

УДК 51.73

ИЗМЕРЕНИЕ ФАЗОВОГО СДВИГА КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В. К. Игнатьев¹, А. В. Никитин¹, С. В. Юшанов¹

Предложен высокоточный цифровой метод измерения фазового сдвига сигналов, параметры которых мало меняются за время, равное периоду дискретизации, но могут значительно измениться на всем интервале измерения. Работа выполнена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (проекты № 14.В37.21.0284 и № 14.В37.21.0736).

Ключевые слова: медленно меняющиеся параметры, метод наименьших квадратов, фазовый сдвиг, ряд Тейлора.

1. Введение. Необходимость в измерении фазового сдвига возникает в задачах радиолокации и радионавигации, неразрушающем контроле, радиоастрономии, радиофизике и во многих других прикладных областях [1, 2]. Использование информации, содержащейся в фазе сигнала, позволяет получить при наличии помех наиболее достоверную информацию об исследуемой системе.

Точность измерения фазового сдвига существенно зависит от наличия аддитивных и мультипликативных помех, изменений огибающей и частоты исследуемых сигналов. Например, в радионавигации и радиолокации при строгом рассмотрении необходимо учитывать эффекты влияния среды распространения сигналов: земную атмосферу следует считать изменчивой как по времени, так и в пространстве [3]. Помимо этого, для обеспечения требований по широкополосности фазометра алгоритм его работы должен исключать зависимость результатов измерений фазы от амплитуды входных сигналов. Это связано, например, с тем, что при реализации СВЧ-устройств в широком частотном диапазоне обеспечить стабильность динамических параметров как самих сигналов, так и элементов СВЧ-устройств гораздо сложнее по сравнению с фазовыми параметрами [4].

Задача измерения разности фаз давно исследуется, и разработано множество способов ее решения: метод компенсации фазы, метод преобразования интервала времени в напряжение [2], цифровой метод подсчета количества импульсов [5–7], метод измерения фазы с преобразованием частоты [2, 5], корреляционные методы [2, 5, 8], метод преобразования Фурье с последующим извлечением фазовой составляющей [5, 9–11], подгонка данных по методу наименьших квадратов под синусоидальный сигнал [12]. Большинство из этих методов не предполагают изменения частоты и огибающей исследуемых сигналов, а точность методов сильно падает при измерении разности фаз зашумленных сигналов.

Лучшие результаты по быстродействию и помехоустойчивости показывает метод подгонки данных по методу наименьших квадратов под синусоидальный сигнал [12], который также используется в стандарте IEEE для тестирования аналого-цифровых преобразователей [13]. Суть метода состоит в том, чтобы для оцифрованного гармонического сигнала

$$x(t_n) = A \sin(\omega_0 t_n + \varphi_0) = C_0 \sin(\omega_0 t_n) + C_1 \cos(\omega_0 t_n),$$

где ω_0 — частота и $\varphi_0 = \arctg[-C_0/C_1] + (1 - \text{sgn}[C_0])\pi/2$, минимизировать следующую сумму квадратов разностей:

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{N-1} (x(t_n) - C_0 \sin(\omega_0 t_n) - C_1 \cos(\omega_0 t_n))^2.$$

Для этого, после несложных преобразований [13], необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений относительно C_0 и C_1 , которая в матричной форме имеет вид $D^T D C = D^T b$, где

$$D = \begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t_0) & \cos(\omega_0 t_0) \\ \sin(\omega_0 t_1) & \cos(\omega_0 t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin(\omega_0 t_{N-1}) & \cos(\omega_0 t_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \dots \\ x(t_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

¹ Волгоградский государственный университет, Физико-технический институт, просп. Университетский, 100, 400062, г. Волгоград; В. К. Игнатьев, профессор, e-mail: ignatjev@vpost.ru; А. В. Никитин, доцент, e-mail: random@vistcom.ru; С. В. Юшанов, ст. преподаватель, e-mail: syus@list.ru

При измерении фазового сдвига двух сигналов данный алгоритм применяется к обоим сигналам, вычисляются φ_0 , а затем находится их разность [12]. Заметим, что в этом методе значение частоты ω_0 задается вручную и должно быть получено любым другим способом.

2. Вывод соотношений. Одним из применений измерения фазового сдвига является определение положения и угловой ориентации объектов с помощью спутниковых навигационных систем. Для измерения ориентации во всех плоскостях достаточно трех приемников сигнала с одного спутника, но измерения все равно сводятся к определению разности фаз колебаний на двух приемниках. В таких системах сигналы, которые принимает потребитель, не являются гармоническими, так как излучаются движущимся с переменной радиальной скоростью источником и распространяются в диспергирующей среде. Эффекты доплеровского сдвига и влияния среды распространения сигналов малы за время, равное квазипериоду колебаний, поэтому для рассмотренной системы актуальна модель сигналов на двух приемниках:

$$x_1(t) = a_1(t) \sin(\theta(t)), \quad x_2(t) = a_2(t) \sin(\theta(t) + \varphi). \quad (1)$$

Огибающие этих сигналов $a_1(t)$, $a_2(t)$ — непрерывные положительные функции, в общем случае различные, а полные фазы отличаются на постоянную величину φ , которая может изменяться в пределах $[-\pi/2, \pi/2]$. Мгновенная частота сигналов $\omega(t) = d\theta/dt$ также является непрерывной положительной функцией, а носитель спектра мгновенной частоты ограничен: $\omega(t) = \int_{-P}^P \Omega(p) \exp(ipt) dp$. Тогда ограничены мгновенная частота и все ее производные

$$|\omega^{(n)}(t)| \leq \omega_M P^n, \quad \omega_M = 2 \int_0^P |\Omega(p)| dp, \quad (2)$$

а квазигармоническое представление (1) является единственным [14].

Предполагается также, что огибающие сигналов (1) удовлетворяют условию медленного изменения амплитуды

$$|\dot{a}_1(t)| \ll \omega_M a_1(t), \quad |\dot{a}_2(t)| \ll \omega_M a_2(t). \quad (3)$$

Сигналы, удовлетворяющие условиям (2) и (3), называются сигналами с медленно меняющимися амплитудой и частотой (ММАЧ). Единственность квазигармонического представления (1) позволяет однозначно определить огибающие и полные фазы ММАЧ-сигналов по их эквидистантной выборке [15, 16]. Для этого возьмем пять значений сигналов на интервале $[t - 4\Delta, t]$ с шагом Δ , который удовлетворяет условиям

$$\Delta < \pi/(2\omega_M), \quad \Delta \ll 1/P. \quad (4)$$

Затем разложим законы изменения огибающей и полной фазы в ряд Тейлора вблизи средней точки интервала $(t - 2\Delta)$:

$$\begin{aligned} x_1(t - i\Delta) &= (A_1 + \delta a_{1i}) \sin\left(\Theta + \Omega(2 - i)\Delta + \frac{1}{2} \Phi(2 - i)^2 + \delta\theta_i\right), \\ x_2(t - i\Delta) &= (A_2 + \delta a_{2i}) \sin\left(\Theta + \Omega(2 - i)\Delta + \frac{1}{2} \Phi(2 - i)^2 + \delta\theta_i + \varphi\right). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $a_k(t - 2\Delta) = A_k$, $\theta(t - 2\Delta) = \Theta$, $\omega(t - 2\Delta) = \Omega$, $\dot{\omega}(t - 2\Delta)\Delta^2 = \Phi$. Отклонения при выполнении условий (2)–(4) удовлетворяют ограничениям

$$|\delta\theta_i(t)| \leq \frac{1}{6} |\ddot{\omega}(t - 2\Delta)\Delta^3| \ll 1, \quad |\delta a_{ki}(t)| \leq (2 - i)\dot{a}_k(t - 2\Delta)\Delta \ll A_k. \quad (5)$$

Рассмотрим произведения отсчетов сигналов в точках t и $t - 4\Delta$:

$$\begin{aligned} x_1(t - 4\Delta)x_2(t) &= \frac{A_1 A_2 + \alpha_{40}}{2} (\cos(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4 + \varphi) - \cos(2\Theta + 4\Phi + \delta\theta_0 + \delta\theta_4 + \varphi)), \\ x_1(t)x_2(t - 4\Delta) &= \frac{A_1 A_2 + \alpha_{04}}{2} (\cos(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4 - \varphi) - \cos(2\Theta + 4\Phi + \delta\theta_0 + \delta\theta_4 + \varphi)). \end{aligned}$$

В силу условий (5) входящие в эти выражения величины

$$\alpha_{04} = A_1 \delta a_{24} + A_2 \delta a_{10} + \delta a_{10} \delta a_{24}, \quad \alpha_{40} = A_1 \delta a_{20} + A_2 \delta a_{14} + \delta a_{14} \delta a_{20}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|\alpha_{40}| \ll A_1 A_2, \quad |\alpha_{04}| \ll A_1 A_2, \quad (6)$$

а разность произведений отсчетов сигналов дает

$$\begin{aligned} B_1(t) &= x_1(t - 4\Delta)x_2(t) - x_1(t)x_2(t - 4\Delta) = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} (\cos(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4 + \varphi) - \cos(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4 - \varphi)) + \delta B_1(t) = \\ &= -A_1 A_2 \sin(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4) \sin(\varphi) + \delta B_1(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \delta B_1(t) &= \frac{\alpha_{40}}{2} \cos(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4 + \varphi) - \frac{\alpha_{04}}{2} \cos(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4 - \varphi) + \\ &+ \frac{\alpha_{04} - \alpha_{40}}{2} \cos(4\Theta + 4\Phi + \delta\theta_0 + \delta\theta_4 + \varphi). \end{aligned}$$

Из условий (5) и (6) следует, что $|\delta\theta_0 - \delta\theta_4| \ll 1$ и $|\delta B_1(t)| \ll A_1 A_2$.

Аналогично рассмотрим еще две комбинации отсчетов:

$$\begin{aligned} x_1(t - 3\Delta)x_2(t - \Delta) &= \frac{A_1 A_2 + \alpha_{31}}{2} (\cos(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3 + \varphi) - \cos(2\Theta + \Phi + \delta\theta_1 + \delta\theta_3 + \varphi)), \\ x_1(t - \Delta)x_2(t - 3\Delta) &= \frac{A_1 A_2 + \alpha_{13}}{2} (\cos(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3 - \varphi) - \cos(2\Theta + \Phi + \delta\theta_1 + \delta\theta_3 + \varphi)), \\ \alpha_{31} &= A_1 \delta a_{21} + A_2 \delta a_{13} + \delta a_{13} \delta a_{21}, \quad |\alpha_{31}| \ll A_1 A_2, \\ \alpha_{13} &= A_1 \delta a_{23} + A_2 \delta a_{11} + \delta a_{11} \delta a_{23}, \quad |\alpha_{13}| \ll A_1 A_2, \end{aligned} \quad (8)$$

разность которых определяется выражением

$$\begin{aligned} B_2(t) &= x_1(t - 3\Delta)x_2(t - \Delta) - x_1(t - \Delta)x_2(t - 3\Delta) = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} (\cos(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3 + \varphi) - \cos(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3 - \varphi)) + \delta B_2(t) = \\ &= -A_1 A_2 \sin(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3) \sin(\varphi) + \delta B_2(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \delta B_2(t) &= \frac{\alpha_{31}}{2} \cos(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3 + \varphi) - \frac{\alpha_{13}}{2} \cos(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3 - \varphi) + \\ &+ \frac{\alpha_{13} - \alpha_{31}}{2} \cos(2\Theta + \Phi + \delta\theta_1 + \delta\theta_3 + \varphi), \end{aligned}$$

причем $|\delta\theta_1 - \delta\theta_3| \ll 1$ и $|\delta B_2(t)| \ll A_1 A_2$.

В первом порядке малости по величинам $|\delta\theta_0 - \delta\theta_4|$, $|\delta\theta_1 - \delta\theta_3|$, $\frac{|\delta B_1(t)|}{A_1 A_2}$, $\frac{|\delta B_2(t)|}{A_1 A_2}$ при условии, что $\varphi \neq k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), для отношения найденных величин $B_1(t)$ и $B_2(t)$ получим

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{B_1(t)}{B_2(t)} = \frac{A_1 A_2 \sin(4\Omega\Delta + \delta\theta_0 - \delta\theta_4) \sin(\varphi) + \delta B_1(t)}{A_1 A_2 \sin(2\Omega\Delta + \delta\theta_1 - \delta\theta_3) \sin(\varphi) + \delta B_2(t)} \approx 2 \cos(2\Omega\Delta) + \delta C_1(t), \\ \delta C_1(t) &= -\frac{2 \cos^2(2\Omega\Delta)}{\sin(2\Omega\Delta)} (\delta\theta_1 - \delta\theta_3) + \frac{\cos(4\Omega\Delta)}{\sin(2\Omega\Delta)} (\delta\theta_0 - \delta\theta_4) + \frac{\delta B_1(t) - 2 \cos(2\Omega\Delta) \delta B_2(t)}{A_1 A_2 \sin(2\Omega\Delta) \sin(\varphi)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что для ММАЧ-сигналов величина $|\delta C_1(t)|$ много меньше единицы при $\varphi \sim \pi/4$ и $\Delta \sim \pi/(4\Omega)$, но неограниченно растет при $\Delta \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow k\pi$. Таким образом,

$$\cos(2\Omega\Delta) = \frac{B_1(t)}{2B_2(t)} - \frac{1}{2} \delta C_1(t). \quad (11)$$

Рассмотрим еще две функции

$$\begin{aligned} B_3(t) &= x_1(t - 3\Delta)x_2(t - \Delta) - x_1(t - 2\Delta)x_2(t - 2\Delta), \\ B_4(t) &= x_1(t - \Delta)x_2(t - 3\Delta) - x_1(t - 2\Delta)x_2(t - 2\Delta). \end{aligned} \quad (12)$$

Два входящих в эти функции произведения уже найдены в (8), а для третьего имеем

$$x_1(t - 2\Delta)x_2(t - 2\Delta) = A_1 A_2 \sin(\Theta) \sin(\Theta + \varphi) = \frac{A_1 A_2}{2} (\cos(\varphi) - \cos(2\Theta + \varphi)).$$

Аналогично соотношениям (7) и (9) получим

$$\begin{aligned} B_3(t) &= -A_1 A_2 \sin(\Omega\Delta + \varphi) \sin(\Omega\Delta) \cos^2\left(\frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_3}{2}\right) + \delta B_3(t), \\ \delta B_3(t) &= A_1 A_2 \sin\left(2\Theta + \frac{\Phi}{2} + \frac{\delta\theta_1 + \delta\theta_3}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\delta\theta_1 + \delta\theta_3}{2}\right) + \\ &\quad + \alpha_{31} \sin\left(\Theta + \Omega\Delta + \frac{\Phi}{2} + \delta\theta_1 + \varphi\right) \sin\left(\Theta - \Omega\Delta + \frac{\Phi}{2} + \delta\theta_3\right) - \\ &\quad - A_1 A_2 \left(\frac{1}{2} \sin(2\Omega\Delta + \varphi) \sin(\delta\theta_1 - \delta\theta_3) + \cos(\Omega\Delta + \varphi) \cos(\Omega\Delta) \sin^2\left(\frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_3}{2}\right)\right), \\ B_4(t) &= -A_1 A_2 \sin(\Omega\Delta - \varphi) \sin(\Omega\Delta) \cos^2\left(\frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_3}{2}\right) + \delta B_4(t), \\ \delta B_4(t) &= A_1 A_2 \sin\left(2\Theta + \frac{\Phi}{2} + \frac{\delta\theta_1 + \delta\theta_3}{2} + \varphi\right) \sin\left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\delta\theta_1 + \delta\theta_3}{2}\right) + \\ &\quad + \alpha_{31} \sin\left(\Theta + \Omega\Delta + \frac{\Phi}{2} + \delta\theta_1\right) \sin\left(\Theta - \Omega\Delta + \frac{\Phi}{2} + \delta\theta_3 + \varphi\right) - \\ &\quad - A_1 A_2 \left(\frac{1}{2} \sin(2\Omega\Delta - \varphi) \sin(\delta\theta_1 - \delta\theta_3) + \cos(\Omega\Delta - \varphi) \cos(\Omega\Delta) \sin^2\left(\frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_3}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

причем $|\delta\theta_1 - \delta\theta_3| \ll 1$, $|\delta B_4(t)| \ll A_1 A_2$ и $|\delta B_3(t)| \ll A_1 A_2$.

Полагая, что $\varphi \neq (k + 1/2)\pi$, рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} C_2(t) = \frac{B_3(t) - B_4(t)}{B_3(t) + B_4(t)} &= \frac{-2A_1 A_2 \cos(\Omega\Delta) \sin(\varphi) \sin(\Omega\Delta) \cos^2\left(\frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_3}{2}\right) - \delta B_3(t) + \delta B_4(t)}{2A_1 A_2 \sin^2(\Omega\Delta) \cos(\varphi) \cos^2\left(\frac{\delta\theta_1 - \delta\theta_3}{2}\right) - \delta B_3(t) - \delta B_4(t)} \approx \\ &\approx \operatorname{ctg}(\Omega\Delta) \operatorname{tg}(\varphi) + \delta C_2(t), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\delta C_2(t) = \frac{\cos(\Omega\Delta) \sin(\varphi) (\delta B_3(t) + \delta B_4(t))}{A_1 A_2 \sin^3(\Omega\Delta) \cos^2(\varphi)} - \frac{\delta B_3(t) - \delta B_4(t)}{A_1 A_2 \sin^2(\Omega\Delta) \cos(\varphi)}.$$

Для ММАЧ-сигналов величина $|\delta C_2(t)|$ много меньше единицы при $\varphi \sim \pi/4$ и $\Delta \sim \pi/(4\Omega)$, но неограниченно растет при $\Delta \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow (k + 1/2)\pi$.

Выражая $\operatorname{tg}(\varphi)$ из соотношения (13) и используя выражение (11), получим

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(\Omega\Delta) \left(\frac{B_3(t) - B_4(t)}{B_3(t) + B_4(t)} - \delta C_2(t)\right) = \pm \left(\frac{B_3(t) - B_4(t)}{B_3(t) + B_4(t)} - \delta C_2(t)\right) \sqrt{\frac{2B_2(t) - B_1(t) + B_2(t)\delta C_1(t)}{2B_2(t) + B_1(t) - B_2(t)\delta C_1(t)}}.$$

Из соотношения (10) следует, что погрешность $|\delta C_1(t)|$ минимальна при $\Delta \sim \pi/(4\Omega)$ тогда, когда, как следует из формулы (11), $|B_1(t)| \ll |B_2(t)|$. Следовательно, в первом порядке малости по $|\delta C_1(t)|$ и $|\delta C_2(t)|$ при оптимальных значениях параметров получаем

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \pm \frac{B_3(t) - B_4(t)}{B_3(t) + B_4(t)} \sqrt{\frac{2B_2(t) - B_1(t)}{2B_2(t) + B_1(t)}} + \frac{\delta B_1(t) + 16\sqrt{2}\delta B_2(t)}{4A_1 A_2}. \tag{14}$$

Рассмотрим сигналы (1) на временном интервале $T \gg \Delta$ и перейдем к дискретным значениям, взятым в моменты времени t_n , где $n = 0, \dots, N - 1$. Функции $B_1(t) - B_4(t)$, (7), (9) и (12) в этом случае принимают

следующий вид при $n = 4, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned} B_1[n] &= x_1[n-4]x_2[n] - x_1[n]x_2[n-4], & B_2[n] &= x_1[n-3]x_2[n-1] - x_1[n-1]x_2[n-3], \\ B_3[n] &= x_1[n-3]x_2[n-1] - x_1[n-2]x_2[n-2], & B_4[n] &= x_1[n-1]x_2[n-3] - x_1[n-2]x_2[n-2]. \end{aligned}$$

Здесь используется обозначение $f[n] = f(t_n)$ и предполагается, что отсчеты взяты эквидистантно с шагом дискретизации Δt , удовлетворяющим условию (4). Перепишем выражение (14) для дискретного времени для первого порядка малости погрешности с учетом того, что $B_2(t) = B_3(t) - B_4(t)$:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{B_2[n]}{B_3[n] + B_4[n]} \sqrt{\frac{2B_2[n] - B_1[n]}{2B_2[n] + B_1[n]}}, \quad n = 4, \dots, N - 1.$$

Найдем $\operatorname{tg}(\varphi)$ с помощью метода наименьших квадратов (МНК), минимизируя ошибку

$$E(\varphi) = \sum_{n=4}^{N-1} \left(\left[(B_3[n] + B_4[n]) \sqrt{2B_2[n] + B_1[n]} \right] \operatorname{tg}(\varphi) - B_2[n] \sqrt{2B_2[n] - B_1[n]} \right)^2.$$

В результате получим оценку разности фаз по всем имеющимся данным:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=4}^{N-1} B_2[n](B_3[n] + B_4[n])(4B_2^2[n] - B_1^2[n])}{\sum_{n=4}^{N-1} (B_3[n] + B_4[n])^2 |2B_2[n] + B_1[n]|}. \quad (15)$$

Соотношение (15) является основой метода измерения фазового сдвига квазигармонических сигналов (ИФСКС), который может быть реализован в виде достаточно простой цифровой системы. Погрешность определения фазового сдвига гармонических сигналов методом ИФСКС без шумовой составляющей находится на уровне погрешности цифрового счета, обусловленной конечной разрядностью вычислителя. Соотношение (11) позволяет также оценить среднее на временном интервале $[0, N\Delta t]$ значение медленно меняющейся частоты сигнала.

3. Численное моделирование. Было проведено исследование помехоустойчивости двух методов определения фазового сдвига — разработанного метода ИФСКС и метода подгонки данных по методу наименьших квадратов под синусоидальный сигнал (МНКСС). Заметим, что в первом методе достаточно априорной информации о том, что мгновенная частота $\omega(t)$ исследуемых сигналов (1) изменяется медленно, во втором методе постоянную частоту ω_0 необходимо задавать как можно более близко к частоте исследуемого сигнала. В реальных системах мгновенная частота сигнала может достаточно сильно изменяться во времени, поэтому при исследовании статистических свойств методов предполагалось, что исследуемые сигналы (1) являются аддитивной смесью колебания с линейно изменяющейся частотой с белым нормальным шумом $\xi(t)$ с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением (СКО) σ_ξ . При $\Delta t = 1$ сигналы моделировались следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= [1 + 0.25 \sin(0.0022\pi n)] \sin[0.1\pi n(n + 0.000187n^2)] + \xi_1[n], \\ x_2[n] &= \exp(-0.00021n) \sin[0.1\pi n(n + 0.000187n^2) + \varphi] + \xi_2[n], \quad n = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Огибающие сигналов задавались разными законами изменения, при этом они удовлетворяли условиям (3), а частота — условиям (2), т.е. используемые для моделирования сигналы являются ММАЧ-сигналами. Оценки систематической $\langle \Delta\varphi \rangle$ и случайной σ_φ погрешностей оценивания фазового сдвига φ в зависимости от значения фазового сдвига для обоих методов показаны соответственно на рис. 1 и 2 при СКО шума $\sigma_\xi = 0.01$. Систематическая погрешность определялась как среднее значение абсолютного отклонения определения фазового сдвига $\Delta\varphi$, полученное по 50 реализациям, случайная погрешность вычислялась как СКО $\Delta\varphi$ от нулевого значения. Для показанных на рисунках графиков оценка фазового сдвига проводилась на скользящем окне измерения длиной $L = 512$, всего же обрабатывалось $N = 16\,384$ отсчетов сигналов. Полученные на каждом шаге скользящего окна значения фазового сдвига потом усреднялись по всем отсчетам. За N отсчетов циклическая частота сигналов изменяется примерно от 0.1π до 0.4π .

Для метода МНКСС частота сигналов для окна наблюдения задавалась точно равной средней частоте исследуемых сигналов на обрабатываемом интервале, так как именно это значение с наибольшей точностью определится бы рекомендуемыми в стандарте IEEE методами определения частоты — методом дискретного счета и методом, основанным на преобразовании Фурье [13, 17]. Для метода ИФСКС в качестве априорной информации задавалась только величина возможного изменения частоты сигналов на окне наблюдения $\Delta\omega$.

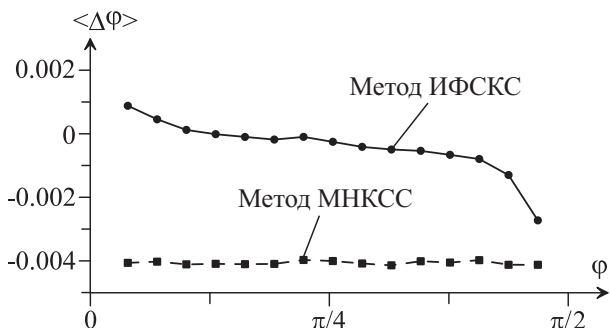


Рис. 1. Систематическая погрешность оценивания фазового сдвига φ в зависимости от значения φ при уровне шума $\sigma_\xi = 0.01$

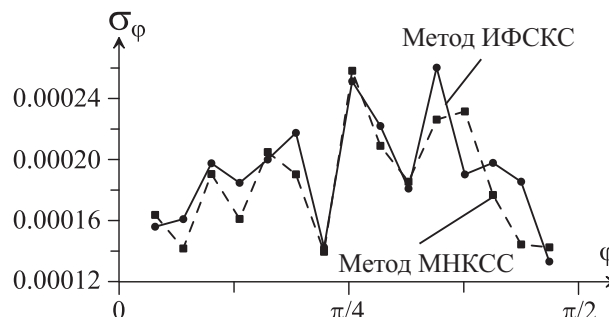


Рис. 2. Случайная погрешность оценивания фазового сдвига φ в зависимости от значения φ при уровне шума $\sigma_\xi = 0.01$

Для уменьшения влияния аддитивного шума строились полосовые КИХ-фильтры (фильтры с конечной импульсной характеристикой) с линейной ФЧХ (фазо-частотной характеристикой), ширина полосы пропускания которых была не меньше, чем $2\Delta\omega$. Фильтры покрывали весь возможный частотный диапазон сигналов с перекрытием полос пропускания соседних фильтров на $1/3$. Расчеты фильтров производились предварительно по имеющейся априорной информации. Исследуемые сигналы подавались параллельно на несколько фильтров, после чего сам метод ИФСКС применялся только к тому сигналу с выходов фильтров, энергия которого максимальна. В рассматриваемом примере длина импульсных характеристик фильтров $M = 1317$, а величину возможного изменения частоты сигналов $\Delta\omega$ на интервале измерения L принимали равной 0.007 .

Видно, что точность методов для данного значения СКО сравнима, несмотря на качественное различие априорной информации, необходимой для работы этих методов. Метод ИФСКС дает состоятельную, хотя и смещенную оценку фазового сдвига. Смещение оценки не превышает 3×10^{-3} и зависит от диапазона значения фазового сдвига, например в диапазоне значений φ от $\pi/8$ до $3\pi/8$ смещение не превышает 10^{-3} . От диапазона также зависит и знак смещения: при $\varphi < \pi/4$ смещение с большей вероятностью с положительным знаком, при $\varphi > \pi/4$ — с отрицательным. При приближении значения фазового сдвига φ к 0 и $\pi/2$ наблюдается рост систематической погрешности, а при φ , близком к $\pi/4$, погрешность минимальна. Однако еще большую систематическую погрешность порядка 4×10^{-3} дает метод МНКСС, для которого частота сигнала на интервале измерения L задавалась равной реальной частоте в середине диапазона изменения на этом интервале. Метод МНКСС на всем диапазоне значений фазового сдвига дает примерно одинаковое смещение, что, несомненно, обусловлено априорным заданием частоты сигналов. Случайная составляющая погрешности для обоих методов находится на одном уровне порядка 2×10^{-4} и в общем случае определяется уровнем аддитивного шума.

При увеличении интервала измерения L систематическая погрешность для метода МНКСС увеличивается, тогда как для разработанного метода она остается на том же уровне. Например, при $L = 1500$ систематическая погрешность метода МНКСС увеличивается в несколько раз и находится на уровне 1.5×10^{-2} , тогда как погрешность метода ИФСКС незначительно уменьшается. При уменьшении интервала L метод МНКСС дает лучшие результаты, так как полоса изменения частоты сигналов уменьшается, а следовательно, частоту можно задать более точно. Например, при $L = 111$ систематическая погрешность становится практически одинаковой для обоих методов и не превышает 10^{-4} . При дальнейшем уменьшении интервала L метод МНКСС дает более точные оценки. Такая существенная априорная информация, как знание точного значения частоты сигналов, изначально дает значительный прирост точности, что и наблюдается при уменьшении интервала измерения L .

Полученные результаты вполне объяснимы: метод МНКСС оптимально работает только с гармоническими сигналами, причем точность оценивания фазового сдвига значительно зависит от точности задания частоты сигналов, а предложенный метод ИФСКС практически без потери точности может работать с квазигармоническими сигналами, если выполняются условия (2) и (3). При увеличении интервала изме-

рения L точность метода ИФСКС возрастает. Численное моделирование для различных уровней шума, длин интервала измерения L и видов сигналов показало, что оптимальным диапазоном значений фазового сдвига для разработанного метода можно считать значения от $\pi/8$ до $3\pi/8$. Расширения диапазона можно достичь введением программной задержки одной из последовательностей значений сигналов на K отсчетов, т.е. на интервал $K\Delta t$. Если полученное значение фазового сдвига меньше $\pi/8$, то необходимо произвести задержку сигнала $x_2[n]$; соответственно, при фазовом сдвиге больше $3\pi/8$ необходимо произвести задержку сигнала $x_1[n]$. Таким образом, контролируемым смещением фазового сдвига в диапазон оптимальных значений можно повысить точность оценивания.

Следует отметить, что метод МНКСС позволяет вычислять параметры сигналов даже в случае неравномерно дискретизированного сигнала. Предложенный метод накладывает ограничение на шаг дискретизации только в пределах пяти рядом располагающихся отсчетов сигналов, т.е. для каждого n в формуле (15) шаг дискретизации может быть разным.

4. Заключение. Представленный метод ИФСКС может быть успешно применен для задач, в которых необходима высокая точность и высокая скорость получения информации, содержащейся в фазе сигналов. Так, например, одно из ярких применений метода — определение положения и угловой ориентации потребителя относительно геоцентрической системы координат по сигналам ГЛОНАСС [18] фазовым методом. Такие измерения возможны за время длительности одного бита (0.02 с), а следовательно, изменения огибающих и несущей частоты можно считать медленными, удовлетворяющими условиям (2) и (3). Кроме того, исследуемые сигналы принимаются на фоне аддитивных и мультипликативных помех. За время длительности одного бита сигнала ГЛОНАСС современными аналого-цифровыми преобразователями можно получить до 200 тысяч отсчетов, а для такого количества отсчетов метод ИФСКС дает погрешность на уровне 2×10^{-6} для рассмотренных моделей сигналов. Повышение точности измерения фазового сдвига до 10^{-6} радиан приводит к определению угловой ориентации потребителя с точностью до сотых долей градуса.

Применение параллельных вычислений для расчета сигналов на выходах фильтров позволяет получить существенное ускорение, величина которого зависит от количества используемых фильтров. Сам метод позволяет организовать параллельную обработку данных, что, в свою очередь, также увеличит скорость вычислений. Применение адаптивных алгоритмов для контролируемого смещения фазового сдвига в диапазон оптимальных значений позволит производить измерения с высокой точностью в автоматическом режиме во всем возможном диапазоне изменения фазового сдвига.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кинкулькин И.Е., Рубцов В.Д., Фабрик М.А. Фазовый метод определения координат. М.: Сов. радио, 1979.
2. Чмых М.К. Цифровая фазометрия. М.: Радио и связь, 1993.
3. Колосов М.А., Арманд Н.А., Яковлев О.И. Распространение радиоволн при космической связи. М.: Связь, 1969.
4. Клич С.М. Проектирование СВЧ-устройств радиолокационных приемников. М.: Сов. радио, 1973.
5. Webster J.G. (Ed.) Electrical measurement, signal processing, and displays. Boca Raton: CRC Press, 2004.
6. Метрология и радиоизмерения / Под ред. В.И. Нефедова. М.: Высшая школа, 2006.
7. Mahmud S.M. Error analysis of digital phase measurement of distorted waves // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. 1989. **38**, N 1. 6–9.
8. Liang Y.R., Duan H.Z., Yeh H.C., Luo J. Fundamental limits on the digital phase measurement method based on cross-correlation analysis // Rev. Sci. Instrum. 2012. **83**, N 9. 095110.
9. Mahmud S.M. High precision phase measurement using reduced sine and cosine tables // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. 1990. **39**, N 1. 56–60.
10. Mahmud S.M. High precision phase measurement using adaptive sampling // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. 1989. **38**, N 5. 954–960.
11. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Дрофа, 2006.
12. Sedlacek M., Krumpholtz M. Digital measurement of phase difference — a comparative study DSP algorithms // Metrology and Measurement Systems. 2005. **XII**, N 4. 427–449.
13. IEEE Std 1241-2000. IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters.
14. Игнатъев В.К., Никитин А.В. Метод медленно меняющейся частоты в радиоволновых измерениях // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2011. N 11 (<http://jre.cplire.ru/jre/nov11/17/text.pdf>).
15. Игнатъев В.К., Никитин А.В., Юшанов С.В. Параметрический анализ колебаний медленно меняющейся частоты // Известия ВУЗов. Радиофизика. 2010. **53**, № 2. 145–159.
16. Боровков В.И., Игнатъев В.К., Никитин А.В., Юшанов С.В. Однозначное определение огибающей и мгновенной частоты электромеханических колебаний // Известия ВУЗов. Электромеханика. 2012. № 1. 16–20.
17. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.

18. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. М.: Радиотехника, 2010.

Поступила в редакцию
27.06.2013
