УДК 519.6

НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО БАРОТРОПНОГО ГАЗА

А. В. Попов[1], **К. А. Жуков**[2]

Предлагается новая неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа в переменных Эйлера в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Доказана теорема о существовании и единственности разностного решения этой схемы без каких-либо предположений о шагах сетки. Важным свойством разностного решения является то, что сеточная функция плотности всегда положительна. На каждом временно́м шаге сеточное решение является решением линейной системы. Для разности между разностным решением и точным гладким дифференциальным решением приведена оценка близости в зависимости от шагов сетки. Работоспособность разностной схемы проверена на задаче с разрывными начальными данными в случае одной пространственной переменной и на задаче о каверне в случае двух пространственных переменных. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12–01–00960а).

Ключевые слова: конечно-разностная схема, точность численного решения, вязкий газ.

1. Введение. Построение и анализ разностных схем (р.с.) для систем уравнений газовой динамики представляет значительный практический и теоретический интерес (см., например, [1–5]). Однако вопросы корректности р.с. и оценки их погрешности в исходной нелинейной постановке для многомерных задач пока трудно поддаются решению.

В настоящее время теоремы о существовании и единственности решения начально-краевых задач, описывающих динамику вязкого сжимаемого газа, в целом по времени доказаны только в случае одной пространственной переменной. Это объясняется тем, что в одномерном случае система уравнений при переходе к лагранжевым массовым переменным записывается в удобном для исследования относительно компактном виде. В многомерном же случае переход к этим переменным не дает таких преимуществ, и до сих пор известны лишь локальные по времени теоремы разрешимости. Обзор результатов по качественной теории таких задач приведен в [6].

В разностном случае, так же как и в дифференциальном, серьезные продвижения в теории получены в случае одной пространственной переменной, для которого построены и исследованы в целом по времени р.с. для систем, записанных в лагранжевых массовых переменных [7]. В многомерном случае следует выделить работу [8], в которой построена оригинальная слабо устойчивая р.с., и работу [9], в которой исследуется точность конечно-элементного метода.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую нестационарное движение вязкого баротропного газа:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,\\
&\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}\right] + \nabla p = L\mathbf{u} + \rho \mathbf{f},\\
&p = p(\rho).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь L — линейный эллиптический оператор:

$$L\mathbf{u} \equiv \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{3}\nabla(\mu \operatorname{div}\mathbf{u}).$$

Выше через μ обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать для простоты изложения известной положительной константой.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; доцент, e-mail: popovav@mech.math.msu.su

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; науч. сотр., e-mail: zhukov_k@cs.msu.su

Плотность ρ и вектор скорости $\mathbf{u}$ являются неизвестными функциями переменных Эйлера

$$(t, \mathbf{x}) \in Q = [0, T] \times \Omega.$$

В уравнения входят две известные функции: давление газа p, зависящее от плотности, и вектор внешних сил $\mathbf{f}$, являющийся функцией переменных Эйлера.

Дополним систему (1.1) начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0),\ \mathbf{x} \in \Omega, \\ &\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0},\ (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \gamma, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\gamma = \partial\Omega$.

В настоящей статье строится неявная двухслойная р.с. для задачи (1.1), (1.2) в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Для расчета решения на n-м временно́м шаге приходится решать систему линейных алгебраических уравнений, решение которой всегда существует и единственно. Подчеркнем, что в предлагаемой р.с. ищутся не сами значения функции плотности, а логарифмы этих величин, что обеспечивает положительность функции плотности. Тем самым разностное решение всегда имеет физический смысл.

В работах [10, 11] предложены схемы, для существования разностных решений которых необходимо, чтобы шаги сетки были достаточно малы, что обеспечивает положительность значений сеточной функции плотности. Кроме того, в р.с. из этих работ численное решение на каждом временно́м шаге искалось в виде последовательного решения линейных систем, образованных разностными аппроксимациями отдельных уравнений, составляющих решаемую дифференциальную систему. В предлагаемой схеме на каждом слое решается одна линейная система, в которую входят разностные уравнения, аппроксимирующие все уравнения дифференциальной системы. Такой подход был ранее опробован на линейной задаче, описывающей нестационарное движение вязкого слабосжимаемого газа [12, 13]. Заметим еще одно преимущество новой схемы. Дело в том, что для экономичности схем из работ [10, 11] в них было использовано расщепление операторов на верхнем временно́м слое по пространственным переменным. Это дает возможность использовать метод одномерной прогонки для решения получаемых алгебраических задач, но для достижения в этом случае желаемой точности, как показали численные эксперименты, часто требуется использовать очень маленький шаг по временно́й переменной.

Для рассматриваемой р.с. методом энергетических неравенств доказаны оценки погрешности численного интегрирования. В частности, из этих оценок следует сходимость р.с. в послойных нормах $W^1_{2,h}$. Примененный способ исследования р.с. существенным образом опирается на предположение о существовании и единственности гладкого точного решения задачи (1.1), (1.2). Такой способ исследования точности разностных методов изложен в монографии [14] на примере обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная идея доказательства состоит в том, что разность между разностным решением и проекцией на сетку точного решения дифференциальной задачи не становится больше некоторого заранее установленного значения. Для этого нужно оценивать эту разность в достаточно сильной норме, чтобы с ее помощью можно было оценить норму ошибки в пространстве C_h. На этом этапе могут накладываться условия на шаги τ и h. Если оценка погрешности получена в послойной норме $W^1_{2,h}$, то в одномерном случае связи между τ и h не возникает, а в двумерном и трехмерном случаях появляются соответственно условия $\tau \leqslant C|\ln h|^{-1/2}$ и $\tau \leqslant C\sqrt{h}$.

При выводе оценок погрешности численного интегрирования будем предполагать выполнение следующих условий для задачи (1.1), (1.2):

(A) существует единственное классическое решение;

(B) $(\rho,\, \mathbf{u}) \in C^{2,4}(Q)$, $\operatorname{grad}(\rho) \in C^{2,3}(Q)$, $\operatorname{grad}(\mathbf{u}) \in C^{1,3}(Q)$, где $C^{q,p}(Q)$ — класс функций, имеющих производные порядка q по временно́й переменной t и порядка p по пространственным переменным $\mathbf{x}$ в области Q;

(C) $\gamma_M \geqslant \rho(t, x) \geqslant \gamma_m > 0$ при $(t, \mathbf{x}) \in Q$;

(D) $\|p\|_{C^2[\gamma_m/2;\gamma_M+\gamma_m/2]} \leqslant p_M$ и $\|\mathbf{f}\|_{C(Q)} \leqslant f_M$.

Исследование нелинейных р.с. в окрестности известного решения проводилось многими авторами (см., например, [15–18]). В этих работах изучены р.с., ориентированные на конкретные задачи и типы задач математической физики. В работе [19] рассматривались двухслойные нелинейные р.с. общего вида, а в работе [20] получены общие теоремы о сходимости нелинейных р.с., использующие представление схемы в виде одного операторного уравнения и теоремы существования решения в окрестности известного элемента.

Работоспособность построенных р.с. проверялась в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Для решения возникающих алгебраических линейных систем в процессе счета по предлагаемым р.с. использовался метод бисопряженных градиентов. Результаты расчетов подтвердили полученные теоретические оценки, если решение задачи (1.1), (1.2) является гладким. В случае негладких начальных данных и двумерной каверны численные эксперименты показали важность добавления искусственной вязкости в разностное уравнение неразрывности. Отметим, что теоретический порядок точности при этом не меняется, а решение перестает обладать осцилляциями на разрывах.

2. Основные обозначения и вспомогательные утверждения. В настоящей статье рассматриваются пространственные области прямоугольного вида $\Omega = \prod\limits_{k=1}^{s} [0;\, X_k]$, где s — размерность пространства. По каждому из направлений используются сетки с постоянным шагом h_k: $\bar{\omega}_{h_k} = \{mh_k \mid m = 0, \ldots, M_k\}$, где $M_k h_k = X_k$. На временно́м интервале $[0;\, T]$ также используется равномерная сетка: $\omega_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \ldots, N\}$, где $N\tau = T$. В результате в области Q вводится сетка $Q_{\tau\bar{h}} = \omega_\tau \times \bar{\Omega}_{\bar{h}}$, где $\bar{\Omega}_{\bar{h}} = \prod\limits_{k=1}^{s} \bar{\omega}_{h_k}$. Узлы сетки $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$, попадающие на границу области Ω, обозначим через $\gamma_{\bar{h}}$ (граничные узлы), а попадающие в область Ω — через $\Omega_{\bar{h}}$ (внутренние узлы). Граничные узлы с номерами $m_k = 0$ и $m_k = M_k$ обозначим через γ_k^- и γ_k^+ соответственно.

Значение функции g, определенной на сетке $Q_{\tau\bar{h}}$, в узле $(n, \bar{m})$ будем обозначать через $g^n_{\bar{m}}$. Если индексы опущены, то это означает, что они равны n и $\bar{m}$. Для сокращения записи значений функции g в узлах, соседних с узлом $(n, \bar{m})$, используются обозначения

$$g^{n+1}_{\bar{m}} = \hat{g}, \quad g^n_{\bar{m}\pm 1_k} = g^{\pm 1_k},$$

где $\bar{m} \pm 1_k$ номер узла, k-я координата которого отличается от соответствующей координаты узла $\bar{m}$ на ± 1. Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах:

$$g_{s_k} = \frac{g^n_{\bar{m}+1_k} + g^n_{\bar{m}}}{2}, \quad g_{\bar{s}_k} = \frac{g^n_{\bar{m}} + g^n_{\bar{m}-1_k}}{2}.$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения, принятые в [21]:

$$g_t = \frac{g^{n+1}_{\bar{m}} - g^n_{\bar{m}}}{\tau}, \quad g_{x_k} = \frac{g^n_{\bar{m}+1_k} - g^n_{\bar{m}}}{h_k}, \quad g_{\overset{\circ}{x}_k} = \frac{g^n_{\bar{m}+1_k} - g^n_{\bar{m}-1_k}}{2h_k}, \quad g_{\bar{x}_k} = \frac{g^n_{\bar{m}} - g^n_{\bar{m}-1_k}}{h_k}.$$

Определим используемые ниже скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$:

$$(v, u) = \prod_{k=1}^{s} h_k \sum_{x_{\bar{m}} \in \Omega_{\bar{h}}} v_{\bar{m}} u_{\bar{m}}, \quad [u, v] = (u, v) + 0.5 \prod_{k=1}^{s} h_k \sum_{x_{\bar{m}} \in \gamma_{\bar{h}}} v_{\bar{m}} u_{\bar{m}},$$

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_{\bar{m}} \in \bar{\Omega}_{\bar{h}}} |v_{\bar{m}}|, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}, \quad |[v]| = \sqrt{[v, v]}, \quad |v|_1 = \sqrt{\prod_{k=1}^{s} h_k \sum_{k=1}^{s} \sum_{x_{\bar{m}} \in \Omega_{\bar{h}} \cup \gamma_k^-} (v_{x_k})^2},$$

$$|v|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{s} \|v_{x_k \bar{x}_k}\|^2 + \prod_{k=1}^{s} h_k \sum_{l,n=1, n\neq l}^{s} \sum_{x_{\bar{m}} \in \Omega_{\bar{h}} \cup \gamma_n^- \cup \gamma_l^-} (v_{x_n x_l})^2}, \quad \|v\|_1 = \sqrt{|[v]|^2 + |v|_1^2}.$$

Сформулируем лемму, позволяющую оценить максимум модуля значений сеточной функции через ее норму $\|\cdot\|_1$.

Лемма 2.1. *Для любой сеточной функции v, заданной на сетке $\bar{\Omega}_{\bar{h}}$, справедливо неравенство*

$$\|v\|_{C_h} \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{X}\right) |[v]|^2 + \varepsilon |v|_1^2, \tag{2.1}$$

если размерность пространства $s = 1$;

$$\|v\|_{C_h} \leqslant K_2 \,|\ln |h||^{0,5}\, \|v\|_1, \tag{2.2}$$

если размерность пространства $s = 2$;

$$\|v\|_{C_h} \leqslant K_3 \max_k (h_k^{-1/2}) \|v\|_1, \tag{2.3}$$

если размерность пространства $s = 3$. *Здесь* ε — *любое положительное число, а величины* K_2 *и* K_3 *зависят только от размеров области* Ω.

Доказательства этих неравенств можно найти в [22].

3. Разностная схема. Для построения разностной схемы преобразуем уравнения системы (1.1) к виду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla g) + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + \tilde{p}'(g)\nabla g = e^{-g} L\mathbf{u} + \mathbf{f}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $g = \ln(\rho)$ и $\tilde{p}'(g) = \dfrac{dp}{d\rho}(e^g)$.

Дополним систему (3.1) начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &(g, \mathbf{u})|_{t=0} = (\ln(\rho_0), \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ &\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Члены операторов, отвечающие за конвективный перенос газа, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u}, \nabla g) = 0.5\big((\mathbf{u}, \nabla g) + \operatorname{div}(g\mathbf{u})\big) - 0.5 g \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ &(\mathbf{u}, \nabla) u_k = \frac{1}{3}\left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^2}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{l=1, l\neq k}^{s}\left(u_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l u_k}{\partial x_l} - u_k \frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right), \quad k = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Далее при построении разностной схемы производные функций g и u_k будут аппроксимированы с верхнего временно́го слоя, при этом форма записи (3.3) позволяет сделать это с помощью кососимметричного оператора.

Для поиска численного решения задачи (3.1), (3.2) предлагается использовать р.с. Сеточное приближение функции g обозначим через G, а сеточный аналог скорости $\mathbf{u}$ обозначим через $\mathbf{V}$. Поскольку многомерные варианты разностной схемы имеют достаточно громоздкую запись, для удобства приведем сначала одномерный вариант алгоритма:

$$\begin{aligned} &G_t + 0.5\left(V\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{G})_{\overset{\circ}{x}} + 2\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} - GV_{\overset{\circ}{x}}\right) = \eta\tau(\Phi_s \hat{G}_x)_{\bar{x}}, \quad x \in \omega_h, \\ &G_{t,0} + 0.5\left((V\hat{G})_{x,0} + 2\hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}\right) - 0.25h\big((GV)_{x\bar{x},1} + (2 - G_0)\, V_{x\bar{x},1}\big) = 2\eta\tau\Phi_{s,0}\hat{G}_{x,0}, \\ &G_{t,M} + \frac{1}{2}\left((V\hat{G})_{\bar{x},M} + 2\hat{V}_{\bar{x},M} - G_M V_{\bar{x},M}\right) + \frac{h}{4}\left((GV)_{x\bar{x},M-1} + (2 - G_M)\, V_{x\bar{x},M-1}\right) = 2\eta\tau\Phi_{\bar{s},M}\hat{G}_{\bar{x},M}, \\ &V_t + \frac{1}{3}\big(V\hat{V}_{\overset{\circ}{x}} + (V\hat{V})_{\overset{\circ}{x}}\big) + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}} = \frac{4}{3}\tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \frac{4}{3}\left(\tilde{\mu} - \mu e^{-G}\right) V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь $\tilde{\mu} = \mu\|e^{-G}\|_C$, а Φ — коэффициент искусственной вязкости.

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку $\bar{\omega}_h$ функций $\ln(\rho_0)$ и u_0:

$$G_m^0 = \ln((\rho_0)_m), \quad \mathbf{V}_m^0 = u_{0m}, \quad m = 0, 1, \ldots, M. \tag{3.5}$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{3.6}$$

В схеме используются центральные разности по пространственным переменным, и вследствие этого она является при $\eta = 0$ немонотонной. Поэтому в целях устранения осцилляций, возникающих на разрывах, в правые части разностных уравнений, аппроксимирующих первое уравнение системы (3.1), добавлены слагаемые, которые играют роль искусственной вязкости. Теоретические оценки точности, приводимые ниже в случае гладких точных решений, справедливы при любых $\eta \geqslant 0$, что подтверждено тестовыми расчетами. В численных экспериментах были использованы два вида функций: $\Phi = e^G$ и $\Phi = V^2$.

В многомерном случае разностная схема выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}&G_t + A_1^g(\mathbf{V})\hat{G} + A_2^g\hat{\mathbf{V}} + B^g(G,\mathbf{V}) = \eta\tau A_3^g(\Phi)\hat{G}, \quad \mathbf{x}\in\bar{\Omega}_{\bar{h}},\\ &(V_k)_t + A_1^{v_k}(\mathbf{V})\hat{\mathbf{V}}_k + A_2^{v_k}(G)\hat{G} = A_3^{v_k}\hat{V}_k + B^{v_k}(G,\mathbf{V}), \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}},\ k=1,\dots,s.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Начальные и граничные условия ставятся аналогично одномерному случаю:

$$\begin{aligned}&G^0 = \ln(\rho_0), \quad \mathbf{V}^0 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x}\in\bar{\Omega}_{\bar{h}};\\ &\mathbf{V}^n = 0, \quad n=1,\dots,N, \quad \mathbf{x}\in\gamma_{\bar{h}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Выше в уравнениях (3.7) были использованы следующие обозначения:

$$A_1^g(\mathbf{V})\hat{G} = \begin{cases} 0.5(V_k\hat{G})_{x_k}, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^-, \quad k=1,\dots,s;\\ 0.5\sum\limits_{k=1}^{s}\left(V_k\hat{G}_{\overset{\circ}{x}_k} + (V_k\hat{G})_{\overset{\circ}{x}_k}\right), \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}};\\ 0.5(V_k\hat{G})_{\bar{x}_k}, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^+, \quad k=1,\dots,s.\end{cases} \tag{3.9}$$

$$A_2^g\hat{\mathbf{V}} = \begin{cases} (\hat{V}_k)_{x_k}, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^-, \quad k=1,\dots,s;\\ \sum\limits_{k=1}^{s}(\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k}, \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}};\\ (\hat{V}_k)_{\bar{x}_k}, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^+, \quad k=1,\dots,s.\end{cases} \tag{3.10}$$

$$A_3^g(\Phi)\hat{G} = \begin{cases} 2\Phi_{s_k}\hat{G}_{x_k}, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^-, \quad k=1,\dots,s;\\ \sum\limits_{k=1}^{s}(\Phi_{s_k}\hat{G}_{x_k})_{\bar{x}_k}, \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}};\\ 2\Phi_{\bar{s}_k}\hat{G}_{\bar{x}_k}, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^+, \quad k=1,\dots,s.\end{cases} \tag{3.11}$$

$$B^g(G,\mathbf{V}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\,G(V_k)_{x_k} - \dfrac{h_k}{4}\left((GV_k)_{x_kx_k} + (2-G)\,(V_k)_{x_kx_k}\right) = 0, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^-, \quad k=1,\dots,s;\\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{s}G(V_k)_{\overset{\circ}{x}_k}, \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}};\\ -\dfrac{1}{2}\,G(V_k)_{\bar{x}_k} + \dfrac{h_k}{4}\left((GV_k)_{\bar{x}_k\bar{x}_k} + (2-G)\,(V_k)_{\bar{x}_k\bar{x}_k}\right) = 0, \quad \mathbf{x}\in\gamma_k^+, \quad k=1,\dots,s.\end{cases} \tag{3.12}$$

$$A_1^{v_k}(\mathbf{V})\hat{\mathbf{V}}_k = \frac{1}{3}\left(V_k(\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k} + (V_k\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{l=1,l\neq k}^{s}\left(V_l(\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_l} + (V_l\hat{V}_k)_{\overset{\circ}{x}_l}\right), \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}}, \quad k=1,\dots,s. \tag{3.13}$$

$$A_2^{v_k}(G)\hat{G} = \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\overset{\circ}{x}_k}, \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}}, \quad k=1,\dots,s. \tag{3.14}$$

$$A_3^{v_k}\hat{V}_k = \tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}\,(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{l=1,l\neq k}^{s}(\hat{V}_k)_{x_l\bar{x}_l}\right), \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}}, \quad k=1,\dots,s. \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}B^{v_k}(G,\mathbf{V}) = \frac{V_k}{2}\sum_{l=1,l\neq k}^{s}(V_l)_{\overset{\circ}{x}_l} - \left(\tilde{\mu} - \mu e^{-G}\right)\left(\frac{4}{3}\,(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{l=1,l\neq k}^{s}(V_k)_{x_l\bar{x}_l}\right) + \\ + \frac{\mu}{3}\,e^{-G}\sum_{l=1,l\neq k}^{s}(V_l)_{\overset{\circ}{x}_k\overset{\circ}{x}_l} + f_k, \quad \mathbf{x}\in\Omega_{\bar{h}}, \quad k=1,\dots,s.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Теоретическое исследование разностной схемы проводится при предположении, что $\tilde{p}'(g) = \sigma \equiv \text{const} > 0$.

Теорема 3.1. *Решение р.с.* (3.7)–(3.16) *существует и единственно.*

Доказательство. Решение р.с. (3.7)–(3.16) на верхнем временно́м слое $x = (\hat{G},\hat{\mathbf{V}})^*$ является решением системы линейных уравнений

$$Ax = b.$$

Матрица A представима в виде суммы трех матриц

$$A = \tilde{E} + \tau A_1 + \tau A_2,$$

где $\tilde{E}$ — диагональная матрица (она соответствует членам G_t и $\mathbf{V}_t$), у которой диагональные элементы равны $\tilde{p}'(g)$, если строка матрицы соответствует члену G_t во внутренних узлах сетки, $\tilde{p}'(g)/2$, если строка соответствует члену G_t в граничных узлах, и 1, если строка соответствует члену $\mathbf{V}_t$.

Матрица A_1 состоит из блоков

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_1^g & \tilde{A}_2^g \\ A_2^{\mathbf{v}} & A_1^{\mathbf{v}} \end{pmatrix}.$$

Строки блоков $\tilde{A}_k^g$, $k = 1, 2$, получаются умножением на $\tilde{p}'(g)/2$ строк матриц A_k^g, соответствующих граничным узлам сетки, и на $\tilde{p}'(g)$ для внутренних узлов. В случае $\tilde{p}'(g) = \mathrm{const} > 0$ матрица A_1 является кососимметричной.

Матрица A_2 — симметричная неотрицательно определенная, состоящая из блоков

$$\begin{pmatrix} -\eta\tau\tilde{A}_3^g(\Phi) & 0 \\ 0 & -A_3^{\mathbf{v}} \end{pmatrix},$$

где блок $\tilde{A}_3^g(\Phi)$ отличается от матрицы $A_3^g(\Phi)$ аналогично случаю блоков $\tilde{A}_k^g$, $k = 1, 2$.

Поскольку для любого вектора x ($x \neq 0$), имеем

$$(Ax, x) = (\tilde{E}x, x) + \tau(A_1x, x) + \tau(A_2x, x) \geqslant (\tilde{E}x, x) > 0,$$

то матрица A не вырождена и решение на $(n+1)$-м временно́м слое всегда однозначно определяется по n-у слою. Следовательно, решение р.с. (3.7)–(3.16) существует и единственно.

Для ошибки численного интегрирования по р.с. (3.7)–(3.16) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть для дифференциальной задачи* (1.1), (1.2) *выполнены условия* A–D. *Тогда существуют величины* $\tau_{\max}$, $h_{\max}$, K *и* C, *зависящие от параметров*

1) размера области Q,

2) $\|(\rho, \nabla\rho)\|_{C^{3,2}(Q)}$, $\|\mathbf{u}\|_{C^{4,2}(Q)}$,

3) константы m *из условия* C, *а также от* μ, σ *и* $\|f\|_{C(Q)}$,

4) константы η *и* $\|\Phi\|_{W_{2,h}^1}$,

такие, что

$$\max_{n=1,\dots,N}(\|G^n - g^n\|_1 + \|\mathbf{V}^n - \mathbf{u}^n\|_1) + \sqrt{\tau\sum_{n=1}^{N}[(|\mathbf{V}^n - \mathbf{u}^n|_2)^2 + \|\mathbf{V}_{\bar{t}}^n - \mathbf{u}_{\bar{t}}^n\|^2]} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|G^0 - g^0\|_1 + \|\mathbf{V}^0 - \mathbf{u}_0\|_1 + \sqrt{\tau}\,|\mathbf{V}^0 - \mathbf{u}_0|_2 + \tau + h^2\right),$$

где $\tau \leqslant \tau_{\max}$, $h \leqslant h_{\max}$, $\tau \leqslant K|\ln|h||^{-0{,}5}$ *при* $\dim(\Omega) = 2$ *и* $\tau \leqslant K\sqrt{h}$ *при* $\dim(\Omega) = 3$.

Доказательству этой теоремы будет посвящена отдельная статья.

4. Численные эксперименты. Для проверки работоспособности предложенной разностной схемы были проведены расчеты одномерной задачи о сглаживании разрыва плотности и двумерной задачи о каверне.

4.1. Задача о сглаживании разрыва плотности. Для исследования поведения разностного решения в окрестности точек разрыва дифференциального решения была рассмотрена одномерная задача в области $\Omega = [0; 1]$ с разрывным условием для функции плотности в начальный момент времени:

$$\rho_0 = \begin{cases} 2, & x \in \left[\dfrac{9}{20}, \dfrac{11}{20}\right]; \\ 1, & x \notin \left[\dfrac{9}{20}, \dfrac{11}{20}\right]. \end{cases}$$

Начальные и краевые условия были заданы следующим образом:

$$(g, u)|_{t=0} = (\ln(\rho_0), 0), \quad x \in \Omega,$$
$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega.$$

Вычисления проводились по трем вариантам схемы (3.4)–(3.6). В первом варианте искусственная вязкость не использовалась, т.е. был взят параметр η равным нулю. Во втором и третьем вариантах использовалась искусственная вязкость с функцией Φ, равной e^G и V^2 соответственно. Расчеты проводились с разными величинами параметра η. Физическая картина решения достаточно понятна: разрыв с течением времени начинает расплываться и постепенно функция плотности становится константой. При этом в окрестности точек перепада значений функции плотности не должно появляться осцилляций у численного решения. Как и ожидалось, в первом случае осцилляции присутствовали, а во втором и третьем случаях они уменьшались с ростом параметра η. Во втором случае они не искажали решение при $\eta = 0.1$, в третьем при $\eta = 1$. В обоих этих случаях был получен физически ожидаемый характер решения, и отличия обоих решений не выходили за пределы прогнозируемой точности. Заметим, что численные эксперименты проводились на различных сетках, а параметры сжимаемости и вязкости газа брались в пределах $[1; 100]$ и $[0.001; 1]$ соответственно. Таким образом, было экспериментально проверена целесообразность применения искусственной вязкости в схеме (3.7)–(3.16).

4.2. Задача о каверне. Задачей о каверне принято называть следующую начально-краевую задачу:

$$
\begin{aligned}
&(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (1, \mathbf{0}), \ (x_1, x_2) \in \Omega,\\
&u_1(t, x_1, x_2) = 1, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times \Gamma, \quad \Gamma \equiv \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega, \, x_2 = 1\},\\
&\Omega = [0; 1] \times [0; 1],\\
&u_1(t, x_1, x_2) = 0, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times (\partial\Omega \setminus \Gamma),\\
&u_2(t, x_1, x_2) = 0, \quad (t, x_1, x_2) \in [0, T] \times \partial\Omega,\\
&\rho(t, 0, 1) = 1, \quad t \in [0; T].
\end{aligned}
$$

Как и в случае одномерной задачи, счет проводился по тем же трем вариантам схемы (3.7)–(3.16). При этом были внесены изменения в схему, поскольку на части границы задается граничное условие, отличное от условия “прилипания”. Эти изменения относятся к разностной аппроксимации уравнения неразрывности в узлах $m_2 = M_2$:

$$
G_t + \hat{G}_{\overset{\circ}{x}_1} + 0.5\left((V_2\hat{G})_{\bar{x}_2} + 2(\hat{V}_2)_{\bar{x}_2} - G(V_2)_{\bar{x}_2}\right) + 0.25h_2\left((GV_2)_{\bar{x}_2\bar{x}_2} + (2 - G)\,(V_2)_{\bar{x}_2\bar{x}_2}\right) = 2\Phi_{\bar{s}_2}\hat{G}_{\bar{x}_2},
$$

$$
m_1 = 1, \ldots, M_1 - 1, \quad m_2 = M_2,
$$

$$
G_t + \hat{G}_{\bar{x}_1} + \frac{h_1}{4} G_{\bar{x}_1\bar{x}_1} = 2\Phi_{\bar{s}_2}\hat{G}_{\bar{x}_2}, \quad m_1 = M_1, \quad m_2 = M_2.
$$

Физическая картина решения хорошо известна. Газ, находящийся в каверне, начинает двигаться под воздействием стационарного потока вдоль границы γ_2^+ и, поскольку граничные условия не зависят от времени, со временем приходит к стационарному круговому движению. При этом характер установившегося потока зависит от параметров сжимаемости и вязкости газа и не должен иметь осцилляций. Численное решение, полученное по схеме без искусственной вязкости, в большинстве случаев соответствует ожидаемой картине. Однако в отдельных случаях было получено решение, противоречащее физическому смыслу: наблюдалась область резкого скачка плотности газа там, где ее быть не должно. К тому же на решение накладывалась мелкая рябь, появляющаяся вследствие немонотонности разностной схемы. Отмеченные недостатки численного решения пропадают при расчетах по второму и третьему вариантам разностной схемы, когда используется искусственная вязкость. При всех параметрах газа получается физически верное решение, правильно зависящее от изменений параметров газа. Диапазон изменения параметров брался такой же, как и в одномерном случае.

5. Заключение. Предложена новая неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа в переменных Эйлера в случае одной, двух и трех пространственных переменных. Аппроксимация уравнения неразрывности, записанного для функции логарифма плотности газа, обеспечивает соблюдение положительности значений плотности при любых параметрах схемы. Разностная схема является двухслойной и на каждом временно́м шаге сеточное решение является решением линейной системы. Доказана теорема о существовании и единственности разностного решения этой схемы без каких-либо предположений о шагах сетки. Для разности между разностным решением и точным гладким дифференциальным решением приведена оценка близости в зависимости от шагов сетки. Работоспособность разностной схемы проверена на задаче с разрывными начальными данными в случае одной пространственной переменной и на задаче о каверне в случае двух пространственных переменных. В результате численных экспериментов была определена величина параметра, отвечающего за искусственную вязкость, которая позволяет получать неискаженные разрывные решения.

Авторы благодарят Р. Г. Рудника за помощь в проведении численных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин В.А., Егоров И.В.* Численное моделирование динамики вязкого совершенного газа. М.: Физматлит, 2012.
2. *Белоцерковский О.М., Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д.* Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере. М.: Янус, 2000.
3. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
4. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012.
5. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
6. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики жидкостей и газов. Новосибирск: Наука, 1983.
7. *Амосов А.А., Злотник А.А.* Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. **27**, № 7. 1032–1049.
8. *Kobelkov G.M., Sokolov A.G.* On finite difference schemes for viscous barotropic compressible gas problems // Sov. J. Numer. Mat. Modelling. 1994. **9**. 223–229.
9. *Liu B.* On a finite element method for three-dimensional unsteady compressible viscous flows // Numer. Methods Partial Differential Equations. 2004. **20**. 432–449.
10. *Popov A.V.* A study of cost-effective finite difference scheme for the system of equations for two-dimensional flow of a viscous barotropic gas // Sov. J. Numer. Mat. Modelling. 1990. **5**. 395–417.
11. *Попов А.В.* Исследование экономичного конечно-разностного метода для двухмерных уравнений вязкого теплопроводного газа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. **30**, № 7. 1066–1080.
12. *Жуков К.А., Попов А.В.* Исследование экономичной разностной схемы для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. **45**, № 4. 677–693.
13. *Жуков К.А., Попов А.В.* Разностные и проекционно-разностные схемы для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**, № 1. 63–69.
14. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, 2000.
15. *Абрашин В.Н., Матус П.П.* О точности разностных схем для одномерных задач газовой динамики // Дифференциальные уравнения. 1981. **17**, № 7. 1155–1170.
16. *Лапин А.В.* О корректности и сходимости в сильной норме разностных схем для квазилинейных параболических уравнений. I, II // Известия вузов. Математика. 1974. № 7. 42–52; № 8. 47–53.
17. *Лапин А.В., Ляшко А.Д.* О сходимости разностных схем для квазилинейных параболических уравнений // Известия вузов. Математика. 1975. № 12. 30–42.
18. *Ляшко А.Д., Федоров Е.М.* О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем // Дифференциальные уравнения. 1981. **17**, № 7. 1304–1316.
19. *Арефьев В.С.* Об устойчивости нелинейных разностных схем // Докл. АН СССР. 1985. **285**, № 1. 11–14.
20. *Арделян Н.В.* Разрешимость и сходимость нелинейных разностных схем // Докл. АН СССР. 1988. **302**, № 6. 1289–1292.
21. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
22. *Popov A.V.* A study of finite-difference method for solving gas dynamic equations in Euler coordinates // Sov. J. Numer. Mat. Modelling. 1991. **6**. 377–394.

Поступила в редакцию
12.09.2013