

УДК 519.62

О РЕШЕТОЧНОЙ СХЕМЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ РАСЧЕТОВ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Г. В. Кривовичев¹

Предложена решеточная схема Больцмана для проведения расчетов на неструктурированных сетках. Схема основана на применении метода конечных элементов в сочетании с методом Галеркина. Программная реализация алгоритма расчета по схеме осуществлена в пакете `freefem++ v. 3.20`. Возможность применения схемы для решения практических задач показана на при решении двух тестовых задач вычислительной гидродинамики. Исследована возможность применения равновесных граничных условий для функций распределения при числах Рейнольдса меньше 100.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, неструктурированные сетки, метод конечных элементов.

1. Введение. Метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) [1, 2] широко используется при решении различных задач механики жидкости и газа. Популярность метода LBM во многом связана с простотой его алгоритма и широкими возможностями для распараллеливания вычислений. Метод практически идеально подходит для реализации на многопроцессорных графических ускорителях с использованием технологии CUDA [3–9], что в настоящее время является весьма актуальным. При реализации на многопроцессорных и распределенных системах этот метод демонстрирует увеличение производительности по сравнению с конечно-разностными методами решения уравнений гидродинамики и методом сглаженных частиц [8, 10]. Большими преимуществами метод LBM обладает при моделировании течений многофазных сред [6, 7, 11] и течений со свободными поверхностями [12, 13].

Для большинства предложенных схем, применяемых в рамках метода LBM, характерно проведение расчетов на структурированных сетках (например, см. [1–3, 8]). В ряде задач о течении в областях со сложными криволинейными границами это может приводить к неточному воспроизведению формы границы или к необходимости использования сеток с очень мелким шагом. Примерами подобных задач являются задачи о течении крови в кровеносных сосудах [14–16] и задачи о течении в пористых средах [17].

В ряде работ для исправления указанного недостатка были предложены решеточные схемы Больцмана (Lattice Boltzmann schemes, LB-схемы). Такие схемы основаны на дискретизации системы уравнений, полученной из кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) методом дискретных скоростей Бродуэлла [18] с помощью известных методов дискретизации.

Настоящая работа посвящена LB-схеме для возможности проведения расчетов на неструктурированных сетках. Схема основана на применении метода конечных элементов. Возможность использования этой схемы на практике показана при решении двух тестовых задач вычислительной гидродинамики. Программная реализация схемы произведена с использованием средств пакета `freefem++ v. 3.20` [19].

2. Решеточные уравнения Больцмана и LB-схемы. В рамках метода LBM среда представляется ансамблем псевдочастиц, каждая из которых имеет конечное число возможных скоростей. Область, в которой происходит течение среды, разбивается сеткой с ячейками одинаковой формы, что задает в ней решетку (lattice). За шаг по времени δt псевдочастицы без взаимодействия друг с другом переходят между узлами решетки. Взаимодействие между ними может осуществляться лишь в узлах.

В дальнейшем будем рассматривать только плоские изотермические течения в случае отсутствия внешних сил. Будем использовать решетку с ячейками в форме квадрата со стороной длины l и набор скоростей $D2Q9$ [1, 2]: $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, 9$, где $V = l/\delta t$, а \mathbf{v}_i задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (1, 0), & \mathbf{v}_3 &= (0, 1), & \mathbf{v}_4 &= (-1, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, -1), \\ \mathbf{v}_6 &= (1, 1), & \mathbf{v}_7 &= (-1, 1), & \mathbf{v}_8 &= (-1, -1), & \mathbf{v}_9 &= (1, -1). \end{aligned}$$

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; доцент, e-mail: gega1983k@bk.ru

Динамика ансамбля псевдочастиц на решетке описывается системой разностных уравнений следующего вида (решеточные уравнения Больцмана, Lattice Boltzmann Equations, далее LBE):

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = -\frac{1}{\tau} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(\text{eq})}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ — радиус-вектор узла решетки; t_j — узел временной равномерной сетки, построенной с шагом δt ; f_i , $i = 1, \dots, 9$, — функции распределения псевдочастиц со скоростями \mathbf{V}_i ; $\tau = \lambda/\delta t$; λ — характерное время релаксации; $f_i^{(\text{eq})}$ — приближенные равновесные функции распределения.

Система (1) может быть получена разными способами — как обобщение модели решеточного газа [2] или же посредством дискретизации уравнения БГК по времени и в фазовом пространстве [20, 21]. В последнем случае на первом этапе осуществляется дискретизация уравнения БГК в пространстве скоростей (с использованием метода дискретных скоростей Бродуэлла [18]), в результате чего уравнение БГК сводится к следующей системе уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + V_{ix} \frac{\partial f_i}{\partial x} + V_{iy} \frac{\partial f_i}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(\text{eq})}). \quad (2)$$

Эта система затем дискретизируется по времени и пространственным переменным.

Значения таких макроскопических переменных, как скорость среды $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ и ее плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ вычисляются по формулам [1, 2]

$$\rho(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^9 f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}), \quad \rho(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{u}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}). \quad (3)$$

В настоящей статье будем рассматривать только случай малых значений безразмерного параметра $M = |\mathbf{u}|/V$, который в рамках метода LBM имеет смысл числа Маха. При таких значениях функции $f_i^{(\text{eq})}$ можно представить следующим образом:

$$f_i^{(\text{eq})} = W_i \rho \left(1 + 3 \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{V^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})^2}{V^4} - \frac{3}{2} \frac{u^2}{V^2} \right), \quad \text{где } W_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 1, \\ \frac{1}{9}, & i = 2, 3, 4, 5, \\ \frac{1}{36}, & i = 6, 7, 8, 9. \end{cases} \quad (4)$$

Выражение, связывающее время релаксации λ с кинематическим коэффициентом вязкости ν , может быть получено при выводе методом Чепмена–Энскога уравнений гидродинамики из системы (2). В случае набора $D2Q9$ оно имеет следующий вид [22, с. 428; 23, с. 046702-3]:

$$\nu = \frac{\lambda}{3} V^2. \quad (5)$$

Производить численные расчеты с использованием системы (1), дополненной начальными и граничными условиями, можно только на решетке, которая представляет собой структурированную сетку. Как уже отмечалось выше, для задач в областях со сложными границами это может приводить либо к погрешностям в решении, связанным с неточным воспроизведением границ, либо к существенному увеличению объемов хранимых в памяти массивов из-за использования сеток с мелким шагом.

В литературе эта проблема решается по-разному. Часть работ посвящена разработке методик, основанных на использовании системы (1) с искусственным или адаптивным дроблением структурированной сетки. В [24–27] предлагаются модификации метода LBM с возможностью измельчения сетки в задаваемых исследователем областях. В [28–30] предложены подходы к применению метода LBM с адаптивными сетками с различными критериями адаптации, применяемыми к каждой ячейке решетки. Критерии адаптации связываются не со значениями функций распределения, а с макровеличинами — так, в [28] в качестве такого критерия используется выполнение условия несжимаемости с заданной точностью, в [29] рассматривается модуль ротора вектора скорости, а в [30] — разность максимального и минимального значений модуля вектора скорости в центре ячейки.

В других публикациях предложены варианты LBE-уравнений с возможностью использования криволинейных структурированных сеток. В [31] предложена форма этих уравнений в ортогональных криволинейных координатах, в [32] предлагается подход с использованием конформных отображений.

Большая группа работ посвящена LB-схемам, построенным посредством дискретизации системы уравнений (2) с помощью метода конечных разностей (МКР), метода конечных объемов (МКО) и метода конечных элементов (МКЭ). Для подобных схем можно использовать неструктурированные сетки, никак не связанные с решеткой, с помощью которых удобно аппроксимировать границы сложной формы. В работе [33] такие схемы носят название *off-lattice schemes*, что можно перевести как “схемы на сетках, не привязанных к решетке”. Поскольку для схем, построенных по МКР, часто используются структурированные сетки, основное внимание уделим схемам, построенным с помощью МКО и МКЭ.

В работах [33–41] предложены LB-схемы, построенные при использовании МКО, с разными подходами к вычислению потоков. Как правило, производная по t в (2) аппроксимируется с первым порядком с помощью правой разностной производной [36–40]. В [33, 34] предложены четырехслойные схемы, аппроксимирующие по t с третьим порядком. В [35] для улучшения устойчивости предложено с помощью МКО строить LB-схему не для системы (2), а для второго дифференциального приближения схемы (1).

Работы [42–45] посвящены LB-схемам, построенным с помощью МКЭ. Для построения таких схем, как правило, используется метод Галеркина. Единственная проблема при его применении к системам гиперболического типа вида (2) связана со сложностями с построением устойчивых явных схем, в связи с чем применяются специальные подходы к их стабилизации [46]. Один из таких подходов связан с искусственным сведением системы (2) к системе уравнений второго порядка посредством добавления стабилизирующих слагаемых или просто с использованием вторых дифференциальных приближений разностных схем для (2) [46]. Подобный подход используется в [42–44]. Заметим, что такие схемы по самому своему построению применяются не к исходной системе (2), из-за чего, вообще говоря, будет возникать неустранимая погрешность в численных решениях задач для этой системы.

В [45] предложена LB-схема, построенная с помощью МКЭ и основанная не на методе Галеркина, а на методе наименьших квадратов. Необходимые условия минимума квадрата невязки системы (2) приводят к решению на каждом слое по t системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений функций распределения в узлах. Метод применяется к системе (2) без использования каких-либо вспомогательных систем. Основной недостаток предложенного подхода в том, что авторы вместе с разложениями f_i по базисным функциям конечных элементов используют и разложения функций $f_i^{(eq)}$. Последнее, вообще говоря, некорректно, поскольку в силу (3) и (4) функции $f_i^{(eq)}$ сами нелинейно зависят от f_i , и система для нахождения f_i , таким образом, должна являться нелинейной на каждом слое по t .

В настоящей работе предложена LB-схема, основанная на методе Галеркина и построенная при применении МКЭ. Схема приводит к решению системы нелинейных уравнений на каждом слое по t . За счет сноса нелинейности на нижний слой удалось перейти к более простой процедуре решения СЛАУ, при этом не используются фиктивные преобразования системы (2), связанные с изменением ее порядка и переходом к уравнениям параболического типа.

3. LB-схема на основе метода Галеркина. Будем предполагать, что задача для системы (2) поставлена в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Производя триангуляцию области Ω на M элементов ω_s , $s = \overline{1, M}$, построим в ней неструктурированную сетку из N узлов. Зададим систему базисных функций $\varphi_j(\mathbf{r})$, $j = \overline{1, N}$. Представим f_i в виде линейных комбинаций по базисным функциям: $f_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N F_i^j(t) \varphi_j(\mathbf{r})$. Последние выражения в векторной форме примут вид

$$f_i(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}_i^T(t) \Phi(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где $\mathbf{F}_i = (F_i^1, \dots, F_i^N)^T$ и $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$. Подставляя (6) в (2), получим:

$$\dot{\mathbf{F}}_i^T(t) \Phi(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_i(\nabla \Phi(\mathbf{r}))^T \mathbf{F}_i(t) = -\frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{F}_i^T(t) \Phi(\mathbf{r}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{F}_1(t), \dots, \mathbf{F}_9(t), \Phi(\mathbf{r})) \right). \quad (7)$$

Используя стандартную процедуру метода Галеркина [47, 48], умножим соотношения (7) для каждого значения i справа на $\Phi(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по всей области $\Omega = \bigcup_{s=1}^M \omega_s$; в результате при $d\mathbf{r} = dx dy$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^M \int_{\omega_s} \left(\dot{\mathbf{F}}_i^T(t) \Phi(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_i(\nabla \Phi(\mathbf{r}))^T \mathbf{F}_i(t) \right) \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ = -\frac{1}{\lambda} \sum_{s=1}^M \int_{\omega_s} \left(\mathbf{F}_i^T(t) \Phi(\mathbf{r}) - f_i^{(eq)}(\mathbf{F}_1(t), \dots, \mathbf{F}_9(t), \Phi(\mathbf{r})) \right) \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $\mathbf{F}_i(t)$:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{F}}_i(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i(t) = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{A}\mathbf{F}_i(t) - \mathbf{G}_i(\mathbf{F}_1(t), \dots, \mathbf{F}_9(t))\right). \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{A} = \sum_{s=1}^M \int_{\omega_s} \Phi(\mathbf{r})\Phi^T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, $\mathbf{B}_i = \sum_{s=1}^M \int_{\omega_s} \Phi(\mathbf{r})\mathbf{V}_i(\nabla\Phi(\mathbf{r}))^T d\mathbf{r}$, а \mathbf{G}_i — N -мерные векторы, выражения для которых не приводятся в силу их громоздкости.

Для аппроксимации (9) из соображений экономии памяти вычислительных ресурсов лучше использовать только двухслойные схемы. Поскольку явные схемы слабо устойчивы, построим следующую неявную схему путем аппроксимации производной по t в (9) в узле t_{j+1} с помощью левой разностной производной:

$$\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{F}_i(t_{j+1}) - \mathbf{F}_i(t_j)}{\Delta t}\right) + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i(t_{j+1}) = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{A}\mathbf{F}_i(t_{j+1}) - \mathbf{G}_i(\mathbf{F}_1(t_{j+1}), \dots, \mathbf{F}_9(t_{j+1}))\right). \quad (10)$$

Здесь Δt — шаг по времени (вообще говоря, отличный от δt).

Для поиска значений \mathbf{F}_i по схеме (10) на слое t_{j+1} необходимо решать систему нелинейных уравнений. Решение этой системы, во-первых, представляет собой отдельную сложную задачу, а во-вторых, будет создавать определенные сложности при распараллеливании вычислений. Для устранения этих сложностей в (10) произведем снос нелинейности на слой t_j :

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{F}_1(t_{j+1}), \dots, \mathbf{F}_9(t_{j+1})) \approx \mathbf{G}_i(\mathbf{F}_1(t_j), \dots, \mathbf{F}_9(t_j)). \quad (11)$$

Несложно показать, что погрешность такого приближения будет иметь первый порядок по Δt .

Подставляя (11) в (10), получим разностную схему

$$\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{F}_i(t_{j+1}) - \mathbf{F}_i(t_j)}{\Delta t}\right) + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i(t_{j+1}) = -\frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{A}\mathbf{F}_i(t_{j+1}) - \mathbf{G}_i(\mathbf{F}_1(t_j), \dots, \mathbf{F}_9(t_j))\right),$$

перепишывая которую, будем иметь

$$\left(\left(1 + \frac{\Delta t}{\lambda}\right)\mathbf{A} + \Delta t\mathbf{B}_i\right)\mathbf{F}_i(t_{j+1}) = \mathbf{A}\mathbf{F}_i(t_j) + \frac{\Delta t}{\lambda}\mathbf{G}_i(\mathbf{F}_1(t_j), \dots, \mathbf{F}_9(t_j)). \quad (12)$$

Как можно видеть, при применении схемы (12) необходимо решать уже линейную систему. Как известно [48], в рамках МКЭ можно перенумеровать узлы сетки таким образом, что матрица соответствующей системы будет сильно разреженной, что позволяет использовать специальные экономные методы решения СЛАУ с возможностью распараллеливания вычислений.

В настоящей работе с помощью предложенной LB-схемы на неструктурированных сетках получены решения двух известных тестовых задач вычислительной гидродинамики — задачи о течении в каверне (в области с прямолинейными границами) и плоской задачи об обтекании цилиндра (в области с криволинейными границами). Результаты расчетов показали хорошее согласование с результатами, полученными при решении задач для уравнений гидродинамики.

4. Решение тестовых задач. Программная реализация алгоритма расчета по предложенной схеме производилась в рамках свободно распространяемого конечно-элементного пакета `freefem++` v. 3.20 [19]. Возможности этого пакета позволяют реализовать все этапы МКЭ. Пакет имеет свой интерпретируемый язык программирования, что позволяет создавать в нем кросс-платформенные приложения, не привязанные к другим программам. Последние версии пакета позволяют реализовывать параллельные алгоритмы с использованием MPI-технологии.

При расчетах использовались линейные базисные функции. Вычисление интегралов по конечным элементам производилось с помощью квадратурной формулы Симпсона. Не рассматривалась проблема устойчивости и выбора оптимального шага Δt .

При применении LBM важным является вопрос о выборе граничных условий для функций распределения, поскольку к макроскопическим граничным условиям прилипания и непротекания могут приводить различные условия для f_i . Путем выбора тех или иных граничных условий можно влиять на точность и устойчивость метода [49–51].

В настоящей работе при применении LB-схемы (12) используются равновесные условия, образующие один из самых простых типов граничных условий, при которых значения f_i на границах приравниваются

значениям $f_i^{(eq)}$, вычисляемым по (4) через заданные на границе значения ρ и u . Такие условия, в отличие от bounce-back-условия и его модификаций, легко использовать в случае границ сложной формы [35, 52, 53]. Естественно, такие условия нельзя использовать во всех возможных случаях. Их применение возможно только в случае течений, для которых эффект от сдвиговых напряжений в масштабе одной ячейки решетки является незначительным [53], так как в них вообще не учитывается эффект от сдвиговых напряжений. В [53] исследуются возможности применения равновесных условий в задаче о течении в плоском канале с уступом при числе Рейнольдса $Re \approx 500$. Полученные авторами результаты оказались хорошо согласующимися с результатами, полученными при других типах граничных условий, учитывающих эффект сдвиговых напряжений.

В рамках данной работы исследуются возможности применения равновесных условий в диапазоне умеренных значений числа Рейнольдса $Re \in [10, 100]$. Показано их влияние на точность результатов расчетов в случае обеих рассмотренных задач.

При проведении расчетов задавались значения числа Re , вычисляемого по формуле

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (13)$$

где L — характерный линейный размер области, в которой происходит течение; U — характерная скорость.

Автор в данной статье не ставит цели проведения расчетов течений реальных сред, а просто решает известные тестовые задачи. В связи с этим параметр ν , через который из (5) вычислялось λ , не задавался, а вычислялся с использованием (13) по заданным значениям Re , U и L .

Значения l и δt брались равными по величине. В начальный момент времени полагалось, что жидкость покоится и значения f_i совпадают со значениями $f_i^{(eq)}$.

4.1. Задача о течении в каверне. Рассмотрим область в форме квадрата со сторонами длины P , параллельными осям декартовой прямоугольной системы координат. На границах области ставятся кинематические граничные условия

$$\begin{aligned} u_x(t, x, 0) = u_y(t, x, 0) = 0, \quad u_x(t, x, P) = U_0, \quad u_y(t, x, P) = 0, \quad x \in [0, P], \\ u_x(t, 0, y) = u_y(t, 0, y) = u_x(t, P, y) = u_y(t, P, y) = 0, \quad y \in [0, P], \end{aligned}$$

где $U_0 = \text{const} \neq 0$. При решении данной задачи в качестве L естественно взять значение P , в качестве U — значение U_0 [54].

Брались следующие значения параметров: $P = 1$ м, $U_0 = 0.1$ м/с. Рассматривался промежуток времени от 0 до 400 с, который разбивался сеткой из 2×10^5 узлов. Пространственная область разбивалась сеткой из 5854 элементов и 3028 узлов (рис. 1). Не исследовалось влияние разбиений пространственной и временной сеток на точность получаемых результатов.

Сравнение численного решения, полученного по методу ЛВМ, производилось с решением задачи для системы уравнений гидродинамики в переменных “завихренность–функция тока”. Для сравнения полученных результатов вычислялось значение величины $I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$, где

$$I_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_x(T, 0.5P, y_i) - U_x(T, 0.5P, y_i))^2, \quad I_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_y(T, x_i, 0.5P) - U_y(T, x_i, 0.5P))^2.$$

Здесь T — длина временного промежутка; U_x, U_y — значения компонент вектора скорости, полученные при решении уравнений гидродинамики; N — число узлов равномерной сетки, разбивающей промежуток $[0, P]$, в узлах которой сравниваются результаты (бралось $N = 100$).

В табл. 1 представлены значения I при различных значениях Re . Как можно видеть, при увеличении Re (до $Re = 80$) величина I уменьшается, что говорит о близости численных решений, полученных по ЛВ-схеме и при решении уравнений гидродинамики. Это является вполне ожидаемым, поскольку при увеличении Re влияние вязкости постепенно уменьшается, при этом становится слабее и влияние сдвиговых напряжений. Использование равновесных условий позволяет получать хорошие по точности результаты.

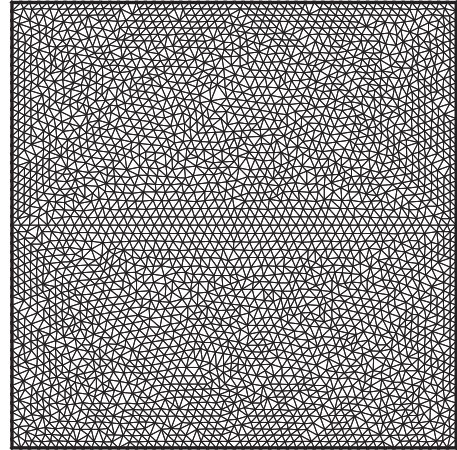


Рис. 1. Разбиение пространственной области для задачи о течении в каверне

Таблица 1
Значение I при различных числах Re для задачи о течении в каверне

Re	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$I \times 10^{-4}$	17.12	4.655	2.383	1.628	1.313	1.166	1.122	1.208	1.503	2.043

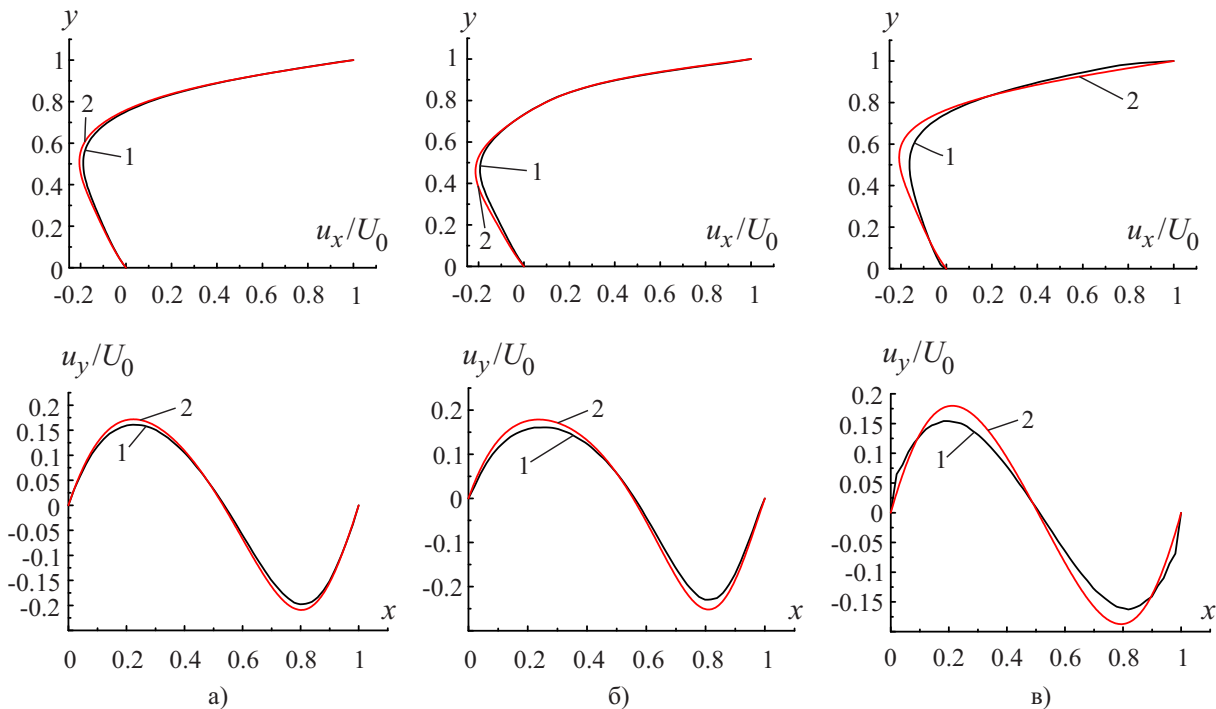


Рис. 2. Графики компонент вектора скорости для задачи о течении в каверне:
1) графики решений, полученных по LB-схеме, 2) при решении уравнений гидродинамики;
а) $Re = 50$, б) $Re = 100$, в) $Re = 10$

Дальнейшее увеличение I при увеличении Re от 80, по всей видимости, связано с образованием вихря у стенки, соответствующей $x = P$, что приводит к увеличению сдвиговых напряжений [54].

На рис. 2 для сравнения при $Re = 50, 100$ и 10 представлены графики численных решений, отнесенных к U_0 . Графики x -компоненты вектора скорости выведены в точках прямой $\{x = 0.5P, y \in [0, P]\}$, графики y -компоненты — в точках прямой $\{x \in [0, P], y = 0.5P\}$. Как можно видеть, при $Re = 50$ и $Re = 100$ визуально графики хорошо согласуются друг с другом. На рис. 2в приведены графики, полученные при $Re = 10$; можно заметить определенные отклонения в полученных решениях, что вполне естественно, поскольку при таком значении Re влиянием сдвиговых напряжений пренебречь нельзя.

4.2. Плоская задача об обтекании цилиндра. Постановка задачи взята из работ [31, 55]. Рассматривается область между двумя концентрическими окружностями с центрами в начале координат, радиусы которых равны r_0 и R соответственно, $r_0 < R$. На внутренней окружности компоненты вектора \mathbf{u} полагаются равными нулю, на внешней окружности $u_x = U_0 \neq 0, u_y = 0$. В качестве L естественно брать $2r_0$, в качестве U — значение U_0 .

Расчеты производились при следующих значениях параметров: $r_0 = 0.05$ м, $R = 0.5$ м, $U_0 = 0.01$ м/с. Рассматривался промежуток от 0 до 2000 с с разбиением на 10^5 узлов. Рассматривалось разбиение пространственной области неструктурированной сеткой из 5608 элементов и 2889 узлов (рис. 3).

В результате расчетов вычислялось значение $C_D = \frac{1}{\rho r_0 U_0^2} \int_D S_{x\alpha} n_\alpha ds$ (коэффициент лобового со-

противления), где через D обозначена окружность радиуса r_0 , n_x, n_y — компоненты орта нормали к D , S_{xx}, S_{xy} — компоненты тензора напряжений. Вычисление интеграла в выражении для C_D производилось с помощью составной квадратурной формулы Симпсона при различных шагах интегрирования. Известно [56], что для случая обтекания цилиндра течение является стационарным при $Re < Re_c \approx 50$, а позади цилиндра существуют два симметричных вихря, линейные характеристики которых зависят от Re . Если $Re > Re_c$, то течение становится периодическим по времени: позади цилиндра образуются вихревые до-

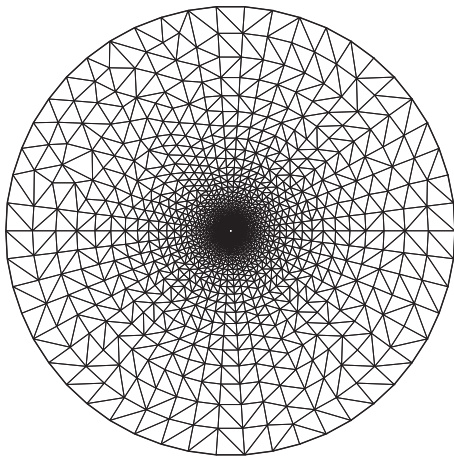


Рис. 3. Разбиение области неструктурированной сеткой для задачи об обтекании цилиндра

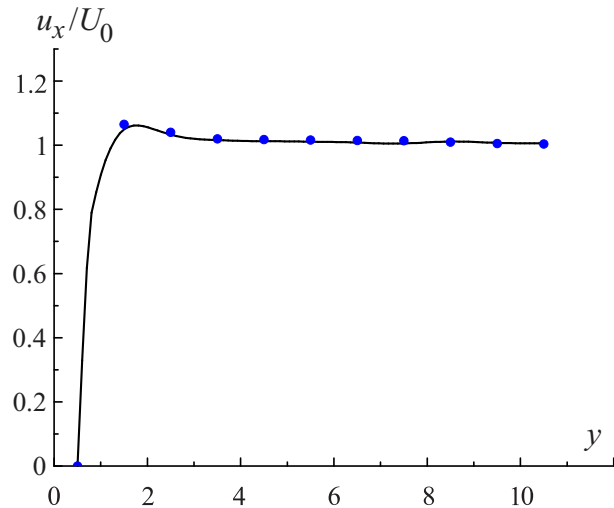


Рис. 4. График u_x/U_0 при $Re = 10$.
Сплошная черта — результат расчета по LB-схеме,
маркеры — результат из работы [31]

рожки Кармана. Вычисление значений C_D производилось только для случая стационарного течения при $Re < Re_c$. Полученные значения сравнивались с результатами, полученными в [55]. Результаты сравнения представлены в табл. 2. Можно отметить, что полученные при $Re > 10$ значения C_D хорошо согласуются с данными из [55]. На рис. 4 представлены графики u_x/U_0 при $Re = 10$, построенные в точках прямой $\{x = 0, y \in [r_0, 22r_0]\}$. Как можно заметить, полученные при таком значении Re во всей области течения хорошо согласуются с результатами из [31], полученными при использовании bounce-back-условия для функций распределения. Малые отклонения в представленных графиках при таком Re (в отличие от задачи о течении в каверне), по всей видимости, можно объяснить малым линейным размером обтекаемого тела по сравнению с длиной всей области течения — эффект от сдвиговых напряжений будет существенным только вблизи самого тела.

5. Заключение. В настоящей статье представлена LB-схема для проведения расчетов на неструктурированных сетках. Схема основана на применении метода конечных элементов в сочетании с методом Галеркина. Схема является полунейвной, что приводит к необходимости решения СЛАУ на каждом слое по времени.

По результатам численных расчетов можно сделать вывод о том, что для представленных задач использование простых для практической реализации равновесных граничных условий позволяет получать хорошие по точности результаты при весьма умеренных числах Рейнольдса — $Re \geq 20$. Ранее это было показано только для значений $Re \sim 100$ [53].

Необходимо отметить, что предложенная схема может применяться при расчетах с использованием различных типов решеток и при расчетах пространственных течений. Возможно применение схемы не только к системе (2), полученной из уравнения БГК, но и к аналогичным системам, полученным при дискретизации в пространстве скоростей уравнения Больцмана с любым интегралом столкновений. Последнее особенно актуально для задач о расчетах течений газа в микроканалах со сложной геометрией [57].

В дальнейшем планируется провести исследование устойчивости предложенной LB-схемы и ее сравнение с конечно-разностными схемами из работ [58, 59].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S., Doolen G.D.* Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1998. **30**. 329–364.
2. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
3. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 227–231.

Таблица 2
Сравнение полученных значений C_D
со значениями из [55]

Значение C_D	$Re = 10$	$Re = 20$	$Re = 40$
Из работы [55]	2.846	2.045	1.522
LB-схема	2.437	2.051	1.526

4. Бижулов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 13–19.
5. Бижулов Д.А., Сенин Д.С. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых функций распределения для GPU // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 370–374.
6. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 130–138.
7. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 384–390.
8. Гугушвили И.В., Евстигнеев Н.М. Некоторые результаты для различных методов моделирования несжимаемой гидродинамики свободной поверхностью на графических процессорах // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. 2010. **4**. 15–23.
9. Xiong Q.G., Li B., Xu J., Fang X.J., Wang X.W., Wang L.M., He X.F., Ge W. Efficient parallel implementation of the lattice Boltzmann method on large clusters of graphic processing units // Computer Science and Technology. 2012. **57**, N 7. 707–715.
10. Velivelli A.C., Bryden K.M. Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and traditional finite difference methods for solving the unsteady two-dimensional Burgers equation // Physica A. 2006. **362**. 139–145.
11. Kupershtokh A.L. A lattice Boltzmann equation method for real fluids with the equation of state known in tabular form only in regions of liquid and vapor phases // Computers and Mathematics with Applications. 2011. **61**. 3537–3548.
12. Schreiber M., Neumann P., Zimmer S., Bungartz H.J. Free-surface lattice-Boltzmann simulation on many-core architectures // Procedia Computer Science. 2011. **4**. 984–993.
13. Zhao Z., Huang P., Li Y., Li J. A lattice Boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 2013. **71**. 223–248.
14. Weichert F., Mertens C., Walczak L., Kern-Isberner G., Wagger M. A novel approach for connecting temporal-ontologies with blood flow simulations // J. of Biomedical Informatics. 2013. **46**. 470–479.
15. Zhang J. Effect of suspending viscosity on red blood cell dynamics and blood flows in microvessels // Microcirculation. 2011. **18**. 562–573.
16. Погорелова Е.А., Лобанов А.И. Высокопроизводительные вычисления в моделировании крови // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. **4**, № 4. 917–941.
17. Pan C., Luo L.S., Miller C.T. An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous medium flow simulation // Computers and Fluids. 2006. **35**. 898–909.
18. Broadwell J.E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method // J. of Fluid Mechanics. 1964. **19**. 401–414.
19. <http://www.freemem.org>.
20. Abe T. Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // J. of Computational Physics. 1997. **131**, N 1. 241–246.
21. He X., Luo L.-S. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation // Physical Review E. 1997. **55**, N 6. R6333–R6336.
22. Sofonea V., Sekerka R.F. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // J. of Computational Physics. 2003. **184**. 422–434.
23. Sofonea V., Lamura A., Gonnella G., Cristea A. Finite-difference lattice Boltzmann model with flux limiters for liquid-vapor systems // Physical Review E. 2004. **70**. 046702-1–046702-9.
24. Filippova O., Hanel D. Grid refinement for lattice-BGK models // J. of Computational Physics. 1998. **147**. 219–228.
25. Filippova O., Hanel D. Boundary-fitting and local grid refinement for lattice-BGK models // Int. J. of Modern Physics C. 1998. **9**, N 8. 1271–1279.
26. Filippova O., Hanel D. Acceleration of lattice-BGK schemes with grid refinement // J. of Computational Physics. 2000. **165**. 407–427.
27. Foroughi S., Janshidi S., Masihi M. Lattice Boltzmann method on quadtree grids for simulating fluid flow through porous media: a new automatic algorithm // Physica A. **392**. 4772–4786.
28. Crouse B., Rank E., Kraczyk M., Tolke J. An LB-based approach for adaptive flow simulations // Int. J. of Modern Physics B. 2003. **17**, N 1/2. 109–112.
29. Eitel-Amor G., Meinke M., Schroder W. A lattice-Boltzmann method with hierarchically refined meshes // Computers and Fluids. 2013. **75**. 127–139.
30. Wu J., Shu C. A solution-adaptive lattice Boltzmann method for two-dimensional incompressible viscous flow // J. of Computational Physics. 2011. **230**. 2246–2269.
31. Mei R., Shyy W. On the finite difference-based lattice Boltzmann method in curvilinear coordinates // J. of Computational Physics. 1998. **143**. 426–448.
32. Mirzaci M., Poozech A. Simulation of fluid-flow in a body-fitted grid system using the lattice Boltzmann method // Physical Review E. 2013. **87**. 063312-1–063312-9.

33. Patil D.V., Lakshmisha K.N. Two-dimensional flow past circular cylinders using finite volume lattice Boltzmann formulation // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 2012. **69**. 1149–1164.
34. Zarghami A., Maghrebi M.J., Ubertini S., Succi S. Modeling of bifurcation phenomena in suddenly expanded flows with a new finite volume lattice Boltzmann method // Int. J. of Modern Physics C. 2011. **22**, N 9. 977–1003.
35. Ubertini S., Succi S. A generalized lattice Boltzmann equation on unstructured grids // Communications in Computational Physics. 2008. **3**, N 2. 342–356.
36. Ubertini S., Succi S., Bella G. Lattice Boltzmann schemes without coordinates // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2004. **362**, N 1821. 1763–1771.
37. Peng G., Xi H., Duncan C., Chou S.-H. Lattice Boltzmann method on irregular meshes // Physical Review E. 1998. **58**, N 4. R4124–R4127.
38. Peng G., Xi H., Duncan C., Chou S.-H. Finite volume scheme for the lattice Boltzmann method on unstructured meshes // Physical Review E. 1999. **59**, N 4. 4675–4682.
39. Xi H., Peng G., Chou S.-H. Finite-volume lattice Boltzmann method // Physical Review E. 1999. **59**, N 5. 6202–6205.
40. Xi H., Peng G., Chou S.-H. Finite-volume lattice Boltzmann schemes on two and three dimensions // Physical Review E. 1999. **60**, N 3. 3380–3388.
41. Ubertini S., Bella G., Succi S. Lattice Boltzmann method on unstructured grids: further developments // Physical Review E. 2003. **68**. 016701-1–016701-10.
42. Lee T., Lin C.-L. A characteristic Galerkin method for discrete Boltzmann equation // J. of Computational Physics. 2001. **171**. 336–356.
43. Wardle K.E., Lee T. Finite element lattice Boltzmann simulations of free surface flow in a concentric cylinder // Computers and Mathematics with Applications. 2013. **65**. 230–238.
44. Seino M., Tanahashi T., Yasuoka K. An analysis of natural convection using the thermal finite element discrete Boltzmann equation // Computers and Fluids. 2010. **40**, N 1. 113–117.
45. Li Y., LeBoeuf E.J., Basu P.K. Least-squares finite-element lattice Boltzmann method // Physical Review E. 2004. **69**. 065701-1–065701-4.
46. Hughes T.J.R., Scovazzi G., Tezduyar T.E. Stabilized methods for compressible flows // J. of Scientific Computing. 2010. **43**. 343–368.
47. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
48. Коннор Д., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979.
49. Latt J., Chopard B., Malaspinas O., Deville M., Michler A. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method // Physical Review E. 2008. **77**. 056703-1–056703-16.
50. Verschaeve J.C.G. Analysis of the lattice Boltzmann Bhatnagar–Gross–Krook no-slip boundary condition: ways to improve accuracy and stability // Physical Review E. 2009. **80**. 036703-1–036703-23.
51. Семенов С.А., Кривовичев Г.В. Численное исследование подходов к реализации граничных условий в методе решеточных уравнений Больцмана // Процессы управления и устойчивость. Труды 43-й Международной научной конференции. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. 196–201.
52. Peng G., Xi H., Chen S.-H. On boundary conditions in the finite volume lattice Boltzmann method on unstructured meshes // Int. J. of Modern Physics C. 1999. **10**, N 6. 1003–1016.
53. Mohamad A.A., Succi S. A note on equilibrium boundary conditions in lattice Boltzmann fluid dynamic simulations // The European Physical J. Special Topics. 2009. **171**. 213–221.
54. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and multigrid method // J. of Computational Physics. 1982. **48**. 387–411.
55. Dennis S.C.R., Chang G.-Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // J. of Fluid Mechanics. 1970. **42**, N 3. 471–489.
56. Tritton J.D. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers // J. of Fluid Mechanics. 1959. **6**. 547–567.
57. Green B.I., Vedula P. A lattice based solution of the collisional Boltzmann equation with applications to microchannel flows // J. of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2013. **7**. 1–22.
58. Кривовичев Г.В. Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 332–340.
59. Кривовичев Г.В. Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 1–8.

Поступила в редакцию
02.10.2013