

УДК 550.344.42

ПРИМЕНЕНИЕ r -РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ ВОЛНЫ ЦУНАМИ

Т. А. Воронина¹

Рассматривается обратная задача математической физики для восстановления начальной формы волны цунами по измерениям колебаний уровня свободной поверхности, обусловленных пришедшей волной в серии удаленных приемников. Распространение волн описывается в рамках линейной теории мелкой воды. Аппроксимация задачи осуществляется на основе конечно-разностного подхода. Рассматриваемая задача относится к классу некорректных задач; для ее решения применяется понятие r -решения, основанное на усечении сингулярного разложения компактного оператора. Регуляризация оператора в этом случае осуществляется путем сужения оператора на подпространство, являющееся линейной оболочкой его первых правых сингулярных векторов. Строится обобщенное нормальное r -решение. Предложенная методика позволяет избежать неустойчивости решения рассматриваемой некорректной задачи. Эффективность предложенного подхода подтверждается путем численного моделирования для случая реальной батиметрии побережья Перу и синтетических мареограмм. Установлено, что качество получаемого решения существенно зависит от пространственного распределения регистрирующей системы относительно предполагаемого очага цунами, особенностей рельефа дна и уровня шумов. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 12-07-00406), Интеграционных проектов СО РАН-ДВО № 37 и СО РАН № 117 и государственного соглашения с Министерством образования и науки РФ № 14.37.21.0643 от 20 августа 2012 г.

Ключевые слова: цунами, численное моделирование, обратная некорректная задача, регуляризация, сингулярное разложение, r -решения.

1. Введение. Катастрофические цунами последнего десятилетия в Тихом и Индийском океанах с особой остротой поставили вопросы о прогнозировании столь разрушительных событий, уменьшении цунамириска и разработке мер по смягчению последствий будущих ударов стихии. Объединенные усилия специалистов из разных областей концентрируются на создании систем раннего предупреждения о цунами, развитии численных моделей и создании на их основе карт цунамириска, а также на разработке планов эвакуации для конкретных регионов.

Цунами — это серия волн, движущихся с огромной скоростью и характеризующихся большой длиной. Такие волны формируются в результате резкого вертикального смещения больших объемов воды в океане. Причинами вертикального смещения воды могут быть подводные землетрясения, оползни, вулканические извержения, падения крупных метеоритов и подводные ядерные испытания. Для количественной оценки цунамиопасности конкретных участков побережья существенными оказываются географическое положение исследуемого участка берега относительно цунамигенных зон, геометрические особенности рельефа дна на трассах прохождения волн цунами и характеристики самого очага, где, как правило, отсутствуют прямые приборные наблюдения. Следует сказать, что ложные цунамитревоги влекут колоссальные финансовые и психологические потери, поэтому целью предпринимаемых мер является повышение точности предсказания цунами.

Анализ одних только сейсмических данных не позволяет дать достоверный прогноз о последующем цунами. Известно, что только спустя некоторое время после произошедшего события удастся проанализировать сейсмические, приливные и другие данные и оценить основные характеристики очага цунами. С другой стороны, наиболее разрушительные и опасные цунами, очаги которых располагаются вблизи побережья, требуют таких оценок в течение 10–15 минут после землетрясения. Расчет исходного возмущения поверхности океана может использоваться как начальные данные в различных программных системах моделирования цунами.

Обратная задача цунами, которая заключается в восстановлении пространственно-временной области источника цунами (начальное возвышение поверхности океана в области очага) по характеристикам регистрируемых волн в пунктах наблюдения, рассматривается как обратная задача математической физики.

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, 630090, г. Новосибирск; ст. науч. сотр., e-mail: tanvor@bk.ru

Как известно, такие задачи относятся к классу некорректных задач, решение которых требует применения методов регуляризации. Однако при обработке реальных мареографных наблюдений возникает общая для обратных задач сейсмологии проблема, заключающаяся в том, что используемые математические методы требуют “незашумленных” данных и характеризуются недостаточной численной устойчивостью. Определение параметров источника цунами на основе обращения мареографных записей позволяет получить модель источника независимо от сейсмических данных. Более точное знание батиметрии мирового океана по сравнению с распределением скоростей в твердых структурах и, как следствие, более точное численное моделирование процесса распространения волн цунами позволяет строить более надежные модели источника.

Математические методы впервые применены для обращения мареографных записей в [1, 2]. Предложенный метод обращения мареографных записей основан на линейной теории распространения длинных волн и численном построении функции Грина и существенно опирается на знание априорной сейсмической информации об источнике цунами. В [3] решена обратная задача методом наименьших квадратов без использования априорной информации об источнике цунами. Сопряженный метод, предложенный в [4], позволяет использовать как линейную, так и нелинейную теории распространения волн. В последнее десятилетие появилось много работ, в основе которых лежат перечисленные методы. В большинстве работ используется линейная теория распространения волн и численное построение функции Грина.

Задача восстановления источника не является, вообще говоря, однозначно разрешимой. Единственность имеется, как показано в [5], когда функция, описывающая движение морского дна в очаге цунами, допускает факторизацию, т.е. зависимость от времени и зависимость от пространственных координат отделяются друг от друга, причем зависимость от времени задается априорно.

В настоящей статье распространение волн цунами также рассматривается в рамках линейной теории, а для решения обратной задачи применяется подход, использующий r -решения [6]. Восстановление первоначальной формы волны цунами осуществляется по записям колебаний уровня воды в удаленных точках — *приемниках*, при этом не используется априорная информация о форме источника цунами. Этот подход к решению задачи восстановления источника цунами был впервые предложен в 1998 г. Т. А. Ворониной и В. А. Чевердой для модельного случая постоянной глубины в работе [7] и позднее успешно применен к более сложным моделям в [8, 9]. Первые же результаты численного моделирования показали перспективность такого подхода. Регуляризация оператора в этом случае осуществляется путем сужения оператора на подпространство, являющееся линейной оболочкой его первых правых сингулярных векторов. Тем самым подпространство, в котором ищется решение, выбирается на основе анализа свойств сингулярного спектра оператора, которые определяются системой наблюдения и батиметрией. В [7–9] исследовалась зависимость качества восстановления от количества и азимутального расположения приемников и уровня шумов. Появилась возможность поставить вопрос о выявлении наиболее “информативных” направлений, где должны располагаться приемники, относительно предполагаемого очага цунами. Результаты проведенных численных экспериментов для реальной батиметрии побережья Перу и зашумленных синтетических данных свидетельствуют об адекватности предложенного подхода к решению обратной задачи цунами и позволяют создать на его основе действенный инструмент для получения начального условия для численного моделирования волн цунами.

2. Постановка задачи. Распространение волн от зоны генерации и вплоть до регистрирующих мареографов описывается в рамках линейной теории мелкой воды, т.е. обычным скалярным волновым уравнением на поднятие, при этом изменение скорости распространения связано только с изменчивостью рельефа $c(x, y) = \sqrt{gh(x, y)}$. Накат волны на берег не рассматривается: на берегу ставится условие абсолютно отражающей твердой стенки, состоящее в требовании обращения в нуль нормальной производной от функции, описывающей возвышение свободной поверхности. Кривизной Земли будем пренебрегать.

Направим ось z по направлению силы тяжести. Плоскость $z = 0$ соответствует невозмущенной поверхности воды. Задача рассматривается для водной части прямоугольной области $\Pi = \{(x; y) : 0 \leq x \leq X; 0 \leq y \leq Y\}$ с кусочно-линейными внутренними и внешними береговыми границами Γ и, возможно, частичными, открытыми морскими границами на линиях $x = 0, x = X, y = 0, y = Y$. Пусть целевая область $\Omega = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_M; y_1 \leq y \leq y_N\}$ — часть области Π , в которой расположен источник цунами. Функция $\eta(x, y, t)$ — это функция колебания уровня свободной поверхности и решение начально-краевой задачи

$$\eta_{tt} = \operatorname{div} (gh(x, y) \operatorname{grad} \eta) + f_{tt}(x, y, t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\eta|_{t=0} = 0, \quad \eta_t|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что поверхность воды повторяет форму подвижки морского дна в очаге цунами и опи-

сывается функцией $f(x, y, t) = H(t)\varphi(x, y)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда. Функция $h(x, y)$ в (1) — гладкая функция, описывающая рельеф дна, g — ускорение свободного падения. При моделировании цунами уравнением (1) с начальными условиями (2) возникает необходимость в реализации краевых условий двух типов:

а) реализация на береговых границах условия полного отражения

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — направление нормали к границе Γ ;

б) реализация условий на открытых морских границах, которые возникают при искусственном ограничении области моделирования и определяются условием свободного прохода и полного поглощения.

В настоящей работе реализованы искусственные поглощающие краевые условия второго порядка точности, сформулированные в [10]. Возбуждение волны цунами предполагается обусловленным резким поднятием дна в начальный момент времени, до которого все находилось в состоянии покоя. Таким образом, обратная задача цунами заключается в нахождении первоначального поднятия свободной поверхности, описываемого финитной функцией $\varphi(x, y)$ в области Ω по известному в некоторых точках $M_i = \{(x_i, y_i) \in \gamma(s), i = 1, \dots, K_p\}$ кривой $\gamma(s) : \{(x(s), y(s)), 0 \leq s \leq L\}$ колебанию уровня свободной поверхности:

$$\eta(x, y, t)|_{\gamma(s)} = \eta_0(x(s), y(s), t), \quad (x(s), y(s)) \in \gamma(s), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Предполагается, что $\gamma(s)$ — гладкая кривая без самопересечений.

3. r -решение. Сформулированная постановка (1)–(4) неявным образом вводит в рассмотрение так называемый оператор обратной задачи \mathcal{A} , который переводит начальное поднятие $\varphi(x, y)$ в данные, заданные в (4). Этот оператор действует следующим образом: при заданном профиле дна для текущего начального поднятия надо решить начально-краевую задачу (1)–(3) и взять след полученного решения на линии $\gamma(s)$. Сказанное можно представить в операторном виде следующим образом:

$$\mathcal{A} \langle \varphi \rangle = \eta(x(s), y(s), t). \quad (5)$$

Будем считать, что начальное поднятие $\varphi(x, y)$ имеет компактный носитель в области Ω , а функция $h(x, y)$ непрерывно дифференцируемая. На основе техники теорем вложения в [9] показано, что так введенный оператор $\mathcal{A} : L_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\gamma(s) \times (0, T))$ является компактным. Так как компактный оператор не имеет ограниченного обратного, то любая попытка численного решения уравнения (5) приводит к необходимости регуляризации, которая в нашей работе осуществляется с использованием SVD-разложения и понятия r -решения [11, 12].

Известно, что если оператор \mathcal{A} компактный, то операторное уравнение первого рода (5) может быть сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Пусть функции $\varphi_k(x, y)$ образуют базис в пространстве решений $L_2(\Omega)$ и функции $\psi_l(\gamma(s), t)$ образуют базис в пространстве данных $L_2(\gamma(s) \times (0, T))$. В этих базисах операторное уравнение (5) имеет следующее матричное представление:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k a_{lk} = \eta_l, \quad c_k = (\varphi, \varphi_k), \quad \eta_l = (\eta_0, \psi_l), \quad a_{lk} = (\mathcal{A} \langle \varphi_k \rangle, \psi_l), \quad l = 1, \dots, \infty.$$

Для построения численного решения этой системы линейных алгебраических уравнений прежде всего ее следует “обрезать”, т.е. перейти к ее конечномерной аппроксимации

$$\sum_{k=1}^K a_{lk} c_k = \eta_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (6)$$

Компактность исходного оператора обеспечивает стремление решения системы (6) к решению исходного операторного уравнения (5) (если последнее существует) при $K, L \rightarrow \infty$. В то же время компактность исходного оператора означает, что с ростом параметров K и L растет и число обусловленности получаемой матрицы и, следовательно, чувствительность получаемого решения к ошибкам в элементах матрицы и в компонентах вектора правой части системы, а также к ошибкам округления.

Один из способов разрешения возникающего противоречия состоит в построении так называемого r -решения. Известно, что каждый компактный оператор в гильбертовых пространствах $A : X \rightarrow Y$ может быть описан с помощью сингулярного разложения. Иными словами, существуют такие ортогональные

базисы $\{v_j\}$ и $\{u_j\}$, $j = 1, \dots, \infty$, соответственно в пространствах X и Y , что $Av_j = s_j u_j$. Векторы u_j и v_j называются левыми и правыми сингулярными векторами, а величины s_j — сингулярными числами, причем, в силу компактности оператора, $s_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. То же самое верно для конечномерных операторов, когда наборы s_j, v_j, u_j являются конечными. Будем считать, что эти наборы упорядочены так, что последовательность $\{s_j\}$ невозрастающая.

Матрица $\|a_{ik}\|$ системы (6), являющаяся, вообще говоря, прямоугольной, допускает сингулярное разложение. Решение ищется как линейная комбинация r старших правых сингулярных векторов этой матрицы. Как показано в [11], при $K, L \rightarrow \infty$ это решение сходится к r -решению исходного операторного уравнения:

$$\varphi^{[r]}(x, y) = \sum_{j=1}^r \frac{(\eta(s, t) \cdot u_j)}{s_j} v_j(x, y). \tag{7}$$

Решение (7) представляет собой проекцию точного решения на подпространство, являющееся линейной комбинацией r правых сингулярных векторов $\{v_j; j = 1, \dots, K\}$ матрицы $\|a_{ik}\|$, которые образуют базис в пространстве решений и отвечают старшим сингулярным числам $\{s_j\}$ компактного оператора. Аналогично левые сингулярные векторы $\{u_i; i = 1, \dots, L\}$ образуют базис в пространстве правых частей. Число r выбирается существенно меньшим, чем минимальный из размеров матрицы. Естественно, что с увеличением числа r повышается информативность получаемого r -решения. В конечном итоге величина r определяется поведением сингулярного спектра и уровнем помех в данных.

4. Дискретизация задачи. Для численного решения начально-краевая задача (1)–(3) заменялась на эквивалентную линеаризованную систему уравнений мелкой воды

$$\begin{cases} U_t + g\eta_x = 0, \\ V_t + g\eta_y = 0, \\ \eta_t + (hU)_x + (hV)_y = 0 \end{cases} \tag{8}$$

с граничными береговыми условиями и начальными условиями

$$\eta|_{\Gamma} = \eta_0(x, y, t), \tag{9}$$

$$\eta|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad U|_{t=0} = V|_{t=0} = 0, \tag{10}$$

где $\eta(x, y, t)$ — высота волны над уровнем океана и $(U(x, y, t), V(x, y, t))$ — вектор скорости. Как уже говорилось выше, на открытых морских границах ставятся условия свободного прохода второго порядка точности. Для аппроксимации этой системы использовалась явно-неявная разностная схема, построенная на четырехточечном шаблоне и равномерной прямоугольной разнесенной сетке по методу, описанному в [13]. Схема имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый по времени.

Для реализации предложенного подхода к решению задачи (8)–(10) в пространстве решений был выбран тригонометрический базис, т.е. неизвестная функция $\varphi(x, y)$ ищется в виде конечного отрезка ряда Фурье по пространственным гармоникам с неизвестными коэффициентами $\{c_{mn}\}$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \sin \frac{m\pi}{l_1} (x - x_1) \sin \frac{n\pi}{l_2} (y - y_1). \tag{11}$$

Здесь $l_1 = (x_M - x_1)$ и $l_2 = (y_N - y_1)$. Пусть $\mathbf{c} = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1N}, c_{21}, \dots, c_{2N}, \dots, c_{M1}, \dots, c_{MN})$ — вектор неизвестных коэффициентов. Таким образом, размерность пространства решений для дискретной задачи равна $M \times N$. Входные данные представляются в виде набора из конечного числа N_t значений функций, характеризующих колебания свободной поверхности в конечном числе точек наблюдения K_p . Точки наблюдения будем называть приемниками. Таким образом, общая размерность пространства дискретизованных входных данных равна $K_p \times N_t$. Разместим эти данные в векторе

$$\mathbf{b} = (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1N_t}, \eta_{21}, \dots, \eta_{2N_t}, \eta_{P1}, \dots, \eta_{K_p N_t})^T,$$

где $\eta_{pj} = \eta_0(x_p, y_p, t_j)$, $p = 1, \dots, K_p$ и $j = 1, \dots, N_t$.

В результате получается линейная система для неизвестного вектора \mathbf{c} :

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}. \tag{12}$$

Чтобы получить каждый столбец матрицы A , надо численно решить задачу (8)–(10), где соответствующая гармоника из суммы (11) используется в качестве начального поднятия (т.е. функции φ в первом из условий (10)). Понятно, что свойства полученной матрицы, а следовательно, и решения зависят от батиметрии, конфигурации системы наблюдения и временного интервала наблюдений.

Анализ сингулярного спектра полученной матрицы A позволяет судить о возможности восстановления функции источника при заданной системе наблюдения. Если вектор правых частей известен с погрешностью ϵ , то решение (7) будет иметь вид

$$\varphi^{[r]}(x, y) = \sum_{j=1}^r \frac{(\eta(s, t) + \epsilon) \mathbf{u}_j}{s_j} \mathbf{v}_j(x, y).$$

Теоретически можно уточнить критерий выбора r . Как следует из вышеприведенных рассуждений, погрешность решения задается формулой

$$\delta = \sum_{k=1}^r \frac{(\epsilon \cdot \mathbf{u}_k)}{s_k} \mathbf{v}_k.$$

Таким образом, контролировать погрешность решения и задавать количество используемых базисных векторов можно исходя из величины дроби в этой сумме. Практически же для этого надо знать компоненты разложения помехи по левому сингулярному базису. Можно ли сделать какие-то заключения об этих компонентах, опираясь на физику явления и свойства регистрирующей системы, — этот вопрос пока открыт.

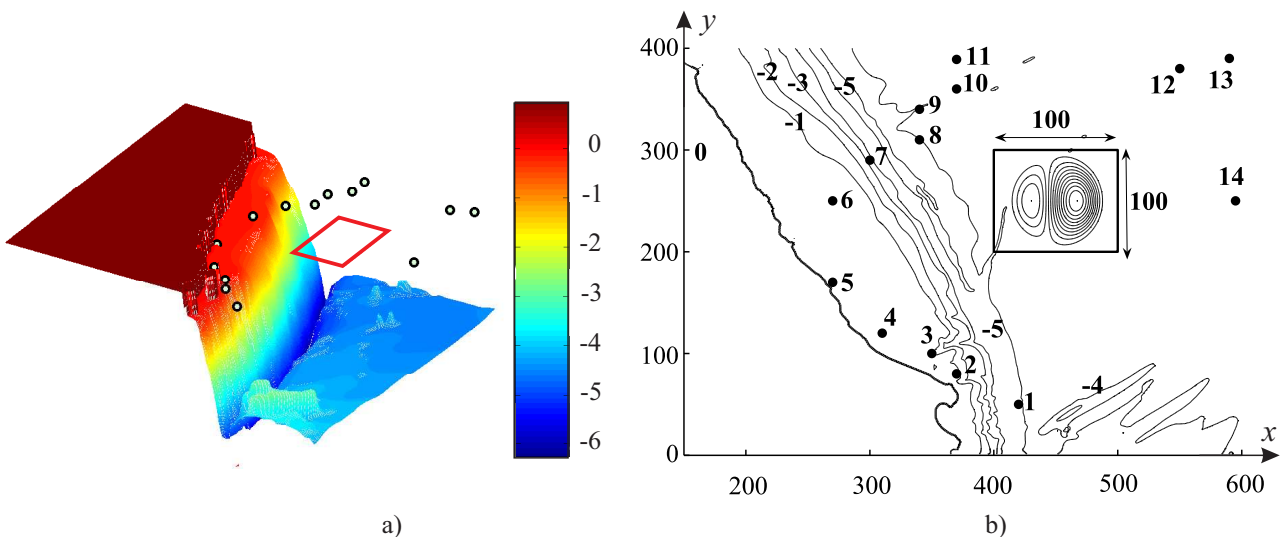


Рис. 1. Функция глубин (км), целевая область и 14 приемников, помеченных (o) в плоскости $z = 0$ (a). Изолинии глубины, значения глубин (км), целевая область с изолиниями модельного источника (м) и 14 приемников, помеченных (●) (b)

5. Численные эксперименты: описание и обсуждение. С целью восстановления неизвестной функции $\varphi(x, y)$, описывающей начальную форму волны цунами, были проведены серии расчетов по предложенной методике. Ставилась задача восстановления этой функции по минимальному количеству используемых мареограмм. Изучалась зависимость качества восстановления от азимутального расположения пунктов регистрации относительно области предполагаемого очага и уровня шумов. Расчеты проводились для реального профиля дна, соответствующего подводному рельефу побережья Перу — небольшая часть Атакамского желоба, представленного на рис. 1а. Линии уровня глубин океана представлены на рис. 1б.

Область моделирования — водная часть прямоугольника $\Pi = \{0 \leq x \leq 600; 0 \leq y \leq 400\}$ покрыта сеткой из 601×401 точек с кусочно-линейными береговыми границами (здесь и далее все размеры заданы в километрах). Предполагаемая область источника $\Omega = \{400 \leq x \leq 500; 200 \leq y \leq 300\}$ покрыта сеткой из 100×100 точек. Центр источника цунами предполагается в точке $(x_0; y_0) = (450; 250)$. На береговых границах расчетной области формулируется условие полного отражения, на открытых морских границах —

свободного прохода. Шаг по времени был взят равным $\Delta t = 0.5$ секунд. Время моделирования составляло 7500 секунд, количество отсчетов по времени выбиралось по расчетам времен первых и последних вступлений в каждом приемнике и равнялось $N_t = 1684$. Система наблюдения состояла из $K_p = 14$ точек регистрации (приемников); следовательно, размерность пространства данных $L = K_p \times N_t = 14 \times 1684$.

В качестве начального поднятия дна бралась функция, представляющая собой комбинацию положительного и отрицательного смещений воды, что соответствует источнику цунами типа “пологого надвига с падением под островную дугу” (рис. 16). Максимальные положительное и отрицательное смещения дневной поверхности в очаге цунами составляют 1.959 и -0.675 метров. Поднятие находится над глубоководной частью рельефа, причем в таком месте, где практически сразу же сформированная волна испытывает “отражение” от резкого повышения уровня дна, что существенно уменьшает энергию волны, распространяющейся в сторону береговой линии. Количество используемых пространственных гармоник зависит от изменчивости функции $\varphi(x, y)$ по соответствующей переменной и размеров ее носителя. В рассматриваемых расчетах экспериментальным путем для используемой функции $\varphi(x, y)$ было выбрано $M = 25$ гармоник по x и $N = 11$ гармоник по y ; таким образом, размерность пространства решений равнялась 275. Некорректность задачи сильно сказывается при работе с зашумленными данными. На рассчитанные от модельного источника мареограммы накладывался “ветровой” шум — высокочастотная помеха с относительной амплитудной погрешностью 3% по отношению к максимальной из зарегистрированных амплитуд по всем приемникам. Надо признать, что с большей погрешностью получить приемлемый результат не удалось. Затем производилась фильтрация как мареограмм, так и восстановленного по некоторой части этих синтетических мареограмм источника цунами по методу, предложенному в [14].

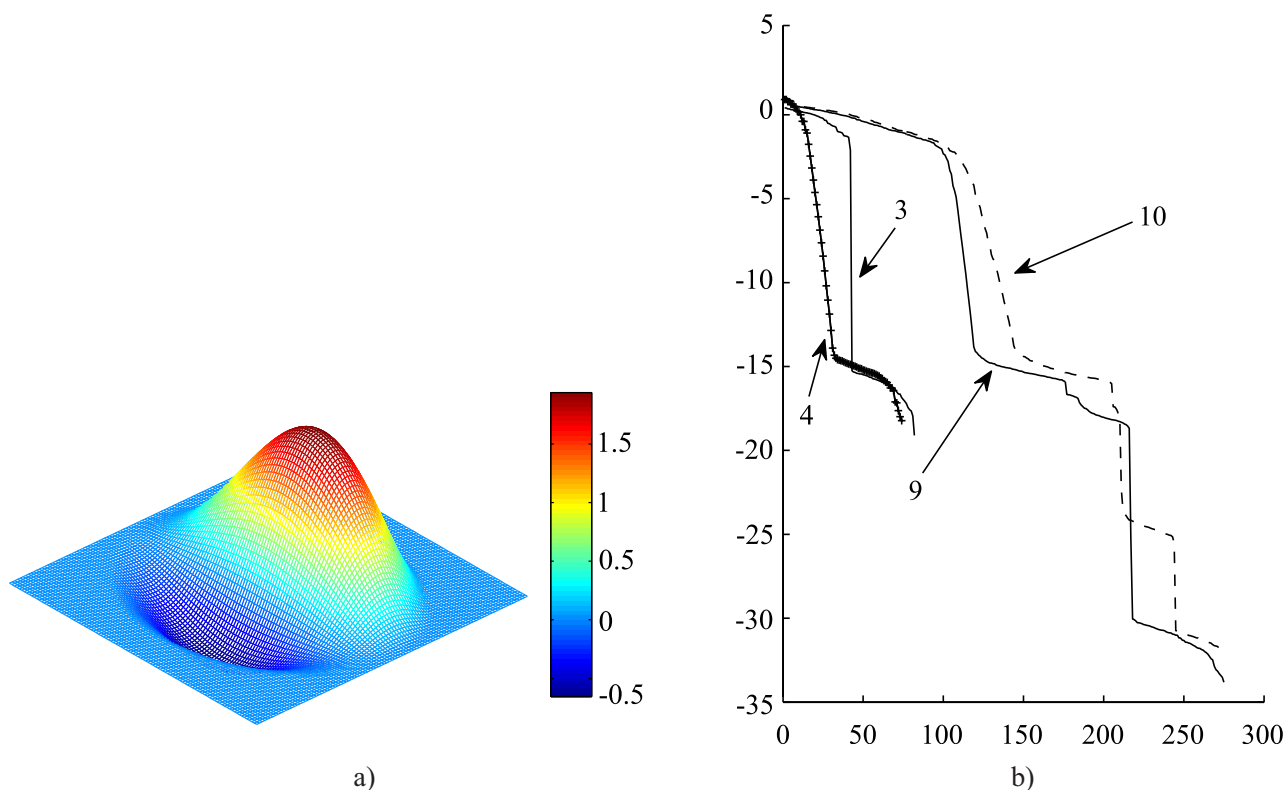


Рис. 2. Первоначальная форма волны цунами: $\varphi_{\max} = 1.959$ м, $\varphi_{\min} = -0.67$ м (а). Графики десятичных логарифмов сингулярных чисел матрицы A относительно их порядковых номеров (б). Числа 3, 4, 9, 10 соответствуют количеству приемников, записи которых участвовали в восстановлении первоначальной формы волны цунами

На рис. 2(б) представлены графики десятичных логарифмов сингулярных чисел матрицы A . В рассматриваемой задаче (1)–(4) сингулярные числа быстро убывают с ростом их номеров, что и означает некорректность задачи. Номера кривых $\{3, 4, 9, 10\}$ соответствуют количеству приемников, записи которых участвовали в восстановлении первоначальной формы волны цунами. Анализ сингулярного спектра позволяет определить критерий выбора числа r : чтобы избежать численной неустойчивости, следует использовать только сингулярные векторы, соответствующие первому пологому участку графика. Естественно, что сингулярный спектр оператора обратной задачи A определяется при прочих равных условиях

именно числом и расположением точек наблюдения. Сравнение графиков для случаев, когда использовались три и четыре мареограммы, показывает, что свойства матрицы A существенно зависят не только от величины r , но и от азимутального расположения приемников. Эта зависимость подробно исследовалась в [8]. Нетрудно убедиться, что увеличение числа станций приводит к возможности использования большего числа правых сингулярных векторов для конструирования решения и, в конечном счете, к повышению его качества. При проведении численных расчетов в нашем случае величина r связывалась с числом обусловленности матрицы $\text{cond}(A)$ следующим образом: если обозначить $d = 1/\text{cond}(A)$, то в расчетах использовались только такие базисные векторы, для которых соответствующие им сингулярные числа s_k удовлетворяли условию $\frac{s_k}{s_1} \geq d$. Их количество определяется равенством $r = \max\left\{k : \frac{s_k}{s_1} \geq d\right\}$.

Численное моделирование состояло из следующих основных этапов.

1. Вычисление синтетических мареограмм (4) во всех приемниках путем решения прямой задачи (1)–(3) с выбранной функцией $\varphi(x, y)$ в качестве начального смещения.
2. Наложение на полученные мареограммы “ветрового” шума с последующей фильтрацией высоких частот.
3. Вычисление матрицы A .
4. Применение SVD-процедуры и вычисление сингулярного спектра матрицы, выбор числа r .
5. Решение системы (12) относительно коэффициентов c_{mn} и построение функции (11).
6. Вычисление относительной погрешности восстановления в норме L_2 .

Многочисленные численные эксперименты на разных моделях позволяют сделать вывод, что наиболее приемлемое значение r удовлетворяет соотношению $r \geq 70$. Зависимость качества восстановления первоначальной формы волны цунами от конфигурации системы наблюдения, числа обусловленности матрицы A и числа r иллюстрируется таблицей, в которой P — количество приемников, используемых в процессе восстановления; егг — относительная погрешность восстановления (в L_2 -норме); φ_{\max} , φ_{\min} — максимальное и минимальное значения восстановленной функции в метрах. Последний столбец таблицы содержит номера используемых приемников, занумерованных согласно рис. 1b.

Зависимость точности восстановления первоначальной формы волны цунами от конфигурации системы наблюдения, числа обусловленности матрицы A

P	$\log(\text{cond})$	r	егг	φ_{\max} , М	φ_{\min} , М	номера приемников
7	2	73	0.3767	1.559	–.717	3, 4, 5, 6, 9, 10, 11
7	2	55	0.4436	1.381	–.768	2, 3, 4, 5, 6, 9, 10
7	2	65	0.4588	1.449	–.923	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
7	3	93	0.3164	1.732	–.6472	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
7	4	99	0.2671	1.816	–.7028	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
7	2	42	0.552	1.276	–.6745	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13
7	4	59	0.3173	1.706	–.7371	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13
7	2	23	0.6278	1.106	–.6959	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
7	2	45	0.5752	1.431	–1.35	1, 2, 3, 5, 8, 9, 10
7	2	66	0.6443	1.995	–1.920	1, 2, 3, 5, 9, 10, 11

На рис. 3 можно видеть зависимость результатов восстановления от количества и азимутального расположения приемников.

Восстановленный по нескольким мареограммам из имеющегося набора источник цунами использовался в качестве начального условия для моделирования волны цунами, регистрация которой производилась теперь уже во всех приемниках. Эти вновь полученные записи колебаний уровня морской поверхности сравнивались с синтетическими “исходными” мареограммами в каждом приемнике системы наблюдения. В результате получено хорошее совпадение мареограмм во всех четырнадцати приемниках, а не только в семи участвовавших в восстановлении (номера приемников, записи в которых использовались в процессе восстановления 5–11 согласно рис. 1a). Этот факт является очень важным для целей определения высоты волны в заданной точке расчетной области. Следует отметить, что использование в обращении записей пяти приемников не дает совпадения мареограмм по всем пунктам системы наблюдения в рассматриваемой

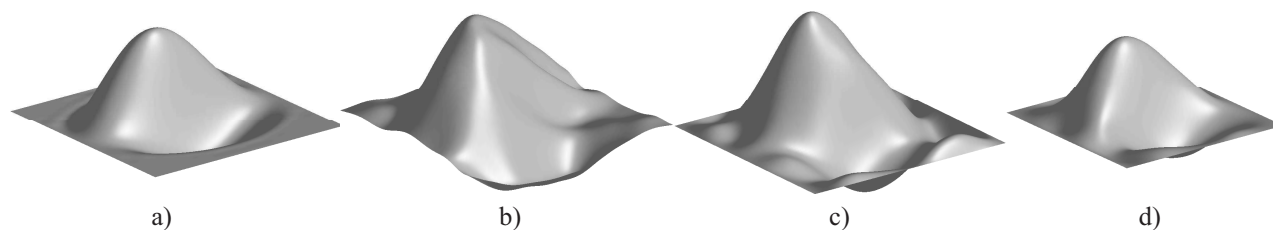


Рис. 3. Первоначальная форма волны цунами $\varphi_{\max} = 1.959$ м; $\varphi_{\min} = -0.67$ м (а). Восстановленные б) по трем приемникам, $\varphi_{\max} = 1.213(0.885)$ м; $\varphi_{\min} = -0.738(-0.357)$ м; $r = 41$; $\text{err} = 0.717$; в) по пяти приемникам, $\varphi_{\max} = 1.757(1.4716)$ м; $\varphi_{\min} = -1.0073(-.5142)$ м; $r = 57$; $\text{err} = 0.4729$; г) по семи приемникам, $\varphi_{\max} = 1.835(1.5138)$ м; $\varphi_{\min} = -0.7016(-0.5484)$ м; $\text{err} = 0.262$; $r = 103$; $\log(\text{cond}) = 6$. Значения в скобках соответствуют экстремальным значениям после сглаживания

модели.

Анализ результатов для реальной батиметрии побережья Перу и зашумленных синтетических данных свидетельствует об адекватности предложенного подхода к решению обратной задачи цунами. Теперь можно ставить задачу о выборе наиболее “информативного” направления распространения волны цунами для заданного региона, что может быть использовано при различного рода предварительных расчетах цунамириска.

Заключение. На основании проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- предложенный подход позволяет оценивать возможности используемой системы регистрации приходящих волн с точки зрения определения высоты волны в заданном пункте наблюдения;
- решение рассматриваемой задачи существенно зависит от уровня шумов используемых данных;
- адекватность решения обратной задачи подтверждает совпадение мареограмм от восстановленного источника с синтетическими данными для всех пунктов наблюдения, а не только для участвовавших в восстановлении;
- моделирование более сложного по форме источника требует увеличения количества базисных функций и уменьшения шага сетки;
- использование r -решений является эффективным средством регуляризации некорректной задачи; количество r используемых базисных векторов фактически оказывается существенно меньше минимального из размеров матрицы, что реально позволяет избежать неустойчивости задачи, связанной с резким убыванием сингулярных чисел матрицы.

Предлагаемый подход, при котором решение строится на основе анализа свойств оператора решения задачи, определяемых выбранной системой наблюдения и реальной батиметрией, позволяет получить достаточно надежный результат восстановления для заданных условий и использовать полученные результаты при создании системы регистрации приходящих волн при прогнозировании цунамириска для конкретного участка побережья.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Чеверде за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Satake K.* Inversion of tsunami waveforms for the estimation of a fault heterogeneity: method and numerical experiment // *J. Phys. Earth.* 1987. **35**. 241–254.
2. *Satake K.* Inversion of tsunami waveforms for the estimation of heterogeneous fault motion of large submarine earthquakes: the 1968 Tokachi-oki and the 1983 Japan sea earthquake // *J. Geophys. Res.* 1989. **94**. 5627–5636.
3. *Piatanesi A., Tinti S., Pagnoni G.* Tsunami waveform inversion by numerical finite-elements Green’s functions // *Natural Hazards and Earth System Science.* 2001. **1**. 187–194.
4. *Pires C., Miranda P.M.A.* Tsunami waveform inversion by adjoint methods // *J. Geophys. Res.* 2001. **106**. 19773–19796.
5. *Кайстренко В.М.* Обратная задача на определение источника цунами // *Волны цунами.* Тр. Сахалинского комплексного НИИ. Вып. 29. Южно-Сахалинск, 1972. 82–92.
6. *Cheverda V.A., Kostin V.I.* r -pseudoinverse for compact operators in Hilbert space: existence and stability // *J. Inverse and Ill-Posed Problems.* 1995. **3**, N 2. 131–148.
7. *Voronina T.A., Tcheverda V.A.* Reconstruction of tsunami initial form via level oscillation // *Bull. Nov. Comp. Center. Math. Model. in Geoph.* 1998. **4**. 127–136.
8. *Voronina T.A.* Reconstruction of initial tsunami waveform by the coastal observations inversion // *Bull. Nov. Comp. Center. Math. Model. in Geoph.* 2002. **7**. 89–100.

9. *Воронина Т.А.* Определение пространственного распределения источников колебаний по дистанционным измерениям в конечном числе точек // Сиб. журн. вычислит. матем. 2004. **7**, № 3. 203–211.
10. *Enquist B., Majda A.* Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // Math. Comp. 1977. **31**, N 139. 629–654.
11. *Чеверда В.А., Костин В.И.* g -псевдообратный для компактного оператора // Сибирские электронные математические известия. 2010. **7**. 258–282.
12. *Voronina T.* Reconstruction of initial tsunami waveforms by a truncated SVD method // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. **19**, N 4-5. 615–629.
13. *Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.* Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983.
14. *Белоносов А.С., Цецохо В.А.* Вычислительный алгоритм и процедуры сглаживания функций, заданных в узлах нерегулярной сетки на плоскости // Некоторые проблемы математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: ВЦ СО РАН СССР. 1976. 6–29.

Поступила в редакцию
03.03.2013
