

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАМОРОВ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

А. И. Сухинов¹, А. В. Никитина¹, А. Е. Чистяков¹, И. С. Семенов¹

Предложена математическая модель взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас, учитывающая движение водного потока, микротурбулентную диффузию, пространственно-неоднородное распределение солености и температуры в мелководных водоемах — Азовское море и Таганрогский залив. Устойчивость полученного численного решения задачи позволила проводить вычислительные эксперименты на многопроцессорной вычислительной системе в широком диапазоне значений управляющих параметров. Результаты показали, что с помощью ихтиологического моделирования можно исследовать условия формирования заморы в мелководных водоемах, а также оказывать положительное влияние на функционирование их экологической системы. Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии” (ПаВТ–2013; <http://agora.guru.ru/pavt2013>).

Ключевые слова: математическая модель, параллельные вычисления, MPI, Азовское море, заморные явления, вихревое течение, “цветение воды”.

Введение. В ходе экспедиционных исследований сотрудниками кафедры высшей математики Таганрогского технологического института Южного федерального университета (ТТИ ЮФУ) в 2000–2012 гг. было обнаружено, что на одной трети площади центрально-восточной части Азовского моря, которая воспроизводит около 70% биомассы всего моря, регистрируются обширные зоны кислородного голодания (зоны аноксии), что приводит к гибели всего живого (заморным явлениям) [1]. Улучшение кислородного режима в мелководном водоеме возможно с помощью использования метода его биологической очистки путем зарыбления Азовского моря промысловой рыбой — детритофагом-пеленгас. Эта дальневосточная кефаль проявляет высокую пищевую пластичность и является очень перспективным и ценным видом рыб в условиях мелководных водоемов как биологический мелиоратор донных органических отложений, запасы которых в большинстве водоемов неограниченны и не используются никем. Управление качеством вод мелководных водоемов, а также изучение условий формирования заморы, возникающих в результате антропогенной эвтрофикации, можно осуществлять с помощью методов математического моделирования.

1. Трехмерная математическая модель взаимодействия планктона и промысловой рыбы пеленгас. Рассмотрим нелинейную пространственно-неоднородную 3D модель взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас: “рыба–фитопланктон–зоопланктон–питательные вещества–детрит”, которая описывается на временном интервале $0 < t \leq T_0$ следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных в области G (рис. 1), представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема Σ_0 , дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$ и цилиндрической поверхностью σ [2]:

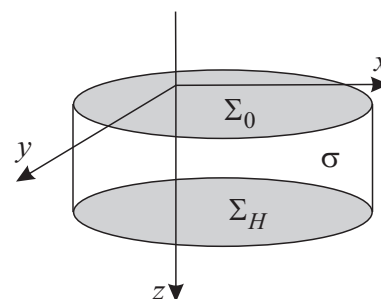


Рис. 1. Схема расчета области \bar{G}

¹ Южный федеральный университет, кафедра высшей математики, пер. Некрасовский, 44, 347922, г. Таганрог; А.И. Сухинов, профессор, e-mail: sukhinov@gmail.com; А.В. Никитина, доцент, e-mail: nikitina.vm@gmail.com; А.Е. Чистяков, доцент, e-mail: cheese_05@mail.ru; И.С. Семенов, программист, e-mail: isemenov@sfned.ru

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}X) &= \mu_X \Delta X + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_X \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \gamma_X \alpha_S X S - \delta_X X Z - \varepsilon_X X - \sigma_X X P, \\
\frac{\partial Z}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}Z) &= \mu_Z \Delta Z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_Z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + \gamma_Z \delta_X X Z - \varepsilon_Z Z - \delta_Z Z P, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}S) &= \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} \right) + \gamma_S \varepsilon_D D - \alpha_S X S + B(S_P - S) + f, \\
\frac{\partial D}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}D) &= \mu_D \Delta D + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_D \frac{\partial D}{\partial z} \right) + \varepsilon_X X + \varepsilon_Z Z - \varepsilon_D D - \beta_D D P, \\
\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{U}_P P) &= \mu_P \Delta P + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_P \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \gamma_P \beta_D D P - \varepsilon_P P + \xi_P \sigma_X X P - \delta_P P, \\
\mathbf{u}_P &= k_D \operatorname{grad} D + k_Z \operatorname{grad} Z + k_X \operatorname{grad} X.
\end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ — кусочно-гладкая граница области G . В системе (1) приняты следующие обозначения: X, Z, S, D и P — концентрации фитопланктона (*Coscinodiscus*), зоопланктона (*Copepoda*), биогенного вещества (азота), детрита и пеленгаса; α_S — коэффициент потребления биогенного вещества фитопланктоном; γ_X, γ_Z и γ_P — передаточные коэффициенты трофических функций; γ_S — доля питательного вещества, находящегося в биомассе фитопланктона; ε_Z и ε_P — коэффициенты элиминации (смертности) Z и P соответственно; ε_X — коэффициент, учитывающий смертность и метаболизм X ; δ_X — убыль фитопланктона за счет выедания зоопланктоном; δ_Z — убыль зоопланктона за счет выедания рыбами (пеленгасом); δ_P — убыль пеленгаса за счет выедания рыбами и вылова; S_P — предельно возможная концентрация биогенного вещества; $f = f(t, x, y, z)$ — функция источника загрязнения; B — удельная скорость поступления загрязняющего вещества; ε_D — коэффициент разложения детрита; β_D — скорость потребления органических остатков пеленгасом; σ_X — коэффициент убыли фитопланктона в результате потребления его пеленгасом; ξ_P — передаточный коэффициент роста концентрации пеленгаса за счет фитопланктона; μ_i — диффузионные коэффициенты в горизонтальном направлении субстанций $i \in \{P, X, Z, S\}$ соответственно; ν_i — диффузионные коэффициенты в вертикальном направлении для $i \in \{D, X, Z, S, P\}$ соответственно; Δ — двумерный оператор Лапласа; \mathbf{u} — поле скоростей водного потока; $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{0i}$ — скорость конвективного переноса вещества; $\mathbf{U}_P = \mathbf{u} + \mathbf{u}_P$ — скорость конвективного переноса пеленгаса; \mathbf{u}_P — скорость движения рыбы относительно водной среды; k_D, k_Z и k_X — коэффициенты таксиса; \mathbf{u}_{0i} — скорость осаждения i -й субстанции, $i \in \{X, Z, S, D\}$.

Пусть \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности и u_n — нормальная по отношению к Σ составляющая вектора скорости водного потока.

Зададим начальные условия:

$$\begin{aligned}
X(x, y, z, 0) &= X_0(x, y, z), & Z(x, y, z, 0) &= Z_0(x, y, z), & S(x, y, z, 0) &= S_0(x, y, z), \\
D(x, y, z, 0) &= D_0(x, y, z), & P(x, y, z, 0) &= P_0(x, y, z), & (x, y, z) &\in \bar{G}, \quad t = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Граничные условия (условие Неймана на границах, образованных береговой линией области, и третьего рода для X, Z, S, D, P на открытых участках водоема) для системы (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
X = Z = S = D = P &= 0 \quad \text{на } \sigma, \quad \text{если } u_n < 0; \\
\frac{\partial X}{\partial n} = \frac{\partial Z}{\partial n} = \frac{\partial S}{\partial n} = \frac{\partial D}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \sigma, \quad \text{если } u_n \geq 0; \\
\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \quad \text{на } \Sigma_0; \\
\frac{\partial X}{\partial z} = -\varepsilon_1 X, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = -\varepsilon_2 Z, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = -\varepsilon_3 Z, \quad \frac{\partial D}{\partial z} = -\varepsilon_4 D, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\varepsilon_5 P &\quad \text{на } \Sigma_H,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ — неотрицательные постоянные; $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$ — учитывают опускание водорослей, зоопланктона и пеленгаса на дно и их затопление; $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ — учитывают поглощение биогенного вещества и детрита донными отложениями.

Схема модели “рыба–фитопланктон–зоопланктон–питательные вещества–детрит” представлена на рис. 2.

2. Математическая модель гидродинамики. Входными данными сконструированной выше модели взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас является поле вектора скорости

водного потока, что требует в свою очередь построения математической модели движения водной среды. Исходными уравнениями гидродинамики мелководных водоемов являются [3, 4] уравнения движения (уравнения Навье–Стокса)

$$\begin{aligned} u'_t + uu'_x + vu'_y + wu'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_x + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu u'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \\ v'_t + uv'_x + vv'_y + wv'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (\nu v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \\ w'_t + uw'_x + vw'_y + ww'_z &= -\frac{1}{\rho} p'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (\nu w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta; \end{aligned} \quad (4)$$

и уравнение неразрывности для случая переменной плотности:

$$\rho'_t + (\rho u)'_x + (\rho v)'_y + (\rho w)'_z = 0. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости, p — превышение давления над гидростатическим давлением невозмущенной жидкости, ρ — плотность, Ω — угловая скорость вращения земли, θ — угол между вектором угловой скорости и вертикалью, μ и ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена.

Система уравнений (4) и (5) рассматривается при следующих граничных условиях:

- на входе (устье рек Дон и Кубань): $u(x, y, z, t) = u(t)$, $v(x, y, z, t) = v(t)$, $p'(x, y, z, t) = 0$, $\mathbf{u}_n(x, y, z, t) = 0$;
- боковая граница (берег и дно): $\rho_v \mu (u'_n)_n(x, y, z, t) = -\tau_x(t)$, $\rho_v \mu (v'_n)_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t)$, $\mathbf{u}_n(x, y, z, t) = 0$, $p'_n(x, y, z, t) = 0$;
- верхняя граница:

$$\rho_v \mu (u'_n)_n(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho_v \mu (v'_n)_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t), \quad w(x, y, z, t) = -\omega - \frac{p'_t}{\rho g}, \quad p'_n(x, y, t) = 0; \quad (6)$$

— на выходе (Керченский пролив): $p'_n(x, y, z, t) = 0$, $\mathbf{u}_n(x, y, z, t) = 0$, где ω — интенсивность испарения жидкости, τ_x и τ_y — составляющие тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна) и ρ_v — плотность взвеси.

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности могут быть записаны следующим образом: $\tau_x = \rho_a C_p (|\mathbf{w}|) w_x |\mathbf{w}|$, $\tau_y = \rho_a C_p (|\mathbf{w}|) w_y |\mathbf{w}|$, где \mathbf{w} — вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a — плотность атмосферы, безразмерный коэффициент $C_p(x) = \begin{cases} 0.0088, & x < 6.6 \text{ м/с}, \\ 0.0026, & x \geq 6.6 \text{ м/с}. \end{cases}$

Составляющие тангенциального напряжения для дна с учетом введенных обозначений могут быть записаны следующим образом: $\tau_x = \rho C_p (|\mathbf{u}|) u |\mathbf{u}|$, $\tau_y = \rho C_p (|\mathbf{u}|) v |\mathbf{u}|$.

На основе приведенной ниже аппроксимации рассчитывается неоднородный по глубине коэффициент вертикального турбулентного обмена на основании измеренных пульсаций скоростей [5]:

$$\nu = C_s^2 d^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)^2},$$

где \bar{U} и \bar{V} — осредненные по времени пульсации горизонтальных компонент скорости; d — характерный масштаб сетки; C_s — безразмерная эмпирическая константа, значение которой обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности.

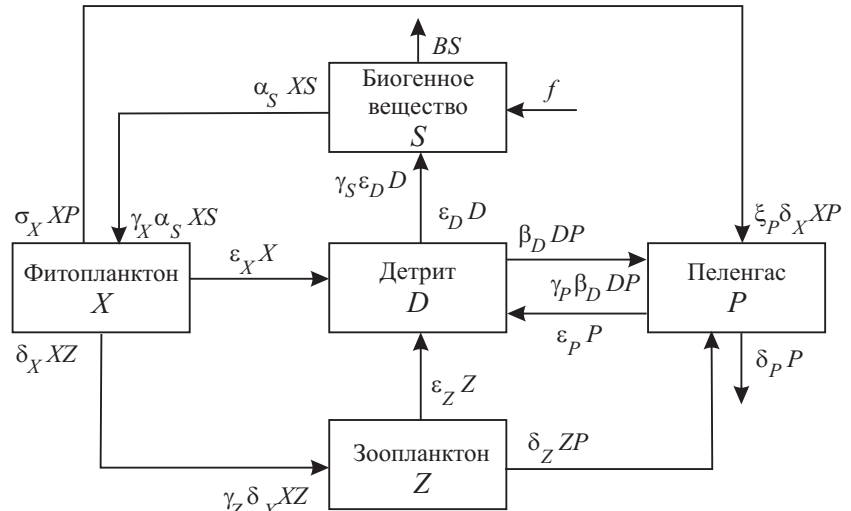


Рис. 2. Схема X-Z-S-D-P модели

Для решения поставленной задачи использован метод сеток [6]. Ячейки представляют собой параллелепипеды, которые могут быть заполненными, частично заполненными или пустыми [14]; на основе данной методики аппроксимируется сложная геометрия рельефа дна и береговой линии. Аппроксимация уравнений по временной переменной выполнена на основе схем расщепления по физическим процессам [7], при этом использованы схемы с весами [8, 15]. Погрешность аппроксимации математической модели взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас, учитывающей гидродинамические процессы, равна $O(\tau + \|h\|^2)$, где $\|h\| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}$. Доказано сохранение потока на дискретном уровне для разработанной гидродинамической модели. Достаточное условие устойчивости и монотонности модели определяется на основе принципа максимума [6] при ограничениях на шаг по пространственным переменным: $h_x < \left| \frac{2\mu}{u} \right|$, $h_y < \left| \frac{2\mu}{v} \right|$, $h_z < \left| \frac{2\nu}{w} \right|$ или $\text{Re} \leq 2N$, где $\text{Re} = \frac{|U|l}{\mu}$ — число Рейнольдса и l — характерный размер области.

3. Метод решения сеточных уравнений. Полученные сеточные уравнения можно записать в матричном виде

$$Ax = f, \quad (7)$$

где A — линейный положительно определенный оператор ($A > 0$). Для нахождения решения задачи (7) будем использовать неявный итерационный процесс [8]

$$B \frac{X^{m+1} - X^m}{\tau_{m+1}} + Ax^m = f, \quad (8)$$

где m — номер итерации, $\tau > 0$ — итерационный параметр, а B — некоторый обратимый оператор, который называется предобусловливателем, или стабилизатором. Обращение оператора B в (8) должно быть существенно проще, чем непосредственное обращение исходного оператора A в (7). При построении оператора B исходили из аддитивного представления оператора A_0 — симметричной части оператора A :

$$A_0 = R_1 + R_2, \quad R_1 = R_2^*, \quad (9)$$

где $A = A_0 + A_1$, $A_0 = A_0^*$, $A_1 = -A_1^*$.

Оператор-предобусловливатель запишется в следующем виде:

$$B = (D + \omega R_1)D^{-1}(D + \omega R_2), \quad D = D^* > 0, \quad \omega > 0, \quad (10)$$

где D — некоторый обратимый оператор.

Соотношения (9) и (10) задают модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) [6, 8] решения задачи, если определены операторы R_1 и R_2 и указаны способы определения параметров τ_{m+1} , ω и оператора D .

Алгоритм адаптивного модифицированного попеременно-треугольного метода минимальных поправок для расчета сеточных уравнений с несамосопряженным оператором имеет вид [9, 10]: $r^m = Ax^m - f$,

$$B(\omega_m)w^m = r^m, \quad \tilde{\omega}_m = \sqrt{\frac{(Dw^m, w^m)}{(D^{-1}R_2w^m, R_2w^m)}}, \quad s_m^2 = 1 - \frac{(A_0w^m, w^m)^2}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)(Bw^m, w^m)},$$

$$k_m = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)}, \quad \theta_m = \frac{1 - \sqrt{s_m^2 k_m (1 + k_m)^{-1}}}{1 + k_m (1 - s_m^2)}, \quad \tau_{m+1} = \theta_m \frac{(A_0w^m, w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)},$$

$x^{m+1} = x^m - \tau_{m+1}w^m$, $\omega_{m+1} = \tilde{\omega}_m$, где r^m — вектор невязки, w^m — вектор поправки, в качестве оператора D используется диагональная часть оператора A .

Оценка скорости сходимости имеет вид

$$\rho \leq \frac{\nu^* - 1}{\nu^* + 1}, \quad \nu^* = \nu \left(\sqrt{1 + k} + \sqrt{k} \right)^2, \quad k = \frac{(B^{-1}A_1w^m, A_1w^m)}{(B^{-1}A_0w^m, A_0w^m)},$$

где ν — число обусловленности матрицы C_0 , $C_0 = B^{-1/2}A_0B^{-1/2}$.

Условием остановки работы предложенного алгоритма является $\|r^m\|_C < \varepsilon$, где ε — заданная погрешность.

4. Параллельный вариант метода решения сеточных уравнений. Пиковая производительность используемой нами многопроцессорной вычислительной системы (МВС), установленной в ТТИ

ЮФУ, составляет 18.8 TFlops. Вычислительное поле этой системы, состоящей из 8 компьютерных стоек, построено на базе инфраструктуры HP BladeSystem c-class с интегрированными коммуникационными модулями, системами электропитания и охлаждения. В качестве вычислительных узлов используются 128 однотипных 16-ядерных Blade-серверов HP ProLiant BL685c, каждый из которых оснащен четырьмя 4-ядерными процессорами AMD Opteron 8356 2.3GHz и оперативной памятью объемом 32 Гб. Общее количество вычислительных ядер в комплексе — 2048, суммарный объем оперативной памяти — 4 Тб. Для управления МВС используются три управляющих сервера HP ProLiant DL385G5. Для задач резервного копирования используется библиотека MSL4048.

Параллельная реализация метода решения сеточных уравнений выполнена на основе метода декомпозиции области по двум координатным направлениям [11]. После разбиения исходной расчетной области на части каждый процессор получает свою расчетную область (рис. 3), при этом смежные области перекрываются двумя слоями узлов по направлению, перпендикулярному плоскости разбиения.

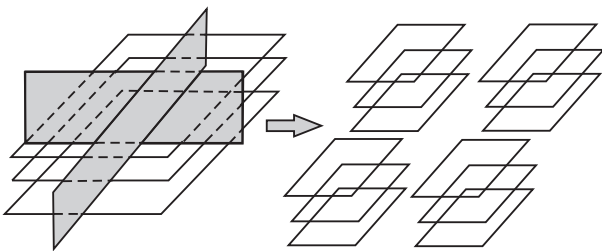


Рис. 3. Декомпозиция области

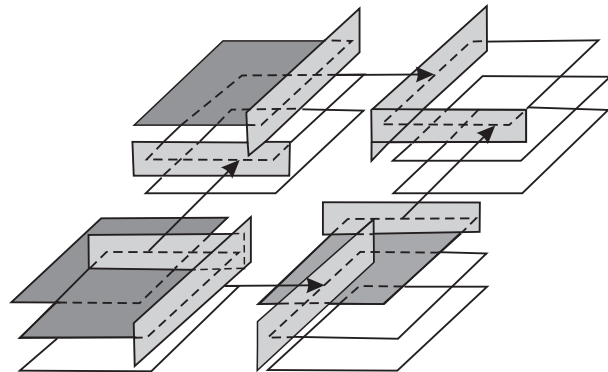


Рис. 4. Схема передачи данных

После того как каждый процессор получит информацию для своей части области, рассчитывается вектор невязки и его равномерная норма. Затем каждый процессор определяет максимальную по модулю компоненту вектора невязки и передает ее значение всем оставшимся вычислителям. Теперь для вычисления равномерной нормы вектора невязки достаточно на каждом процессоре найти максимальную компоненту.

Рассмотрим параллельный алгоритм расчета вектора поправки: $(D + \omega_m R_1)D^{-1}(D + \omega_m R_2)w^m = r^m$, где R_1 — нижне-треугольная матрица и R_2 — верхне-треугольная матрица. Для вычисления вектора поправки нужно последовательно решить два уравнения: $(D + \omega_m R_1)y^m = r^m$, $(D + \omega_m R_2)w^m = Dy^m$.

Вначале вычисляется вектор y^m , при этом расчет начинается в левом нижнем углу. Затем из правого верхнего угла начинается вычисление вектора поправки w^m . Схема расчета вектора y^m изображена на рис. 4 (показана передача элементов после расчета двух слоев первым процессором).

На первом шаге вычислений первый процессор обрабатывает верхний слой, затем осуществляется передача перекрывающихся элементов смежным процессорам. На следующем шаге первый процессор обрабатывает второй слой, а его соседи — первый. Передача элементов после расчета двух слоев первым процессором показана на рис. 4. В схеме для расчета вектора y^m только первый процессор не требует дополнительной информации и может независимо от других процессоров вести обработку своей части области, остальные процессоры ждут результатов от предыдущего процессора, пока он не передаст вычисленные значения сеточных функций для узлов сетки, располагающихся в предшествующих позициях данной строки. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут рассчитаны все слои. Аналогичным образом можно решить линейную систему с верхне-треугольной матрицей для расчета вектора поправки. Далее вычисляются скалярные произведения (10)

Зависимость ускорения и эффективности от количества процессоров

Количество процессоров	Время, с.	Ускорение	Эффективность
1	7.490639	1	1
2	4.151767	1.804	0.902
4	2.549591	2.938	0.734
8	1.450203	5.165	0.646
16	0.882420	8.489	0.531
32	0.458085	16.351	0.511
64	0.265781	28.192	0.44
128	0.171535	43.668	0.341

и выполняется переход на следующий итерационный слой.

Результаты расчета ускорения и эффективности в зависимости от количества процессоров для параллельного варианта адаптивного попеременно-треугольного метода приведены в таблице. Расчеты производились на сетке размерами $351 \times 251 \times 46$ узлов.

5. Описание программного комплекса. Разработанное экспериментальное программное обеспечение на базе многопроцессорной вычислительной системы предназначено для математического моделирования возможных сценариев развития экосистем мелководных водоемов на примере Азовского моря. Программный комплекс Azov3d предназначен для построения турбулентных потоков несжимаемого поля скоростей водной среды на сетках с высокой разрешающей способностью. Эта программа используется для расчета трехмерного вектора скорости течения водной среды в акватории Азовского моря, учитывает такие физические параметры, как сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение, стоки рек, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, и обеспечивает выполнение следующих функций:

- расчет поля скорости без учета давления;
- расчет гидростатического давления (используется в качестве начального приближения для гидродинамического давления);

- расчет гидродинамического давления;
- расчет трехмерного поля скорости.

К выходным параметрам относятся:

- шаги по пространственным координатам,
- погрешность вычисления сеточных уравнений,
- размеры расчетной сетки,
- временной интервал,
- интенсивность испарения,
- начальные распределения компонент вектора скорости движения водной среды и давления.

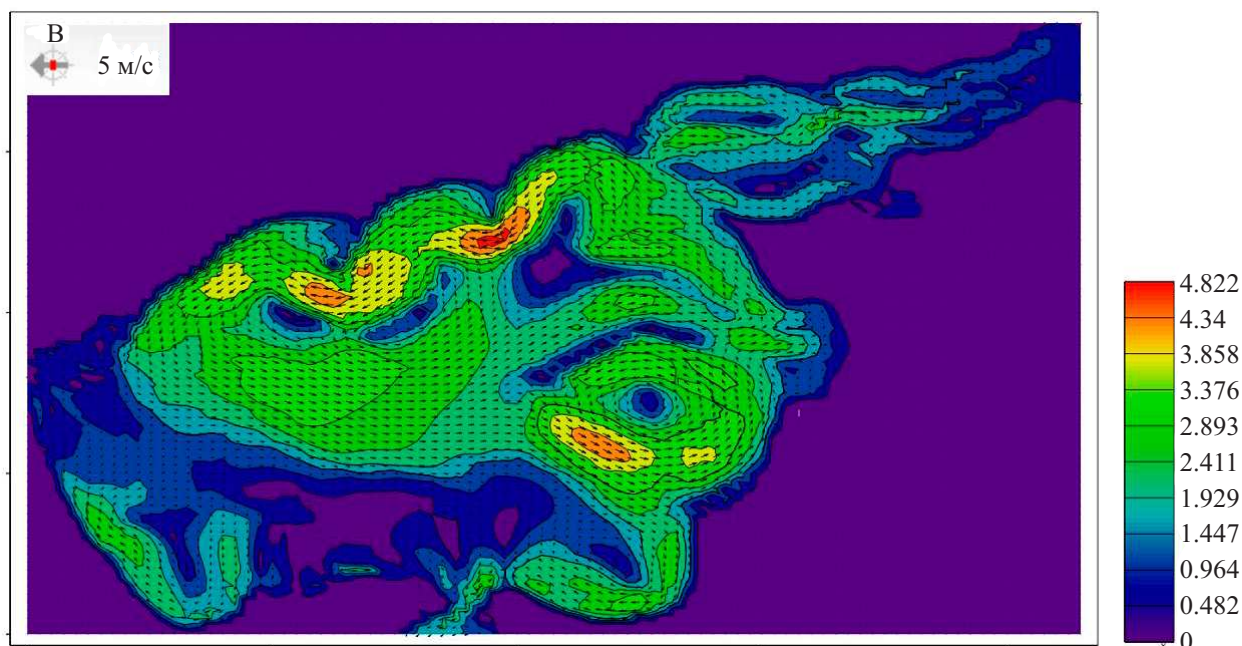


Рис. 5. Поле вектора скорости движения водной среды при восточном ветре 5 м/с (баротропные течения)

Разработанный комплекс программ допускает включение в свой состав новых расчетных функций, в частности в данный комплекс были встроены программные блоки, предназначенные для вычисления трехмерных распределений концентраций планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас.

Поля скоростей водного потока, рассчитанные на основе математической модели (4)–(6), относятся к входным данным для модели гидробиологических процессов (1)–(3). Выходные файлы содержат информацию о преобразованиях, произошедших с различными химико-биологическими параметрами в результате работы модели (1)–(3).

6. Результаты численных экспериментов. С помощью численной реализации гидростатической

модели (4)–(6) проводились исследования причин возникновения заморозов в мелководных водоемах, таких как Азовское море и Таганрогский залив. Было установлено, что при наличии замкнутого вихревого движения среды значительное количество органических веществ не покидает пределы этой структуры и, опускаясь на дно, образует органический осадок, что приводит к появлению участков анаэробного заражения. На рис. 5 видно наличие вихревой структуры течения в восточной части Азовского моря, в данном районе вода богата органическими примесями, источниками которых являются реки Дон и Кубань. С помощью численной реализации гидробиологической пространственно-неоднородной модели вида (1)–(3) изучались возможности уменьшения площадей заморозных зон в мелководном водоеме, а значит, и биологической очистки вод, за счет зарыбления его биологическим донным мелиоратором промыслового значения — пеленгас. Предполагалось, что интегральное воздействие сезонно изменяющихся внешних факторов отражается на величине коэффициентов роста и продуцирования популяций планктона и рыб.

В соответствии с направленностью работы при разработке модельных сценариев учитывались особенности размножения, стадийного развития биологических организмов и различия в длительности их репродукционных циклов, поэтому сдвиги по времени между изменениями биомасс фитопланктона, кормового зоопланктона и пеленгаса соответствуют реальным процессам, происходящим в мелководном водоеме. Учет различий в удельной скорости увеличения биомассы организмов разных трофических уровней осложняется еще и тем, что физиологические процессы чувствительны к изменениям внешних условий.

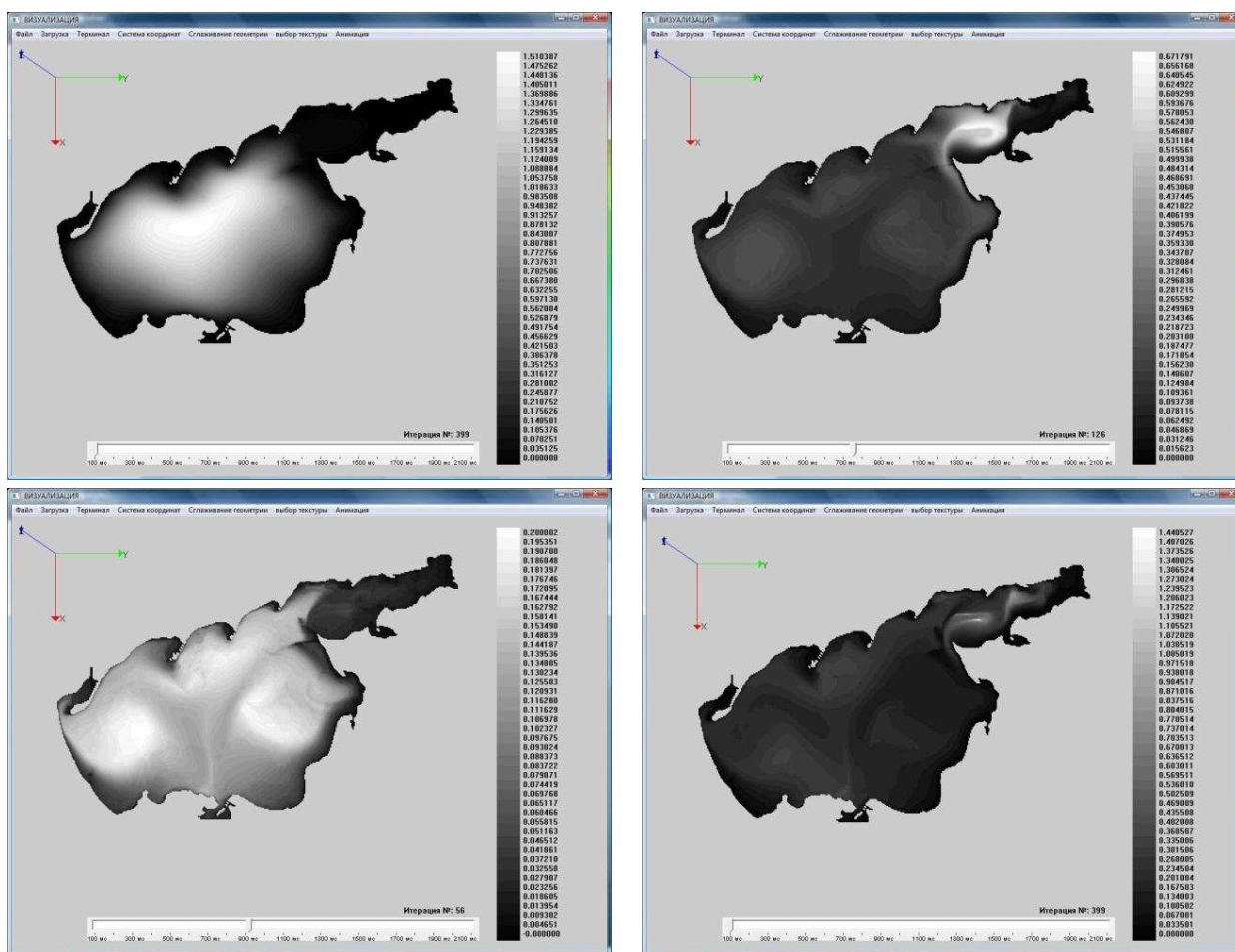


Рис. 6. Распределение концентраций детрита, временной интервал $T = 56, 126, 155, 400$ дней

Численные эксперименты на основе описанной выше математической модели гидродинамических процессов производились на сетке размером $351 \times 251 \times 46$ узлов для Азовского моря со следующими шагами между узлами: по горизонтали — 1 км; по вертикали — 50 см; по времени — 1000 сек. На основе экспедиционных данных и литературных источников проведена калибровка и верификация описанных в работе моделей, а также подобраны оптимальные значения входящих в них параметров. Из проведенных исследований на устойчивость используемых разностных схем можно сделать вывод о том, что на основе разработанного программного комплекса можно проводить вычислительные эксперименты прогностиче-

ской направленности в широком диапазоне задаваемых параметров.

При ихтиологическом моделировании и разработке всевозможных сценариев биологической очистки вод мелководных водоемов учитывались экологические особенности пеленгаса — типично эврибионтного вида, способного жить в очень разнообразных по экологическим условиям водоемах. Эта рыба достаточно эвригалинная и живет в водоемах с разными показателями солености. Кроме того, она эвритермная (т.е. приспособлена к обитанию в водоемах с разными температурными режимами), мирная и стайная, быстро растет и нагуливается на относительно малых глубинах, преимущественно на дне прибрежных зон водоемов, насыщенных различными органическими остатками и соединениями. Однако для размножения (на нерест) пеленгас мигрирует в более глубокие места с повышенной соленостью воды.

Лимитирующим фактором, который определяет численность популяции промысловой рыбы пеленгас, может являться ограниченность мест, пригодных для зимовки рыбы.

Было выполнено численное моделирование для трехмерной задачи взаимодействия планктона и популяции промысловой рыбы пеленгас: “рыба–фитопланктон–зоопланктон–питательные вещества–детрит” в областях сложной формы (мелководные водоемы: Азовское море и Таганрогский залив) при различных начальных условиях и направлениях ветра.

Были построены диаграммы распределения концентраций субстанций X , Z , D , P , S , которые характеризуются определенной периодичностью в пространстве и во времени. Для реальной экосистемы (Азовское море и Таганрогский залив) возникающие устойчивые диссипативные структуры соответствуют устойчивой “пятнистости” распределения популяций планктона по акватории водоема, что является одной из качественных, не нашедших четкого объяснения в современной гидробиологии, особенностей.

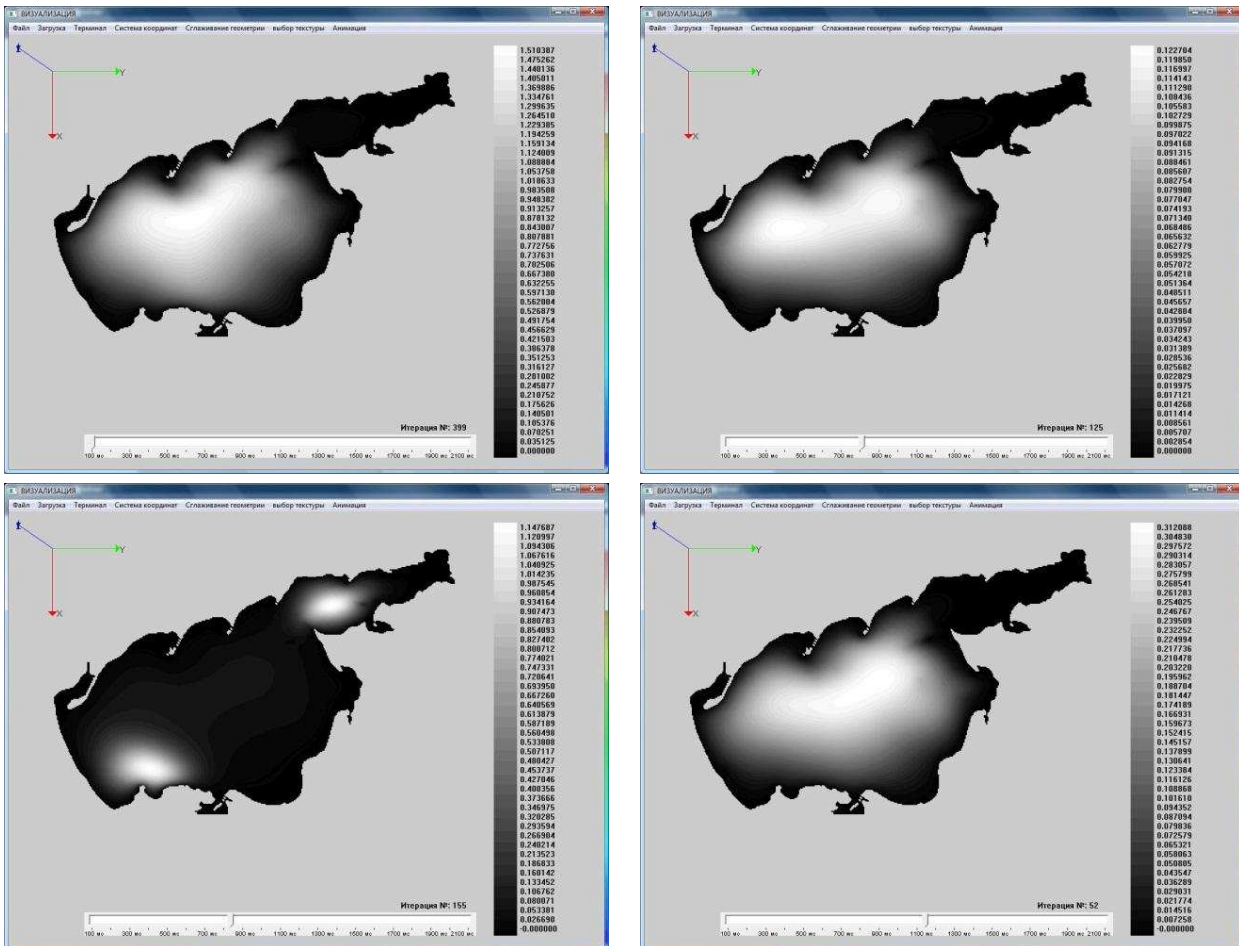


Рис. 7. Распределение концентраций пеленгаса, временной интервал $T = 56, 126, 155, 400$ дней

На рис. 6 и 7 представлены результаты моделирования возможных сценариев развития экосистемы Азовского моря (изменения концентрации рыбной популяции пеленгас) для северного направления ветра. Белым цветом выделено максимальное значение концентраций пеленгаса и детрита. С помощью представленных результатов численного эксперимента можно исследовать возможный сценарий зарыбления

акватории Азовского моря пеленгасом, участвующим в донной мелиорации мест скопления детрита. При значении временного интервала начиная со 126 дней, согласно представленным результатам, наблюдается уменьшение концентрации детрита, а значит, и концентрации донных отложений в центрально-восточной части Азовского моря, что, в конечном счете, приведет к уменьшению площадей заморных зон и улучшению качества вод в данном водоеме.

С помощью разработанного программного комплекса можно исследовать вопросы акклиматизации пеленгаса в новом для него по экологическому режиму мелководном водоеме, оценить специфику условий водного тела, что позволит избежать непредвиденных отрицательных технологических влияний и планировать увеличение производства этой рыбы.

Анализ полученных результатов позволил сделать конкретные выводы о свойствах математической модели детрит–пеленгас и возможностях управления качеством вод мелководных водоемов, таких как Азовское море, с помощью методов математического моделирования.

Рассмотренная картина, демонстрирующая происходящие в мелководном водоеме процессы, является идеальной, так как описывает лишь регулярное периодическое изменение среды обитания и не отражает ее случайных флуктуаций, которые, однако, не изменяют поведение системы принципиально, а лишь “зашумляют” динамику. Это затрудняет выявление периодичностей.

Наблюдаемая в природе закономерность динамики численности рыбных популяций есть результат сложного наложения периодических вариаций условий внешней среды на внутренние периодичности, порождаемые биотическим взаимодействием.

Умеренная внешняя модуляция несколько изменяет внутренний цикл системы, делая его период кратным внешнему.

Заключение. С помощью экспедиционных исследований проведена первичная верификация модели экосистемы Азовского моря [12]. Реализована задача моделирования и прогноза состояния водной экосистемы Азовского моря в условиях антропогенного воздействия и всестороннего изучения уникального водного объекта, который в силу мелководности в большей степени подвержен антропогенному влиянию [13]. Создан исследовательско-прогнозный комплекс, объединяющий математические модели и базы данных, с помощью которого изучены условия, при которых возникают заморы в мелководных водоемах. Разработаны всевозможные сценарии зарыбления мелководных водоемов детритофагом пеленгас с целью возможного уменьшения площадей заморных зон, возникающих в мелководных водоемах.

Отличительными особенностями разрабатываемых алгоритмов, реализующих поставленные гидро-биологические модельные задачи, являются высокая производительность, достоверность и точность получаемых результатов. Высокая производительность достигается за счет использования эффективных численных методов решения сеточных уравнений, ориентированных для применения на параллельных вычислительных системах в реальном масштабе времени. Достоверность достигается за счет учета определяющих физических факторов, таких как сила Кориолиса, турбулентный обмен, сложная геометрия дна и береговой линии, испарение, стоки рек, динамическое перестроение расчетной области, ветровые напряжения и трение о дно, а также за счет учета отклонения значения поля давления от гидростатического приближения. Точность достигается применением подробных расчетных сеток, учитывающих степень “заполненности” расчетных ячеек [14], а также отсутствием неконсервативных диссипативных слагаемых и нефизичных источников (стоков), возникающих в результате конечно-разностных аппроксимаций. Кроме того, показана эффективность алгоритма адаптивного попеременно-треугольного итерационного метода и его параллельной реализации, выполненной на основе декомпозиции области по двум пространственным направлениям, применительно к решению задач гидродинамики мелководных водоемов при достаточно большом количестве вычислителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якушев Е.В., Сухинов А.И. и др. Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна “Акванавт” // *Океанология*. 2003. **43**, № 1. 44–53.
2. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // *Математическое моделирование*. 2012. **24**, № 9. 3–21.
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // *Математическое моделирование*. 2011. **23**, № 3. 3–21.
4. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 290–297.
5. Белоцерковский О.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2003.

6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
7. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Шенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. **15**, № 1. 197–207.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. 2002. **43**, № 3. 552–572.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 1. 3–20.
11. Чистяков А.Е. Теоретические оценки ускорения и эффективности параллельной реализации ПТМ скорейшего спуска // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6. 237–249.
12. Никитина А.В. Численное решение задачи динамики токсичных водорослей в Таганрогском заливе // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6. 113–116.
13. Никитина А.В. Модели биологической кинетики, стабилизирующие экологическую систему Таганрогского залива // Известия ЮФУ. Технические науки. 2009. № 8. 130–134.
14. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишня А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. 2012. **24**, № 8. 32–44.
15. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Бондаренко Ю.С. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Известия ЮФУ. Технические науки. 2011. № 8. 6–13.

Поступила в редакцию
08.02.2013
