

УДК 519.63:532.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ С РЕБРАМИ

О. Б. Бутусов¹, Я. М. Жилейкин², А. Б. Кукаркин², О. П. Никифорова³

Моделируется процесс пленочного течения жидкости по вертикальной поверхности с ребрами; рассматривается случай двумерного ламинарного установившегося течения. Краевая задача для уравнения течения решается численно методом Галеркина, что позволяет найти величины, характеризующие режим течения: расход жидкости, среднюю скорость потока, плотность орошения, критерий Рейнольдса. Получены формулы для вычисления средней толщины пленки.

Ключевые слова: математическое моделирование, пленочное течение, критерий Рейнольдса, уравнение Пуассона, метод Галеркина.

1. Введение. В химической технологии широкое применение находят аппараты, в которых осуществляется пленочное течение жидкости; так принято называть движение тонкого слоя жидкости вдоль твердой, обычно вертикальной, стенки той или иной формы. При исследовании процесса пленочного течения важно знать распределение скоростей потока по толщине стекающей пленки, среднюю скорость потока и среднюю толщину пленки. На эти характеристики влияют такие факторы, как сила тяжести, форма орошаемой поверхности, вязкость жидкости (ею обусловлены силы вязкого трения), а также условия на наружной поверхности пленки.

Впервые уравнение пленочного течения по плоской поверхности было рассмотрено В. Нуссельтом [1]. Им были получены выражения для распределения скоростей потока и для средней толщины пленки.

В настоящей статье рассматривается ламинарное установившееся пленочное течение по поверхности с ребрами, т.е. по плоской вертикальной стенке с продольно установленными стабилизаторами пленочного течения в виде спиц (проволочек) малого диаметра. При этом мы предполагаем, что толщина пленки не превышает высоты ребра и что фаза, с которой соприкасается наружная поверхность пленки (газ, пар или другая жидкость), не оказывает заметного влияния на движение пленки, вследствие чего наружная поверхность пленки остается свободной.

2. Геометрия профиля потока жидкости. Введем прямоугольную систему координат: ось z направим вдоль стенки по течению потока (при ламинарном режиме частицы жидкости перемещаются только в одном направлении), ось x направим вдоль стенки перпендикулярно течению потока, а ось y — перпендикулярно стенке. Наружную поверхность пленки будем предполагать цилиндрической с постоянным радиусом кривизны R . Обозначим: d — диаметр спицы, t — расстояние между соседними спицами, a — наименьшая толщина пленки. При фиксированном z мы получим профиль потока жидкости (рис. 1).

На рис. 1 наружной поверхности пленки соответствует дуга окружности радиуса R с центром в точке $C(t/2, R + a)$: $(x - t/2)^2 + (y - (R + a))^2 = R^2$; поверхности спицы соответствует половина окружности радиуса $r = d/2$ с центром в точке $O(0, r)$: $x^2 + (y - r)^2 = r^2$.

Обозначим через θ краевой угол смачивания, т.е. угол между касательными к указанным дугам в точке их пересечения $A(x_1, y_1)$; если α_1 и α_2 — соответствующие углы наклона касательных к горизонтальной оси, то $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$, а угловыми коэффициентами касательных являются

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-(x_1 - t/2)}{y_1 - (R + a)}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-x_1}{y_1 - r}.$$

Краевой угол смачивания зависит от материала, из которого сделаны спицы, и от свойств жидкости, которая течет по поверхности.

¹ Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ), ул. Большая Семеновская, д. 38, 107023, Москва; зав. кафедрой, e-mail: butusov-1@mail.ru

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, 119991, Москва; Я. М. Жилейкин, зав. лабораторией, e-mail: jam@srcc.msu.ru; А. Б. Кукаркин, ст. науч. сотр., e-mail: jam@srcc.msu.ru

³ Государственный университет управления, Рязанский проспект, д. 99, 109542, Москва; доцент, e-mail: olga.nikiforova2013@yandex.ru

Найдем зависимость радиуса R от параметров r, t, a, θ .

Рассмотрим треугольники OAC и OBC . Поскольку $OA = r, AC = R, OB = R + a - r, BC = t/2$, то, используя теорему косинусов и теорему Пифагора, получим: $R = \frac{(t/2)^2 + a^2 - 2ra}{2r(1 + \cos \theta)}$.

Найдем координаты точки A .

Подставив $\text{tg } \alpha_1, \text{tg } \alpha_2$ в формулу $\text{tg } \theta = \frac{\text{tg } \alpha_1 - \text{tg } \alpha_2}{1 + \text{tg } \alpha_1 \text{tg } \alpha_2}$ и пользуясь тем, что $x_1^2 + y_1^2 = 2ry_1$, придем к равенству

$$x_1 \left(\frac{t}{2} \text{tg } \theta + R + a - r \right) = r \left((R + a) \text{tg } \theta - \frac{t}{2} \right) - y_1 \left((R + a - r) \text{tg } \theta - \frac{t}{2} \right).$$

Положим $\begin{cases} A_1 = \frac{t}{2} - (R + a - r) \text{tg } \theta, \\ B_1 = r \left(\frac{t}{2} - (R + a) \text{tg } \theta \right), \\ C_1 = R + a - r + \frac{t}{2} \text{tg } \theta. \end{cases}$

Возведя обе части равенства $C_1 x_1 = A_1 y_1 - B_1$ в квадрат и подставив $x_1^2 = 2ry_1 - y_1^2$, получим, что y_1 является корнем квадратного уравнения

$$(A_1^2 + C_1^2)y_1^2 - 2(A_1 B_1 + C_1^2 r)y_1 + B_1^2 = 0.$$

Отсюда следует, что ордината точки A может быть найдена по формуле

$$y_1 = \frac{A_1 B_1 + C_1^2 r}{A_1^2 + C_1^2} + \sqrt{\left(\frac{A_1 B_1 + C_1^2 r}{A_1^2 + C_1^2} \right)^2 - \frac{B_1^2}{A_1^2 + C_1^2}},$$

а абсцисса точки A — по формуле $x_1 = \sqrt{2ry_1 - y_1^2}$. Отметим, что частным случаем рассматриваемой модели пленочного течения является течение при так называемом полном смачивании, когда $a = 0, \theta = 0$. В этом случае $R = \frac{t^2}{16r}$, а абсцисса точки A может быть найдена

по формуле $x_1 = \frac{rt}{\sqrt{t^2 + 4(R - r)^2}}$.

3. Площадь поперечного сечения потока жидкости. Найдем площадь S поперечного сечения потока жидкости, ограниченного орошаемой поверхностью, поверхностями двух соседних спиц и наружной поверхностью пленки; S зависит от диаметра спицы d , расстояния между соседними спицами t , наименьшей толщины пленки a и краевого угла смачивания θ .

Чтобы найти S , вычислим равную $S/2$ площадь изображенной на рис. 1 фигуры, которая ограничена осью абсцисс, прямой $x = t/2$ и линиями $x = \sqrt{2ry - y^2}, 0 \leq y \leq y_1$, и $y = R + a - \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{t}{2}\right)^2}, x_1 \leq x \leq t/2$. Получим

$$\begin{aligned} S &= 2 \left(\int_0^{x_1} (r - \sqrt{r^2 - x^2}) dx + \int_{x_1}^{t/2} \left(R + a - \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{t}{2}\right)^2} \right) dx - 2 \int_{x_1}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \right) = \\ &= rx_1 - \pi r^2 + x_1 \sqrt{r^2 - x_1^2} + r^2 \arcsin \frac{x_1}{r} + \left(\frac{t}{2} - x_1 \right) \left(2(R + a) - \sqrt{R^2 - \left(\frac{t}{2} - x_1\right)^2} \right) - \\ &\quad - R^2 \arcsin \frac{t/2 - x_1}{R}. \end{aligned}$$

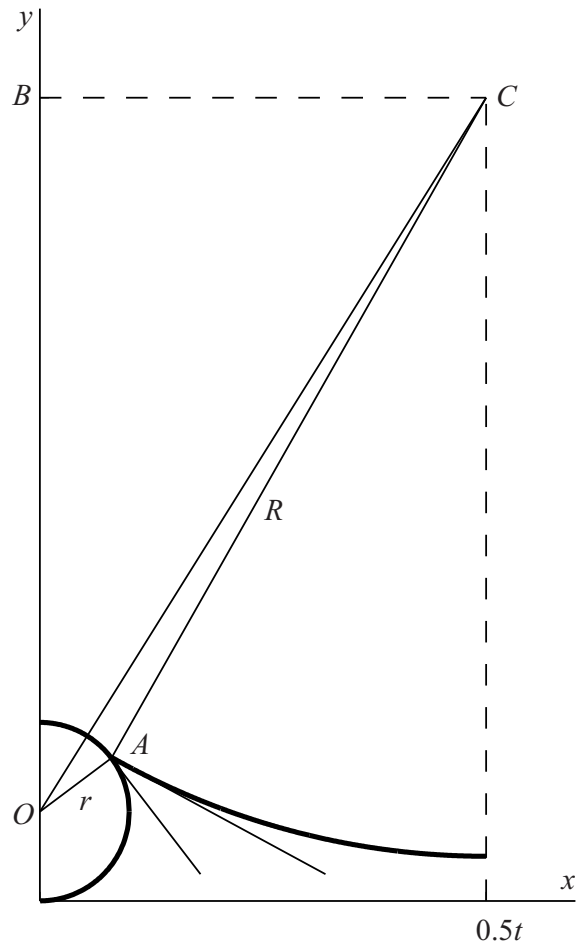


Рис. 1. Профиль потока жидкости

4. Уравнение пленочного течения. В рассматриваемой модели пленочного течения вектор скорости перемещения частиц жидкости направлен вдоль оси z и не зависит от z . Поэтому горизонтальные составляющие вектора скорости равны нулю; вертикальную составляющую как функцию двух переменных x и y обозначим $W_z(x, y)$.

Уравнением вертикального пленочного течения жидкости является

$$\frac{\partial^2 W_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_z}{\partial y^2} + \frac{g}{\nu} = 0, \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести, ν — вязкость жидкости [2].

Чтобы приближенно найти $W_z(x, y)$, заменим (не принимая во внимание жидкость, находящуюся под или над спицей) поперечное сечение потока жидкости на область, которая ограничена осью абсцисс, прямыми $x = r$, $x = t - r$ и линией

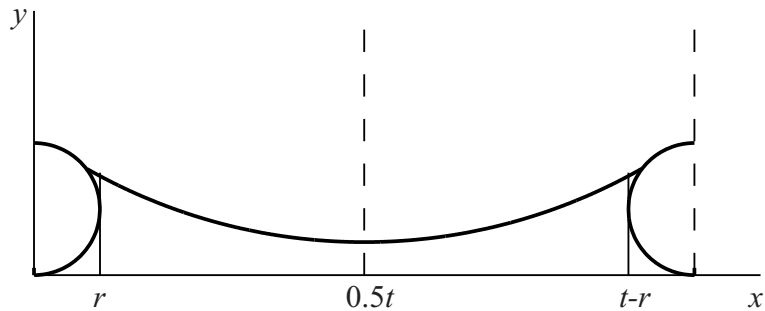


Рис. 2. Область, в которой требуется найти решение уравнения (1)

$y = R + a - \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{t}{2}\right)^2}$, $r \leq x \leq t - r$ (рис. 2). На границе области зададим следующие граничные условия:

$$W_z(r, y) = W_z(t - r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq R + a - \sqrt{R^2 - \left(\frac{t - d}{2}\right)^2}, \quad (2)$$

$$W_z(x, 0) = 0, \quad r \leq x \leq t - r, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial W_z(x, y)}{\partial n} \right|_{y=R+a-\sqrt{R^2-(x-t/2)^2}} = 0, \quad r \leq x \leq t - r, \quad (4)$$

где $\frac{\partial W_z}{\partial n}$ — нормальная производная функции $W_z(x, y)$.

Важными характеристиками процесса пленочного течения являются расход жидкости V , средняя скорость потока w , плотность орошения Γ_ν , критерий Рейнольдса Re , средняя толщина пленки δ ; они могут быть вычислены по следующим формулам [2]:

$$V = \iint_D W_z(x, y) dx dy, \quad w = \frac{V}{S}, \quad \Gamma_\nu = \frac{V}{t}, \quad Re = \frac{4\Gamma_\nu}{\nu}, \quad \delta = \frac{S}{t}.$$

5. Численное решение уравнения пленочного течения. Положим $x - \frac{t}{2} = Tx'$, $y = Ty'$, $R = TR'$, $a = Ta'$, $W(x', y') = W_z(Tx' + t/2, Ty')$, где $T = (t - d)/2$. Таким образом перейдем к новым переменным x' , y' , R' , a' , но в дальнейших выкладках штрихи у этих переменных будем опускать, чтобы не делать формулы слишком громоздкими. Тогда задача решения уравнения пленочного течения (1) при условиях (2)–(4) сведется к следующей.

Пусть D является областью, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = -1$ и $x = 1$ и линией $y = R + a - \sqrt{R^2 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ (обозначим ее L); пусть ∂D — граница области D .

Требуется в области D найти решение $W(x, y)$ уравнения Пуассона $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = f(x, y)$, удовлетворяющее граничным условиям $W|_{\partial D \setminus L} = 0$, $\frac{\partial W}{\partial n} \Big|_L = 0$. В нашем случае $f(x, y) = -\frac{g}{\nu} T^2$.

Численное решение этой задачи получим с помощью метода Галеркина [3].

Будем искать приближенное решение в виде $W_m(x, y) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x, y)$, где функции $\varphi_j(x, y)$ выберем удовлетворяющими граничным условиям $\varphi_j(x, y)|_{\partial D \setminus L} = 0$. Согласно методу Галеркина коэффициенты a_1, \dots, a_m определяются из равенств

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 W_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_m}{\partial y^2} - f \right) \varphi_i dx dy - \int_L \frac{\partial W_m}{\partial n} \varphi_i dl = 0,$$

или, в развернутом виде,

$$\sum_{j=1}^m a_j \iint_D \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right) \varphi_i dx dy - \sum_{j=1}^m a_j \int_L \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \varphi_i dl = \iint_D f \varphi_i dx dy, \quad i = 1, \dots, m;$$

здесь dl — дифференциал дуги L : $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx = \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Таким образом, коэффициенты a_1, \dots, a_m являются решением системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} a_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

$$\alpha_{ij} = \iint_D \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right) \varphi_i dx dy - R \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \frac{\varphi_i}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx, \quad (6)$$

$$b_i = -\frac{g}{\nu} T^2 \iint_D \varphi_i dx dy; \quad (7)$$

нормальные производные вычисляются по формуле $\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{x}{R} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}$.

В качестве функций $\varphi_j(x, y)$ мы, считая m квадратом натурального числа k , использовали функции $(x^2 - 1)^p y^q$, где $1 \leq p, q \leq k$. Поэтому приближенное решение имело вид $W_m(x, y) = \sum_{p,q=1}^k A_{pq} (x^2 - 1)^p y^q$;

коэффициенты A_{pq} находились описанным выше способом.

Для решения системы линейных уравнений (5) был использован метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице. При вычислении интегралов в (6) и (7) применялись квадратурные формулы Ньютона–Котеса и Гаусса [4].

Приведем примеры расчетов, которые были выполнены для случая $k = 3$.

Вид приближенного решения:

$$\begin{aligned} W_9(x, y) = & A_{11}(x^2 - 1)y + A_{12}(x^2 - 1)y^2 + A_{13}(x^2 - 1)y^3 + \\ & + A_{21}(x^2 - 1)^2y + A_{22}(x^2 - 1)^2y^2 + A_{23}(x^2 - 1)^2y^3 + \\ & + A_{31}(x^2 - 1)^3y + A_{32}(x^2 - 1)^3y^2 + A_{33}(x^2 - 1)^3y^3. \end{aligned}$$

Пример 1. Параметры: $d = 1.5 \times 10^{-3}$ м, $t = 1.0 \times 10^{-2}$ м, $a = 0$ м, $\theta = 0$, $\nu = 3.0 \times 10^{-7}$ м²/с.

Результаты вычислений:

$$\begin{aligned} A_{11} = 2.3623506 \times 10^3, \quad A_{12} = -6.0151710 \times 10^5, \quad A_{13} = 2.7869939 \times 10^7, \\ A_{21} = 2.6477024 \times 10^4, \quad A_{22} = -5.6985959 \times 10^6, \quad A_{23} = 2.6310580 \times 10^8, \\ A_{31} = 3.9003396 \times 10^4, \quad A_{32} = -8.2188660 \times 10^6, \quad A_{33} = 3.7946676 \times 10^8, \end{aligned}$$

$R = 8.333 \times 10^{-3}$ м, $S = 3.203 \times 10^{-6}$ м², $V = 8.047 \times 10^{-6}$ м³/с, $w = 2.512$ м/с, $\Gamma_\nu = 8.047 \times 10^{-4}$ м²/с, $Re = 1.073 \times 10^4$, $\delta = 3.203 \times 10^{-4}$ м.

Пример 2. Параметры: $d = 1.5 \times 10^{-3}$ м, $t = 1.5 \times 10^{-2}$ м, $a = 0$ м, $\theta = 0$, $\nu = 3.0 \times 10^{-7}$ м²/с.

Результаты вычислений:

$$\begin{aligned} A_{11} = 1.9133216 \times 10^3, \quad A_{12} = -9.1502572 \times 10^6, \quad A_{13} = 6.0361855 \times 10^7, \\ A_{21} = 2.7089646 \times 10^4, \quad A_{22} = -8.6899843 \times 10^6, \quad A_{23} = 5.6987096 \times 10^8, \\ A_{31} = 4.1162934 \times 10^4, \quad A_{32} = -1.2537501 \times 10^7, \quad A_{33} = 8.2819842 \times 10^8, \end{aligned}$$

$R = 1.875 \times 10^{-2}$ м, $S = 5.580 \times 10^{-6}$ м², $V = 2.107 \times 10^{-5}$ м³/с, $w = 3.776$ м/с, $\Gamma_\nu = 1.405 \times 10^{-3}$ м²/с, $Re = 1.873 \times 10^4$, $\delta = 3.720 \times 10^{-4}$ м.

6. Расчет средней толщины пленки. Во многих случаях требуется знать зависимость средней толщины пленки от физических свойств жидкости, критерия Рейнольдса и параметров оребрения.

На основании проведенных расчетов были получены следующие формулы для приближенного вычисления средней толщины пленки в случае полного смачивания ($a = 0$, $\theta = 0$):

$$\delta = \begin{cases} \frac{\text{Re } \nu^2}{dtg} \left(-0.429 \frac{t}{d} + 50.05 \right) & \text{при } 6.7 \leq \frac{t}{d} \leq 13.3, \\ \frac{\text{Re } \nu^2}{dtg} \left(-0.028 \frac{t}{d} + 44.73 \right) & \text{при } 13.3 \leq \frac{t}{d} \leq 20. \end{cases}$$

Относительная погрешность при использовании этих формул не превосходит 7%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nusselt W.* Die Oberflächen Kondensation des Wasserclampfes // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. 1916. **60**, N 27. 541–546.
2. *Воронцов Е.Г., Тананайко Ю.М.* Теплообмен в жидкостных пленках. Киев: Техніка, 1972.
3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962.
4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
04.07.2013
