сохранение тонких структурных элементов потока [2, 5, 6].

Целью настоящей статьи является оценка точности и вычислительной эффективности различных вариантов метода адвекции контуров на примере решения баротропного уравнения вихря, а также их сравнение с методом контурной динамики. В качестве основного критерия сравнения рассматривается способность указанных методов сохранять интегральные характеристики потока, а также временные затраты, требующиеся на выполнение их расчетных схем.

2. Основные уравнения. Моделирование сложных геофизических потоков является весьма трудоемкой в вычислительном плане процедурой. По этой причине часто используются некоторые упрощения математического описания таких процессов, которые учитывают характерный диапазон пространственных и временных масштабов. Когда горизонтальные масштабы движения преобладают над вертикальным масштабом, такого рода потоки носят квазидвумерный характер.

Простейший набор уравнений, описывающих двумерное течение идеальной несжимаемой жидкости,

¹ Дальневосточный федеральный университет, школа естественных наук, ул. Суханова, 8, 690950, г. Владивосток; аспирант, e-mail: armath123@gmail.com

² Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, ул. Балтийская, 43, 690041, г. Владивосток; профессор, зав. лабораторией, e-mail: permyakov@poi.dvo.ru

включает в себя баротропное уравнение вихря

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

и уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega(x, y, t), \quad (2)$$

устанавливающее взаимосвязь между завихренностью ω и функцией тока ψ , которая, в свою очередь, определяет поле скорости потока:

$$u(x, y, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v(x, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Дополняя указанную систему уравнений соответствующими начальными и граничными условиями, получим начально-краевую задачу для нахождения значений вихря и функции тока в любой момент времени.

3. Метод контурной динамики. Метод контурной динамики (МКД, Contour Dynamics Method) представляет собой лагранжев подход для численного моделирования двумерных потоков идеальной несжимаемой жидкости. Первоначально этот метод был введен в контексте моделирования двумерного движения жидкости, описываемого баротропным уравнением вихря, в области с бесконечной протяженностью [9]. В дальнейшем метод был развит для работы с вихревыми движениями на поверхности сферы и цилиндра [13], а также нашел свое применение в решении широкого круга задач геофизической гидродинамики [10, 11, 16].

В отличие от эйлеровых методов, МКД предлагает альтернативный подход к пространственной дискретизации двумерных потоков. Вместо того чтобы разделять конечную область пространства двумерной сеткой (в узлах которой заданы значения поля вихря), диапазон значений завихренности разбивается конечным числом уровней. Каждому такому уровню ставится в соответствие набор изолиний (контуров) исходного поля, представленных конечным числом опорных точек (узлов).

В основе МКД лежит свойство сохранения завихренности на жидких частицах и контурах, при этом каждый набор частиц жидкости, образующих контур, будет оставаться на нем в любой момент времени. В результате набор частиц жидкости, образующих линии контуров, позволяет вычислить скорость течения в любой точке области на основе определения вихря и функции тока (2) и (3).

Следует заметить, что в своем первоначальном виде метод контурной динамики имел два основных недостатка. Во-первых, это невозможность справляться с быстрым ростом числа мелких структур, формирующихся в исходном потоке. Для их адекватного представления алгоритм данного метода должен включать в себя процедуру перераспределения опорных точек в зависимости от формы и длины контуров. В ряде случаев это приводит к катастрофическому росту числа опорных точек. Очень часто подобный рост числа точек контуров связан с формированием большого числа нитевидных структур (филаментов) в поле потенциальной завихренности, вклад которых в общую динамику потока, как правило, незначителен.

Вторым недостатком является высокая вычислительная сложность при расчете скоростей в опорных точках контуров, порядка $O(N^2)$, где N — общее число узлов на контурах, которое требуется на каждом временном шаге. В сочетании с быстрым ростом числа узлов это может привести к фактической остановке вычислений.

В дальнейшем вычислительный алгоритм МКД был дополнен процедурой перестройки контуров (хирургией) [12, 17], которая решает проблему быстрого роста числа узлов путем удаления деталей контуров, меньших заданного масштаба. Соответствующий модифицированный алгоритм получил название метода контурной динамики с хирургией (МКДХ) [12, 13]. Следует отметить, что сама по себе хирургия также является достаточно трудоемкой процедурой, что может в значительной степени повлиять на скорость вычислений. В связи с этим, авторами настоящей статьи был предложен оригинальный вариант хирургии, требующий порядка $O(N)$ операций, где N — общее число узлов на всех контурах (подробное его описание можно найти в [18]).

В разное время также предпринимались попытки увеличить скорость расчетов контурной динамики путем ускорения процедуры инверсии [14, 15]. Здесь особо следует отметить метод адвекции контуров [1, 2], который будет подробно рассмотрен в следующем разделе этой статьи.

4. Метод адвекции контуров. Метод адвекции контуров (МАК) [1, 2] является одним из модифицированных вариантов МКД. Он представляет собой комбинированный алгоритм, основанный на использовании контуров и эйлеровой сетки, жестко привязанной к расчетной области. Данный метод

был разработан с целью повышения эффективности МКД за счет ускорения этапа инверсии, при этом он сохраняет основные достоинства лагранжева подхода (такие как воспроизведение тонких структур переносимых полей).

Как и в МКД, поле вихря здесь определено на множестве подвижных контуров. Контур, в свою очередь, состоит из конечного числа частиц жидкости, отождествляемых с некоторым множеством опорных точек. Однако в отличие от МКД значения скоростей вычисляются не в каждой точке контура (число которых меняется со временем), а лишь для фиксированного набора узлов пространственной сетки, жестко привязанной к расчетной области. Полученное таким образом сеточное представление поля скорости используется при интерполяции скоростей от сетки к опорным точкам контуров.

Различные варианты МАК могут отличаться способом расчета скоростей в узлах пространственной сетки. Первый вариант такой схемы был ранее описан в работе [1]. В дальнейшем будем называть его лагранжевым методом адвекции контуров (Ляг.МАК). Суть его заключается в применении той же техники расчета поля скорости, которая используется в МКД. В целях оптимизации указанная процедура применяется только в тех узлах сетки, которые используются при интерполяции к опорным точкам контуров. Выигрыш достигается тогда, когда средний шаг вдоль контура не превосходит шаг пространственной сетки.

Другим вариантом такого метода является полулагранжев метод адвекции контуров (Пол.МАК), впервые предложенный в работе [2]. Метод Пол.МАК предусматривает дополнительный шаг, который состоит в преобразовании лагранжева (контурного) представления поля вихря в эйлерово (сеточное) представление. Иначе говоря, выполняется интерполяция поля вихря, заданного набором своих контуров, на двумерную эйлерову сетку, где скорости рассчитываются с использованием некоторых сеточных методов (таких как конечно-разностные или псевдоспектральные методы).

Изначально данный метод применялся для решения уравнений, описывающих многослойные квазигеострофические течения в области с двойной периодичностью на границе [2]. В дальнейшем он был развит для моделирования потоков на поверхности сферы, в цилиндрической области и в периодическом канале [3, 4]. В последние годы этот метод получил свое развитие в виде комбинированных расчетных схем [5–8], предназначенных для решения задачи переноса завихренности при наличии разного рода источников и стоков.

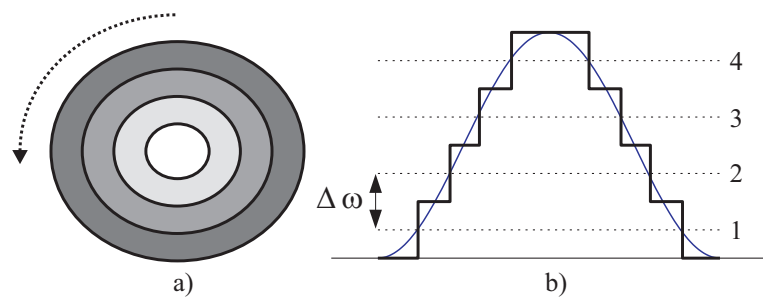


Рис. 1. Представление поля вихря заданным числом уровней:
 б) контуры исходного поля и направление обхода;
 а) соответствующие им уровни завихренности

5. Вычислительный алгоритм. Вычислительная схема рассмотренных выше методов может быть условно разделена на два блока: адвекция контуров (с их последующей корректировкой) и инверсия поля вихря для получения скоростей в опорных точках контура. При этом первый блок является общим для всех методов, в то время как второй блок будет различаться. Ниже описаны основные этапы указанной схемы для решения задачи из предыдущего раздела.

5.1. Адвекция контуров. В лагранжевом представлении поле вихря задается набором своих контуров (изолиний), связанных с подвижными частицами жидкости:

$$C(z, t) = \{(x, y) : \omega(x, y, t) = z\},$$

где z — текущее значение уровня завихренности. В дискретном случае выбирается конечный набор значений уровней $\omega_{l+1} = \omega_l + \Delta\omega_l, l = 1, 2, \dots, n_z - 1$, где $\Delta\omega_l$ — шаг квантования.

Вопросы, связанные с построением контуров, оставим за рамками данной статьи. Отметим, что множество контуров C_l , соответствующих некоторому значению уровня ω_l , может состоять из нескольких не связанных между собой частей. Среди них могут встречаться как замкнутые контуры (целиком лежащие внутри расчетной области), так и незамкнутые (концы которых лежат на границе области). Одним из основных приближений здесь является кусочно-постоянное распределение поля вихря. В этом случае контуры будут представлять собой границы, разделяющие регионы с разными значениями завихренности. При этом на всех контурах необходимо установить одинаковое направление обхода, такое, чтобы значение завихренности слева от контура было больше, чем значение справа (рис. 1).

Каждый контур, в непрерывном случае состоящий из бесконечного набора точек, связанных с выделенными частицами жидкости, в дискретном виде представляется конечным числом опорных точек,

называемых также узлами контура [10, 13]: $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Таким образом, задача адвекции контура сводится к расчету переноса частиц жидкости, связанных с его опорными точками:

$$\frac{dx_i}{dt} = u(x_i, y_i, t), \quad \frac{dy_i}{dt} = v(x_i, y_i, t).$$

Начальные условия $x_i(0) = x_i^0$, $y_i(0) = y_i^0$ предполагаются известными. Для решения полученной задачи Коши воспользуемся методом Рунге–Кутты 4-го порядка.

5.2. Коррекция контуров. Коррекция контуров заключается в перераспределении опорных точек контура на основе их аппроксимации локальными (или нелокальными) сплайнами [9, 10, 12], а также в устранении деталей (особенностей) контуров, меньших заданного масштаба.

Как уже упоминалось выше, в дискретном случае контур представляется множеством своих опорных точек. В некоторых случаях может потребоваться его аппроксимация непрерывной кривой. В настоящей статье мы будем рассматривать вариант, когда сегмент контура между двумя последовательными опорными точками j и $j + 1$ представляется в виде

$$\mathbf{X}(p) = \mathbf{X}_j + pt_j + H_j(p)\mathbf{n}_j,$$

где $\mathbf{t}_j = \mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j = (a_j, b_j)$ и $\mathbf{n}_j = (-b_j, a_j)$ образуют базис, $p \in [0, 1]$ и $H_j(p)$ — отклонение контура от прямого отрезка, соединяющего точки j и $j + 1$.

Для интерполяции $H_j(p)$ используется локальный кубический сплайн $H_j(p) = \alpha_j p + \beta_j p^2 + \gamma_j p^3$, коэффициенты которого рассчитываются по его кривизне в опорных точках контура [2, 12]:

$$\alpha_j = -d_j \left(\frac{1}{3} K_j + \frac{1}{6} K_{j+1} \right), \quad \beta_j = \frac{1}{2} d_j K_j, \quad \gamma_j = \frac{1}{6} d_j (K_{j+1} - K_j).$$

Здесь K_j — кривизна контура в точке \mathbf{X}_j , полученная путем проведения дуги окружности по трем точкам $j - 1$, j и $j + 1$, а $d_j = |\mathbf{t}_j|$ — расстояние между точками j и $j + 1$.

С течением времени в процессе переноса контуры скалярного поля могут деформироваться, при этом расстояние между их опорными точками будет увеличиваться либо уменьшаться. Как следствие, возникают участки, которые не могут быть достаточно точно представлены имеющимся набором узлов. Тогда возникает необходимость в обновлении опорных точек контура на каждом временном шаге. Их распределение контролируется функцией плотности узлов ρ , которая может быть определена следующим образом: $N = \oint_C \rho dl$, где N —

число узлов на контуре C , а dl — дифференциал длины дуги. В дискретном случае, применяя составную формулу трапеций, получим выражение $N = \sum_{j=1}^n \rho_j d_j$, где ρ_j — средняя плотность распределения точек контура между узлами j и $j + 1$.

Полученное соотношение позволяет рассчитать положения новых узлов, определяемых текущим интервалом j и значением безразмерного параметра $p \in (0, 1)$.

Для вычисления средней плотности распределения узлов на каждом интервале могут использоваться различные подходы. Так, в работах [10, 17] используется постоянный шаг вдоль контура, при этом значение средней плотности $\rho_i = 1/h$ постоянно для всех $i = 1, 2, \dots, N$. Второй способ [2, 12] предлагает использовать степенную зависимость плотности узлов от значений кривизны контура. Плотность распределения узлов контура, пропорциональная кривизне, позволяет достаточно хорошо описывать детали в широком диапазоне масштабов. По этой причине далее в нашей работе будем использовать формулы для средней плотности ρ_i , приведенные в [2]. Согласно этим формулам, шаг между опорными точками контуров варьируется в диапазоне от $\delta/2$ до μL , где δ — масштаб хирургии, L — характерный размер

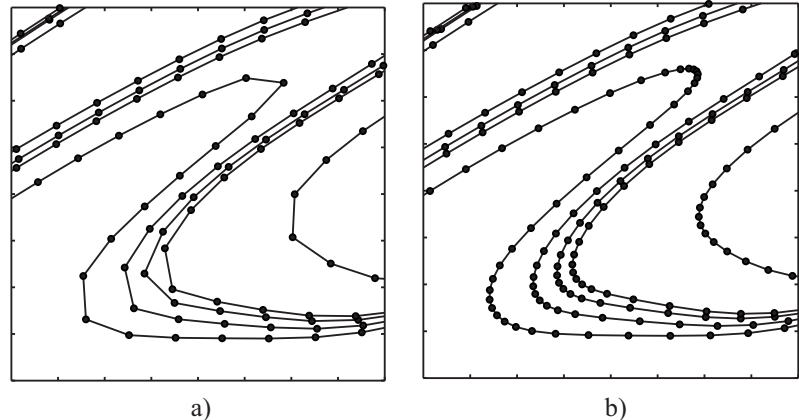


Рис. 2. Положение опорных точек на контуре до (а) и после (б) выполнения процедуры перераспределения

крупномасштабных структур потока, $\mu \in (0, 1)$ — безразмерный параметр перераспределения. При этом имеет место следующее соотношение: $\delta = \mu^2 L/4$. Результат работы такой процедуры демонстрирует рис. 2. Как можно видеть, наиболее плотные скопления опорных точек возникают на участках контуров с высокими значениями кривизны. Это, в свою очередь, позволяет лучшим образом адаптировать разрешение контуров вблизи мелких деталей.

При численном моделировании на достаточно долгий срок в переносимом поле могут возникать разного рода тонкие структуры, масштабы которых с течением времени будут уменьшаться, а для их представления в численной модели будет требоваться все большее число опорных точек на контурах. По этой причине через определенный интервал времени применяется процедура редактирования контуров (вместе с формой и топологией ограничиваемых ими областей) — “хирургия” [12, 17]. Она включает в себя две операции. Первая отвечает за объединение двух близких контуров (либо разбиение одного контура на части). Вторая выполняет устранение чрезмерно тонких нитей (филаментов). Последняя операция также отвечает за удаление отдельных контуров с числом узлов меньше заданного порогового значения. Параметры хирургии устанавливают минимальный масштаб мелких структур потока, тем самым ограничивая рост числа опорных точек на контурах. Помимо этого, данная процедура также способна предотвращать самопересечения контуров, которые могут возникать при расчете их переноса [1, 19, 20]. Когда расстояние между сегментами контуров становится меньше масштаба хирургии δ , контуры или части одного контура (в зависимости от обстоятельств) должны быть объединены [12]. Таким образом, либо один контур разбивается на части, либо отдельные контуры сливаются вместе. Отметим, что операции слияния и разбиения алгоритмически неразличимы и могут быть объединены в одну операцию “связывания” контуров [18]. Данная операция допустима только между контурами, соответствующими одинаковым уровням скалярного поля.

5.3. Расчет поля скорости в МКД. В МКД скорости перемещения жидких частиц определяются текущим положением контуров завихренности и вычисляются путем суммирования контурных интегралов [12, 13]

$$u(x, y) = - \sum_k \Delta\omega_k \oint_{C_k} G(x, y; \xi, \eta) d\xi, \quad v(x, y) = - \sum_k \Delta\omega_k \oint_{C_k} G(x, y; \xi, \eta) d\eta,$$

где $\Delta\omega_k$ — скачок завихренности при переходе через контур C_k , (ξ, η) — координаты точек контура и $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина, вид которой зависит от конкретной постановки задачи. Так, для области с бесконечно удаленной границей имеет место следующее выражение:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln |(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2|.$$

Еще одним простым вариантом является случай, когда имеет место периодичность по одной из координат (допустим, по x) с заданным периодом L_x . В этом случае функция Грина принимает вид

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln \left| \operatorname{ch} \frac{2\pi(y - \eta)}{L_x} - \cos \frac{2\pi(x - \xi)}{L_x} \right|.$$

В остальных случаях функция Грина может иметь довольно сложный вид, и по этой причине в данной работе мы ограничимся указанными двумя случаями.

Отметим, что для вычисления скоростей во всех опорных точках здесь потребуется $O(N^2)$ операций, где N — общее число опорных точек на всех контурах.

5.4. Расчет поля скорости в МАК. Метод адвекции контуров (МАК) в качестве альтернативы для МКД предлагает выполнять расчет поля скорости в узлах регулярной пространственной сетки, жестко привязанной к расчетной области. Здесь мы будем рассматривать сетку с прямоугольными ячейками. Тогда значения компонент поля скорости в опорных точках контуров могут быть найдены путем двумерной интерполяции из близлежащих узлов такой сетки (в нашем случае используется билинейная интерполяция).

Первый вариант такого метода (Ляг.МАК) использует вышеописанную схему расчета скоростей путем взятия контурных интегралов. В действительности ускорения вышеописанной схемы расчета скоростей можно добиться, если выполнять указанную процедуру не для каждой точки контура (число которых со временем меняется), а лишь для некоторого фиксированного набора точек, связанных с узлами эйлеровой сетки. Вычислительная сложность полученной схемы составляет $O(MN)$, где M — число узлов пространственной сетки, N — общее число точек на контурах. Когда число узлов такой сетки значительно меньше, чем число опорных точек контуров ($M \ll N$), выигрыш очевиден.

Следует отметить, что в целях оптимизации вычислительных затрат значения скоростей должны рассчитываться только в тех узлах, которые будут использованы при интерполяции от сетки к точкам контуров. При этом узлы с уже известными значениями скоростей могут быть особым образом помечены во избежание повторных вычислений. Это может оказаться весьма эффективным в случае, когда точки контуров образуют плотные скопления в отдельно взятых ячейках сетки. Однако если выбранный шаг пространственной сетки меньше среднего расстояния между опорными точками контура, временные затраты для указанного алгоритма могут оказаться значительно выше, чем для МКД. Это обусловлено тем, что на каждую точку контура здесь будет приходиться до четырех узлов пространственной сетки.

Метод Пол.МАК предлагает существенно иной подход к решению поставленной задачи. Здесь расчет поля скорости целиком и полностью происходит в узлах сетки. В отличие от МКД, этот метод может применяться только внутри конечной ограниченной области.

Пусть исходная задача рассматривается в прямоугольной области $D = (a_x, b_x) \times (a_y, b_y)$. Вначале выполняется интерполяция поля вихря от контуров к узлам регулярной эйлеровой сетки, целиком покрывающей такую область. Как уже упоминалось выше, в методе Пол.МАК распределение поля вихря рассматривается как кусочно-постоянное. Тогда каждому контуру C_l можно поставить в соответствие скачок завихренности $\Delta\omega_l$, возникающий при переходе между двумя регионами с разными значениями завихренности. Данный факт позволяет ввести достаточно быструю процедуру интерполяции с контуров на сетку [2].

Рассмотрим точки пересечения контура с какой-либо линией сетки. Скачок завихренности в каждой такой точке будет определяться направлением пересечения (значение завихренности слева от контура всегда больше, чем значение справа). Таким образом, процедура интерполяции сводится к определению всех таких пересечений. После этого значения поля вихря во всех промежуточных узлах (лежащих между ними) находятся путем суммирования соответствующих скачков завихренности от некоторого начального значения (рис. 3).

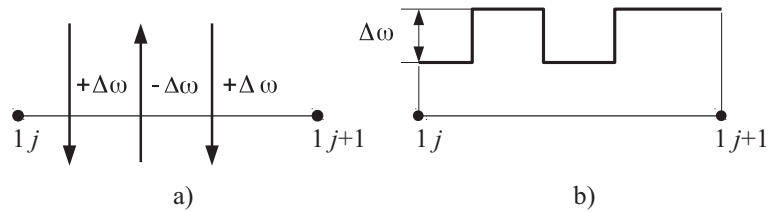


Рис. 3. Каждый контур, проходящий через ребро $(1, j) - (1, j + 1)$, вносит свой вклад в прирост поля вихря при переходе между его вершинами: а) стрелками показаны направления пересечений контуров с текущим ребром; б) прыжки скалярного поля вдоль текущего ребра сетки

Вышеописанная процедура интерполяции требует $O(N + M)$ операций, где N — общее число узлов на контурах, M — число узлов пространственной сетки. Данный метод демонстрирует линейную зависимость от числа опорных точек контура в отличие от МКД, требующего $O(N^2)$ операций. Свой вклад в его вычислительную сложность вносит процедура решения уравнения Пуассона на сетке; сложность этой процедуры в общем случае зависит только от M . Если на границе положить условия двойной периодичности с периодом $L_x = b_x - a_x$ по переменной x и $L_y = b_y - a_y$ по переменной y , то можно применить прямой метод, основанный на быстром преобразовании Фурье (БПФ) [2, 21]. Представим поля вихря, функции тока и скорости в виде усеченных рядов Фурье

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \sum_k \sum_l \Omega_{kl} \varphi_{kl}(x, y), & \psi(x, y) &= \sum_k \sum_l \Psi_{kl} \varphi_{kl}(x, y), \\ u(x, y) &= \sum_k \sum_l U_{kl} \varphi_{kl}(x, y), & v(x, y) &= \sum_k \sum_l V_{kl} \varphi_{kl}(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi_{kl}(x, y) = \exp\{i(\mu_k(x - a_x) + \nu_l(y - a_y))\}$, $\mu_k = \frac{k2\pi}{L_x}$, $\nu_l = \frac{l2\pi}{L_y}$, i — мнимая единица. В этом случае коэффициенты Ω_{kl} могут быть получены путем применения прямого БПФ. Подставляя (4) в исходное уравнение (2), получим следующее выражение для коэффициентов Ψ_{kl} :

$$\Psi_{kl} = -\frac{\Omega_{kl}}{\mu_k^2 + \nu_l^2}.$$

Здесь функция тока ψ определяется с точностью до константы Ψ_{00} , значение которой полагаем равным нулю. Аналогичным образом, используя определение функции тока (3), путем однократного дифференцирования (4) мы получим выражения для коэффициентов U_{kl} и V_{kl} :

$$U_{kl} = -i\mu_l \Psi_{kl}, \quad V_{kl} = i\nu_k \Psi_{kl}.$$

Применив к ним алгоритм обратного БПФ, получим значения компонент поля скорости (u_{ij}, v_{ij}) в узлах сетки.

6. Тесты и результаты. Рассмотрим ряд тестов с целью получения оценок точности и вычислительной эффективности рассмотренных выше методов. Все тестовые расчеты проводились на ПК с процессором AMD Athlon 64 x2 (3.5 GHz).

Прежде всего при решении задачи (1)–(2) требуется задать граничные условия. Это важно, поскольку от выбранных граничных условий существенным образом зависит вид расчетных формул, используемых при решении задачи инверсии. Например, схема расчета поля скорости, используемая в МКД и Лаг.МАК, требует задания подходящей функции Грина.

В дальнейшем для исключения влияния граничных условий на численное решение исходной задачи будем рассматривать ее в области с бесконечной протяженностью. Однако, как уже упоминалось выше, в отличие от МКД и Лаг.МАК расчетная схема метода Пол.МАК может применяться только в такой области, которую можно разбить конечным числом узлов пространственной сетки. В этом случае с целью адекватного сравнения указанных схем для метода Пол.МАК будем рассматривать задачу в области с достаточно удаленной границей. На границе, в свою очередь, положим условия двойной периодичности, что позволит применить достаточно простую схему для инверсии поля вихря (4).

Для оценки точности указанных методов воспользуемся интегральными свойствами уравнения вихря (1). Известно, что для указанного уравнения имеет место сохранение следующих интегральных величин: S — интеграл завихренности по области и J — момент инерции. Для контроля точности в каждый момент времени будем рассматривать абсолютное и относительное отклонение указанных величин от их начальных значений (S_0, J_0) .

Влияние выбранного шага вдоль контура и масштаба хирургии δ на консервативные свойства указанных методов ранее неоднократно рассматривалось [12, 17]. Было показано, что при уменьшении масштаба хирургии наблюдается лучшее сохранение рассматриваемых величин. По этой причине в нашей работе все тесты проводились для фиксированных значений указанных параметров.

В рамках первого теста [17] рассмотрим движение пары эллиптических вихрей с центрами, разнесенными на расстояние $d = 1.5$ и с соотношением сторон 1 к 4. Значение завихренности внутри каждой такой области полагается $\Delta\omega = 2$. Выберем в качестве параметров перераспределения следующие величины: $L = 2$, $\mu L = 0.1$ и $\delta = 0.00125$.

Такая постановка задачи позволяет выделить в исходной области подобласти с постоянным значением завихренности. В этом случае выражения для интегральных инвариантов имеют следующий вид:

$$S = \iint_D \omega(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \sum_k \Delta\omega_k \oint_{C_k} (\xi d\eta - \eta d\xi),$$

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)\omega(x, y) dx dy = \frac{1}{4} \sum_k \Delta\omega_k \oint_{C_k} (\xi^2 + \eta^2)(\xi d\eta - \eta d\xi).$$

Здесь $\Delta\omega_k$ — скачок завихренности при переходе через контур C_k , (ξ, η) — координаты точек контура. Согласно теореме Стокса, интеграл завихренности по области равен циркуляции поля скорости вдоль ее границы:

$$S^* = \iint_D \omega(x, y) dx dy = \sum_k \oint_{C_k} (u d\xi + v d\eta),$$

где (u, v) — компоненты поля скорости в соответствующих точках контура. Поскольку при численном расчете поля скорости в отдельно взятых точках контура неминуемо возникают погрешности, указанные величины могут не совпадать. По этой причине имеет смысл провести ряд экспериментов с целью оценки их согласованности для рассматриваемых численных алгоритмов. В качестве такой оценки будем рассматривать их относительную разность: $(S^* - S)/S$.

На рис. 4 можно наблюдать некоторое запаздывание в динамике вихрей для метода Пол.МАК по сравнению с остальными методами. Это расхождение вызвано прежде всего влиянием границ, которые для методов Лаг.МАК и МКД относятся на бесконечность. Выбирая область с более удаленной границей, нам удалось уменьшить расхождение в результатах. Однако при этом возникала необходимость в использовании более мелкой пространственной сетки, что приводило к значительному увеличению временных затрат для метода Пол.МАК. Стоит отметить, что такого рода вариации размеров расчетной области не оказали значительного влияния на общую тенденцию сохранения интегральных величин. В связи с этим на рис. 4–6 представлены результаты расчетов в области $[-4\pi, 4\pi] \times [-4\pi, 4\pi]$.

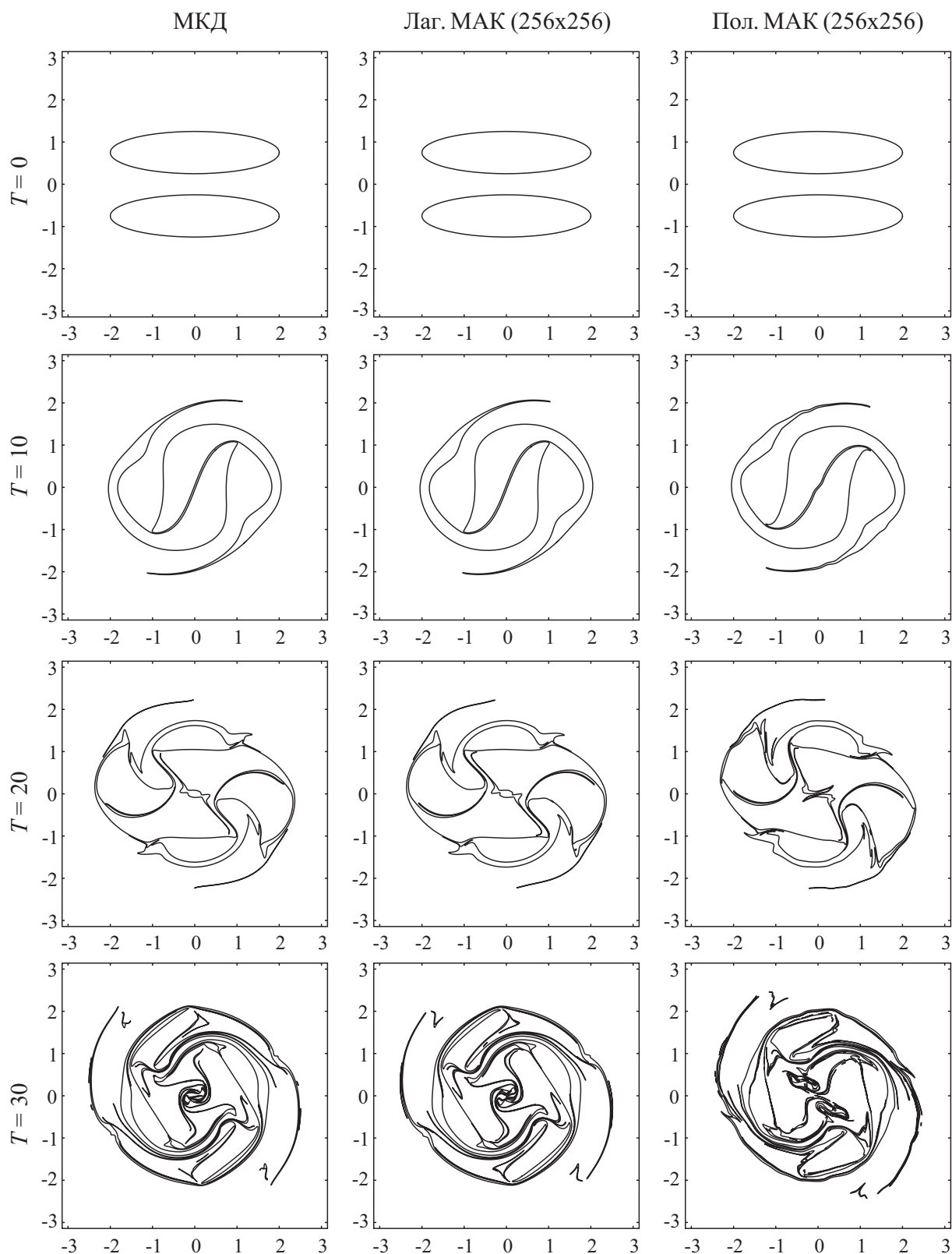


Рис. 4. Результаты численных расчетов (в отдельно взятые моменты времени T), полученные при использовании методов МКД (метод контурной динамики), Лаг.МАК (лагранжев метод адвекции контуров) и Пол.МАК (полулагранжев метод адвекции контуров). Для методов Лаг.МАК и Пол.МАК также указаны размеры пространственной сетки, использовавшейся при выполнении инверсии

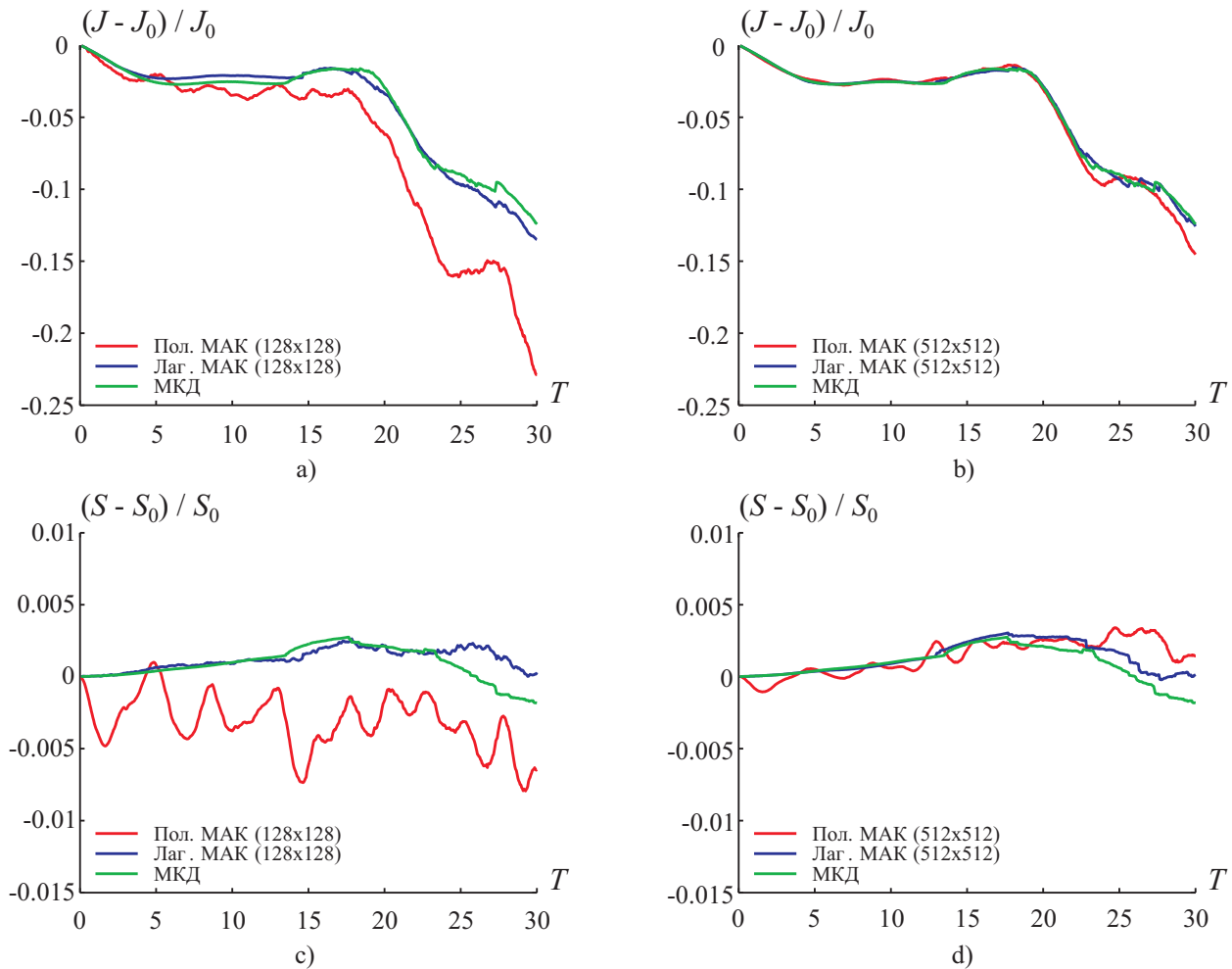


Рис. 5. Временные изменения относительной погрешности момента инерции J и интеграла завихренности S : результаты, полученные для пространственной сетки размерности 128×128 (а и с), результаты для сетки размерности 512×512 (b и d)

Как можно видеть на рис. 5, вплоть до момента времени $T \approx 15$ наблюдаемые значения относительных погрешностей незначительны. Дальнейший рост погрешности обусловлен влиянием процедуры хирургии, которая вносит в расчетную схему эффекты вязкости путем удаления мелких деталей контуров. Относительная погрешность для S здесь не превышает 1%, что превосходит по точности результаты аналогичного теста, представленного в работе [17], где использовался постоянный шаг вдоль контура $h = 0.1$ и общее число узлов не превышало 1000. В нашем же случае максимальный шаг вдоль контура был $\mu L = 0.1$, минимальный шаг $\delta/2 = 0.000625$, а общее число точек на контурах достигало 4000. Кроме того, было замечено, что при измельчении пространственной сетки результаты для Лаг.МАК и Пол.МАК стремятся к результатам, полученным для МКД.

Примечательным является то, что при измельчении пространственной сетки в методе Лаг.МАК мы получили более точное совпадение между значениями циркуляции скорости и интегралом завихренности в сравнении с методом МКД (рис. 6), несмотря на то что в обоих методах использовалась одна и та же методика расчета поля скорости, использующая функцию Грина. Причина такого результата может быть связана с сингулярным характером функции Грина в каждой точке контура. Это может приводить к высоким погрешностям численного интегрирования вблизи интересующей нас точки контура в расчетной схеме МКД. Однако в методе Лаг.МАК расчет скоростей происходит не в самой точке контура, а лишь в некоторой ее окрестности, что позволяет избежать указанной особенности и минимизировать численную ошибку. Как можно видеть из рис. 6, метод Пол.МАК при эквивалентных МКД временных затратах позволяет добиться лучшей согласованности для указанных величин.

Еще одним немаловажным фактором, оказывающим влияние на скоростные характеристики рассматриваемых методов, является число уровней квантования диапазона значений завихренности. В рамках

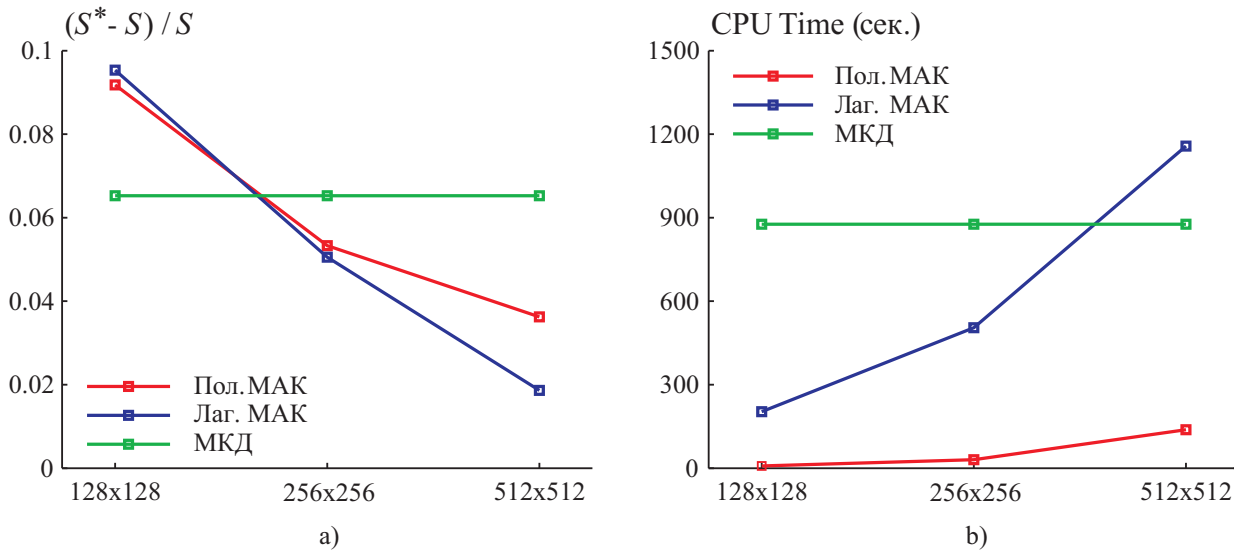


Рис. 6. Согласованность между циркуляцией скорости S^* и интегралом завихренности S в начальный момент времени (а); суммарное время (в секундах), затраченное на выполнение процедуры инверсии (б). Представлены результаты, полученные при различном числе узлов пространственной сетки

следующего теста рассмотрим случай с непрерывным распределением завихренности [3]:

$$\omega(x, y, 0) = \begin{cases} 10 \operatorname{sign}(\hat{y}) \left(0.5 - \left| |\hat{y}| - 0.5 \right| \right), & \text{если } |\hat{y}| < 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\hat{y} = y - 0.1(\sin(2x) - \sin(3x))$. Выберем периодические условия по направлению x с периодом 2π . Таким образом, для метода Пол.МАК размеры расчетной области уменьшаются в три раза (в сравнении с предыдущим тестом), что позволит нам использовать более мелкую пространственную сетку.

Здесь следует отметить наличие контуров, которые замыкаются только через границу расчетной области. Такие контуры не являются замкнутыми в привычном смысле, так как каждый из них в отдельности представляет собой лишь часть границы некоторой конечной области, лежащей на поверхности цилиндра. В этом случае такая область будет представлять собой опоясывающую цилиндр ленту, заключенную между двумя контурами, принадлежащими одному уровню. По этой причине для указанных контуров формулы расчета интегральных инвариантов примут следующий вид [13]:

$$S = - \sum_k \Delta \omega_k \oint_{C_k} \eta d\xi.$$

На рис. 7 представлены результаты расчетов методами Лаг.МАК и Пол.МАК при фиксированном числе узлов пространственной сетки и количестве уровней завихренности $n_z = 2$. На рис. 8, в свою очередь, показана зависимость временных затрат указанных методов от выбранного числа уровней (и связанных с ними контуров) при фиксированном числе узлов пространственной сетки. Разрешение пространственной сетки для методов Лаг.МАК и Пол.МАК здесь подбиралось таким образом, чтобы выровнять значения абсолютной погрешности для S . Можно заметить, что временные затраты метода Пол.МАК здесь существенно ниже, так как его производительность в меньшей степени зависит от числа контуров (в отличие от Лаг.МАК и МКД).

7. Выводы. Было проведено сравнение различных вариантов контурных методов для численного моделирования двумерных потоков идеальной несжимаемой жидкости: метод контурной динамики (МКД), лагранжев метод адвекции контуров (Лаг.МАК) и полулагранжев метод адвекции контуров (Пол.МАК).

Методы МКД и Лаг.МАК являются бессеточными и не связаны с конечной областью пространства. Однако при проведении долгосрочных расчетов, приводящих к достаточно быстрому развитию мелко-масштабных структур, указанные методы демонстрируют значительный спад вычислительной производительности. Это вызвано, прежде всего, квадратичной зависимостью процедуры инверсии от растущего

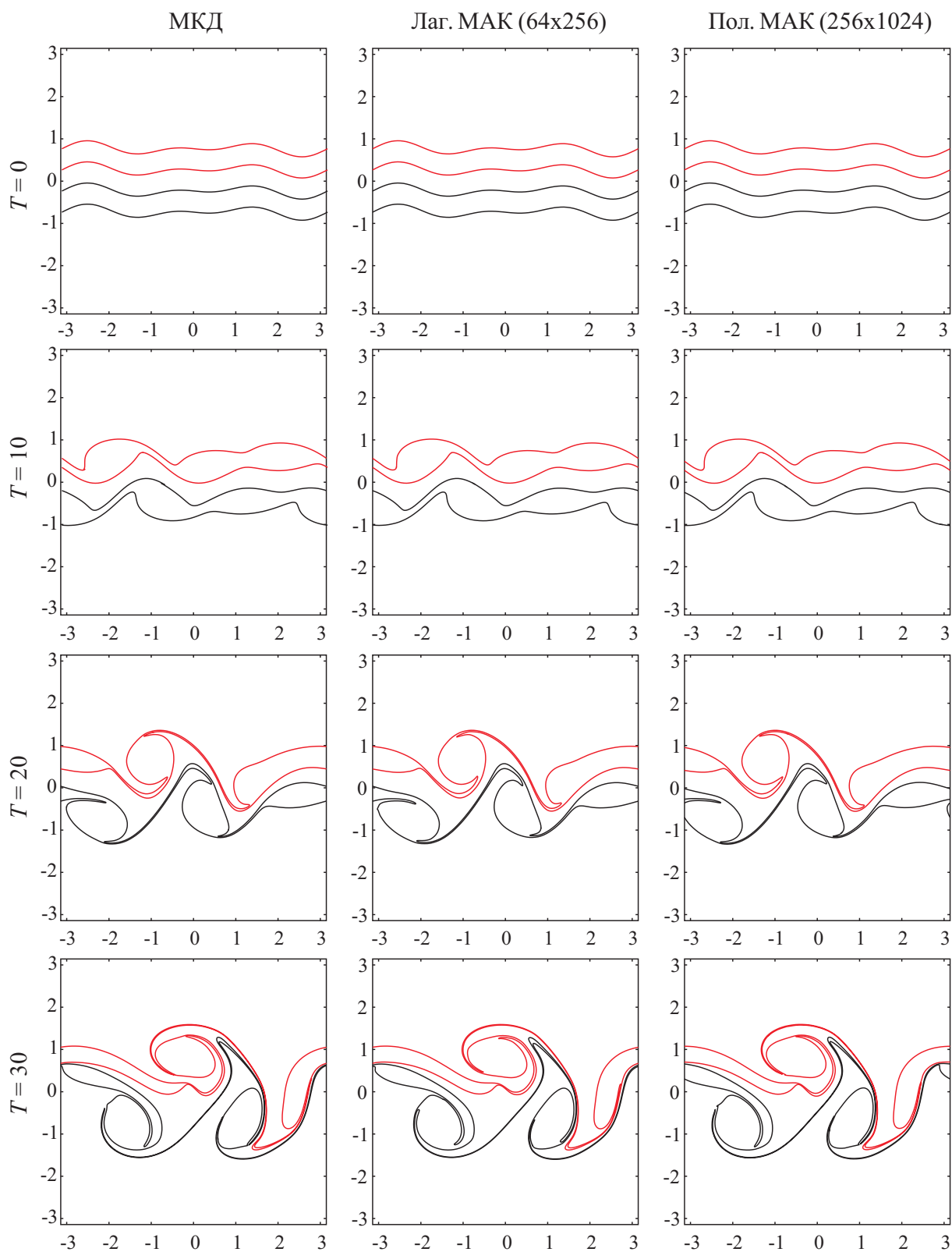


Рис. 7. Результаты численных расчетов (в отдельно взятые моменты времени T), полученные при использовании методов МКД (метод контурной динамики), Лаг.МАК (лагранжев метод адвекции контуров) и Пол.МАК (полулагранжев метод адвекции контуров). Для методов Лаг.МАК и Пол.МАК также указаны размеры пространственной сетки, использовавшейся для выполнения инверсии.

Здесь использовалось число уровней завихренности $n_z = 2$

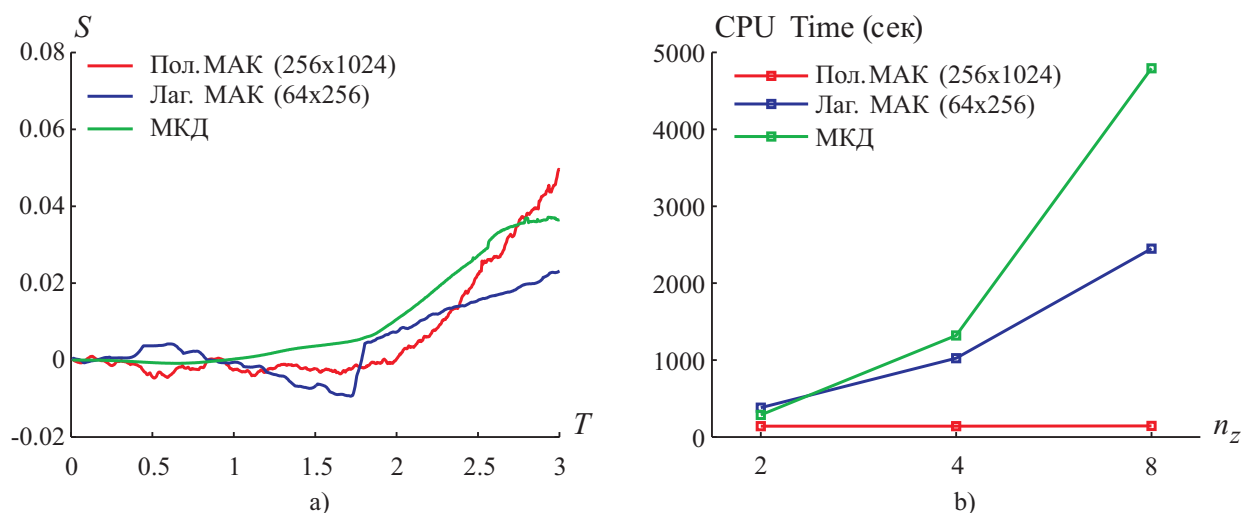


Рис. 8. Временные изменения абсолютной погрешности для интеграла завихренности S (a) и суммарное время (в секундах), затраченное на выполнение процедуры инверсии в зависимости от выбранного числа уровней завихренности n_z (b)

числа опорных точек контуров. Применение указанных методов также усложняется необходимостью подбора подходящей функции Грина.

В представленных тестах для исключения влияния границ мы рассматривали задачу в области с достаточно удаленной границей, при этом для достижения необходимой точности требовалось использовать более мелкую сетку по области. Временные затраты метода Пол.МАК зависят от числа узлов сетки. Поэтому, выбирая достаточно большую область и, следовательно, более мелкую сетку, мы наблюдали спад вычислительной производительности метода Пол.МАК в сравнении с Лаг.МАК и МКД. Однако при решении задачи в ограниченной области, когда отношение размеров области к крупномасштабным структурам потока невелико, метод Пол.МАК является более приемлемым, поскольку при эквивалентных временных затратах способен достигать той же точности, что и бессеточные схемы Лаг.МАК и МКД. При этом метод Пол.МАК способен достаточно быстро справляться с расчетами в случае, когда исходное поле аппроксимируется большим числом контуров, так как основные его расчеты проводятся на пространственной сетке. В этой связи можно говорить о высокой эффективности метода Пол.МАК, который позволяет устранить квадратичную зависимость процедуры инверсии от общего числа узлов на контурах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-05-31011-мол_a) и Дальневосточного отделения РАН (проекты 12-I-II-19-02 и 12-III-A-07-051).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Waugh D. W., Plumb R. A. Contour advection with surgery: a technique for investigating finescale structure in tracer transport // Journal of the Atmospheric Sciences. 1994. **51**, N 4. 530–540.
2. Dritschel D. G., Ambaum M. H. P. A contour-advective semi-Lagrangian numerical algorithm for simulating fine-scale conservative dynamical fields // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1997. **123**, N 540. 1097–1130.
3. Dritschel D. G., Polvani L. M., Mohebalhojeh A. R. The contour-advective semi-Lagrangian algorithm for the shallow water equations // Monthly Weather Review. 1999. **127**, N 7. 1151–1165.
4. Macaskill C., Padden W. E. P., Dritschel D. G. The CASL algorithm for quasi-geostrophic flow in a cylinder // Journal of Computational Physics. 2003. **188**, N 1. 232–251.
5. Dritschel D. G., Ambaum M. H. P. The diabatic contour advective semi-Lagrangian model // Monthly Weather Review. 2006. **134**, N 9. 2503–2514.
6. Fontane J., Dritschel D. G. The HyperCASL algorithm: a new approach to the numerical simulation of geophysical flows // Journal of Computational Physics. 2009. **228**, N 17. 6411–6425.
7. Mohebalhojeh A. R., Dritschel D. G. The diabatic contour-advective semi-Lagrangian algorithms for the spherical shallow water equations // Monthly Weather Review. 2009. **137**, N 9. 2979–2994.
8. Dritschel D. G., Fontane J. The combined Lagrangian advection method // Journal of Computational Physics. 2010. **229**, N 14, 5408–5417.
9. Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions // Journal of Computational Physics. 1979. **30**, N 1. 96–106.

10. Козлов В.Ф. Метод контурной динамики в модельных задачах о топографическом циклогенезе в океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. **19**, № 8. 845–854.
11. Козлов В.Ф. Метод контурной динамики в океанологических исследованиях: результаты и перспективы // Морской гидрофизический журнал. 1985. № 4. 10–14.
12. Dritschel D.G. Contour surgery: a topological reconnection scheme for extended integrations using contour dynamics // Journal of Computational Physics. 1988. **77**, N 1. 240–266.
13. Dritschel D.G. Contour dynamics and contour surgery: numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows // Computer Physics Reports. 1989. **10**, N 3. 77–146.
14. Dritschel D.G. A fast contour dynamics method for many-vortex calculations in two-dimensional flows // Physics of Fluids. 1993. **5**, N 1. 173–186.
15. Vosbeek P.W.C., Clercx H.J.H., Mattheij R.M.M. Acceleration of contour dynamics simulations with a hierarchical-element method // Journal of Computational Physics. 2000. **161**, N 1. 287–311.
16. Соколовский М.А., Веррон Ж. Динамика вихревых структур в стратифицированной вращающейся жидкости. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.
17. Макаров В.Г. Вычислительный алгоритм метода контурной динамики с изменяемой топологией исследуемых областей // Моделирование в механике. 1991. **5**, № 4. 83–95.
18. Баранов А.А., Пермяков М.С. Ускоренный алгоритм изменения топологии для метода адвекции контуров // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 75–87.
19. Schaerf T.M., Macaskill C. On contour crossings in contour-advective simulations — part 1 — algorithm for detection and quantification // Journal of Computational Physics. 2012. **231**, N 2. 465–480.
20. Schaerf T.M., Macaskill C. On contour crossings in contour-advective simulations — part 2 — analysis of crossing errors and methods for their prevention // Journal of Computational Physics. 2012. **231**, N 2. 481–504.
21. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л.: Гидрометеоздат, 1982.

Поступила в редакцию
05.05.2014

Analysis of Accuracy and Computational Efficiency of the Contour Advection Method for the Barotropic Vorticity Equation

A. A. Baranov¹ and M. S. Permyakov²

¹ Far Eastern Federal University, School of Natural Sciences; ulitsa Sukhanova 8, Vladivostok, 690950, Russia; Graduate Student, e-mail: armath123@gmail.com

² Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences; ulitsa Baltiiskaya 43, Vladivostok, 690041, Russia; Professor, Head of Laboratory, e-mail: permyakov@poi.dvo.ru

Received May 5, 2014

Abstract: The accuracy and computational efficiency of contour advection schemes for the simulation of two-dimensional inviscid incompressible flows are analyzed. Their comparison with the contour dynamics method is performed. The results obtained show that the semi-Lagrangian contour advection algorithm is very efficient when the relation of the domain size to the characteristic length of the flow is small or when the vorticity field is approximated by a large number of contours. This approach allows one to achieve a higher accuracy with an increase in computational cost.

Keywords: geophysical hydrodynamics, computational hydrodynamics, contour dynamics, contour advection.

References

1. D. W. Waugh and R. A. Plumb, “Contour Advection with Surgery: A Technique for Investigating Finescale Structure in Tracer Transport,” J. Atmos. Sci. **51** (4), 530–540 (1994).
2. D. G. Dritschel and M. H. P. Ambaum, “A Contour-Advective Semi-Lagrangian Numerical Algorithm for Simulating Fine-Scale Conservative Dynamical Fields,” Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. **123** (540), 1097–1130 (1997).

3. D. G. Dritschel, L. M. Polvani, and A. R. Mohebalhojeh, “The Contour-Advective Semi-Lagrangian Algorithm for the Shallow Water Equations,” *Mon. Wea. Rev.* **127** (7), 1151–1165 (1999).
4. C. Macaskill, W. E. P. Padden, and D. G. Dritschel, “The CASL Algorithm for Quasi-Geostrophic Flow in a Cylinder,” *J. Comput. Phys.* **188** (1), 232–251 (2003).
5. D. G. Dritschel and M. H. P. Ambaum, “The Diabatic Contour Advective Semi-Lagrangian Model,” *Mon. Wea. Rev.* **134** (9), 2503–2514 (2006).
6. J. Fontane and D. G. Dritschel, “The HyperCASL Algorithm: A New Approach to the Numerical Simulation of Geophysical Flows,” *J. Comput. Phys.* **228** (17), 6411–6425 (2009).
7. A. R. Mohebalhojeh and D. G. Dritschel, “The Diabatic Contour-Advective Semi-Lagrangian Algorithms for the Spherical Shallow Water Equations,” *Mon. Wea. Rev.* **137** (9), 2979–2994 (2009).
8. D. G. Dritschel and J. Fontane, “The Combined Lagrangian Advection Method,” *J. Comput. Phys.* **229** (14), 5408–5417 (2010).
9. N. J. Zabusky, M. H. Hughes, and K. V. Roberts, “Contour Dynamics for the Euler Equations in Two Dimensions,” *J. Comput. Phys.* **30** (1), 96–106 (1979).
10. V. F. Kozlov, “The Contour Dynamics Method in Model Problems of the Ocean Topographic Cyclogenesis,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Atmos. Okeana* **19** (8), 845–854 (1983).
11. V. F. Kozlov, “The Contour Dynamics Method in Oceanographic Studies: Results and Prospects,” *Morsk. Gidrofiz. Zh.*, No. 4, 10–14 (1985).
12. D. G. Dritschel, “Contour Surgery: A Topological Reconnection Scheme for Extended Integrations Using Contour Dynamics,” *J. Comput. Phys.* **77** (1), 240–266 (1988).
13. D. G. Dritschel, “Contour Dynamics and Contour Surgery: Numerical Algorithms for Extended, High-Resolution Modelling of Vortex Dynamics in Two-Dimensional, Inviscid, Incompressible Flows,” *Comput. Phys. Rep.* **10** (3), 77–146 (1989).
14. D. G. Dritschel, “A Fast Contour Dynamics Method for Many-Vortex Calculations in Two-Dimensional Flows,” *Phys. Fluids* **5** (1), 173–186 (1993).
15. P. W. C. Vosbeek, H. J. H. Clercx, and R. M. M. Mattheij, “Acceleration of Contour Dynamics Simulations with a Hierarchical-Element Method,” *J. Comput. Phys.* **161** (1), 287–311 (2000).
16. M. A. Sokolovskii and J. Verron, *Dynamics of Vortex Structures in Stratified Rotating Fluids* (Inst. Komp’yut. Issled., Izhevsk, 2011) [in Russian].
17. V. G. Makarov, “The Numerical Algorithm of the Method of Contour Dynamics with Varying Topology of Investigated Domains,” *Model. Mekh.* **5** (4), 83–95 (1991).
18. A. A. Baranov and M. S. Permyakov, “An Accelerated Topology Change Algorithm for the Contour Advection Method,” *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 75–87 (2013).
19. T. M. Schaerf and C. Macaskill, “On Contour Crossings in Contour-Advective Simulations — Part 1 — Algorithm for Detection and Quantification,” *J. Comput. Phys.* **231** (2), 465–480 (2012).
20. T. M. Schaerf and C. Macaskill, “On Contour Crossings in Contour-Advective Simulations — Part 2 — Analysis of Crossing Errors and Methods for Their Prevention,” *J. Comput. Phys.* **231** (2), 481–504 (2012).
21. F. Mesinger and A. Arakawa, *Numerical Methods Used in Atmospheric Models* (World Meteorol. Org., Geneva, 1979; Gidrometizdat, Leningrad, 1982), Vol. 2.