

УДК 517.988

**ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ОЦЕНОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ  
НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ  
РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ**

М. М. Кокурин<sup>1</sup>

Исследуются разностные схемы решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве. Целью работы является нахождение оценок скорости сходимости таких схем, а также оценок погрешности в зависимости от уровня погрешности начальных данных. Известные ранее оценки скорости сходимости и погрешности улучшаются за счет оптимального выбора начальных параметров разностной схемы. Выделены классы схем, для которых эти оценки допускают дальнейшее усиление. Приведены результаты численных экспериментов, показывающие практическую пригодность развиваемого подхода к решению некорректных задач Коши. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00239а).

**Ключевые слова:** абстрактная задача Коши, банахово пространство, некорректные задачи, разностные схемы, скорость сходимости, оценки погрешности, операторное исчисление.

**1. Постановка задачи.** Объектом исследования настоящей статьи является задача Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = f, \quad (1.1)$$

где  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  — неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве  $X$ ;  $\overline{D(A)} = X$  и  $f \in D(A)$ . Нас будет интересовать решение  $x = x(t)$  задачи (1.1) на интервале  $[0, T]$ . Функцию  $x : [0, T] \rightarrow X$ , где  $x(0) = f$ ,  $x(t) \in D(A)$ ,  $t \in [0, T]$ , будем называть решением задачи (1.1), если она непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0, T]$  в смысле нормы пространства  $X$  и при  $t \in [0, T]$  удовлетворяет дифференциальному уравнению из (1.1).

Обозначим через  $\sigma(A)$  спектр оператора  $A$  и положим  $K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \zeta| < \varphi\}$ ,  $\varphi \in (0, \pi)$ . Пусть  $\partial K(\varphi)$  — граница сектора  $K(\varphi)$ . Через  $R(\zeta, A) = (\zeta E - A)^{-1}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ , обозначается резольвента оператора  $A$ ;  $E$  — единичный оператор пространства  $X$ . Ниже будем предполагать, что оператор  $A$  удовлетворяет следующему условию секториальности.

**Условие 1.** *Справедливо включение  $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$ ,  $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ , и имеет место оценка*

$$\|R(\zeta, A)\| \leq \frac{C_0}{1 + |\zeta|} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus K(\varphi_0), \quad (1.2)$$

где постоянная  $C_0$  не зависит от  $\zeta$ .

Отметим, что условие 1 обеспечивает существование обратного оператора  $A^{-1}$ . Из этого условия также следует, что  $-A$  является генератором сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов  $(U_{-A}(t))_{t \geq 0}$ . Она допускает аналитическое продолжение с положительной полуоси  $\{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$  в сектор  $K(\pi/2 - \varphi_0)$ . Для решения  $x(t)$  задачи (1.1) справедливо равенство  $x(t) = U_{-A}(T - t)x(T)$  [1–3].

Задача (1.1) в общем случае поставлена некорректно, однако для любого  $f \in D(A)$  она имеет не более одного решения [2]. Предполагая, что решение  $x = x(t)$  задачи (1.1) существует при  $t \in [0, T]$ , рассмотрим следующий класс разностных схем аппроксимации функции  $x = x(t)$ :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j A x_{n+j}, \quad 0 \leq n \leq N - k, \quad \Delta t = \frac{T}{N}, \quad x_0 = f. \quad (1.3)$$

Здесь значение  $k \in \mathbb{N}$  фиксировано, а  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ , — комплексные параметры, выбор которых определяет конкретную разностную схему. Помимо них необходимо задать еще начальные элементы  $x_1, \dots, x_{k-1}$ ,

<sup>1</sup>Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пл. Ленина, д. 1, 424001, г. Йошкар-Ола; студент, e-mail: kokurin@nextmail.ru

т.е. шаблон разностной схемы [16]. Схемы с  $\alpha_k = 0$ , называемые схемами с забеганием вперед, здесь не рассматриваются, поэтому без ограничения общности можно считать  $\alpha_k = 1$ .

Схема (1.3) определяет приближения  $x_{n+k}$  для всех  $0 \leq n \leq N - k$  по формуле

$$x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j \Delta t A - \alpha_j E)(E - \beta_k \Delta t A)^{-1} x_{n+j}. \tag{1.4}$$

Существенно, что данное представление, в отличие от (1.3), при  $\beta_k \neq 0$  определяет приближения  $x_n$ ,  $k \leq n \leq N$ , даже если  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \notin D(A)$ .

Целью настоящей статьи является вывод оценок скорости сходимости разностной схемы (1.3), оценок погрешности для получаемого приближенного решения в зависимости от погрешности начального элемента  $f$ , а также получение условий, необходимых и достаточных для выполнения таких оценок. В отличие от работы [3], в которой ставилась сходная задача для схем с вещественными коэффициентами, в настоящей работе для коэффициентов разностной схемы допускаются комплексные значения. Результаты [3] улучшаются за счет оптимального выбора начальных элементов  $x_1, \dots, x_{k-1}$  (раздел 2) и учета специфики отдельных классов разностных схем (раздел 3). В разделе 4, который носит вспомогательный характер, описываются способы нахождения числовой характеристики разностных схем, используемой в теоремах раздела 2. Практически важный случай, когда элемент  $f$  в (1.1) известен приближенно, изучается в разделе 5. Наконец, в разделе 6 приводятся результаты численных экспериментов с использованием одной из разностных схем вида (1.3).

В настоящей работе рассматривается дискретизация задачи (1.1) по времени; конечномерная аппроксимация пространства  $X$  не используется. Схемам полной дискретизации посвящены работы [4, 5], в которых, впрочем, не применяется описанная здесь оптимизация выбора начальных элементов разностной схемы.

**2. Об оптимизации выбора начальных элементов.** Рассмотрим вспомогательное скалярное разностное уравнение

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j v_{n+j} = \Delta t \lambda \sum_{j=0}^k \beta_j v_{n+j}, \quad 0 \leq n \leq N - k. \tag{2.1}$$

Если определить начальные значения как  $v_j = v_j(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq k - 1$ , то в качестве решения  $v_n(\lambda)$  уравнения (2.1) при каждом  $k \leq n \leq N$  будем иметь функцию параметра  $\lambda$ , которую можно найти по следующей рекуррентной формуле, аналогичной (1.4):

$$v_{n+k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j \lambda \Delta t - \alpha_j)(1 - \beta_k \lambda \Delta t)^{-1} v_{n+j}(\lambda). \tag{2.2}$$

Разностное уравнение (2.1) при выполнении приведенных ниже условий на коэффициенты  $\alpha_j, \beta_j$  аппроксимирует решение  $v(t) = e^{\lambda t}$  следующей задачи Коши с параметром  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$v' = \lambda v, \quad v(0) = 1. \tag{2.3}$$

Потребуем, чтобы схема (2.1) удовлетворяла условию устойчивости Дальквиста [6, 7], обеспечивающему сходимость приближений  $v_n$  к соответствующим значениям  $v(t)$ ,  $t = n\Delta t$ ,  $0 \leq n \leq N$ .

**Условие 2.** Все корни  $\xi^* \in \mathbb{C}$  характеристического полинома  $\rho(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j$  таковы, что  $|\xi^*| \leq 1$ ,

а те корни, для которых  $|\xi^*| = 1$ , являются простыми.

Установим теперь связь между решениями уравнений (1.3) и (2.1). Для этого потребуется определить функции  $v_n(A)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , от оператора  $A$ . Будем использовать исчисление замкнутых операторов [8]. Если линейный оператор  $T : D(T) \subset X \rightarrow X$  замкнут, а функция  $F(\lambda)$  аналитична в окрестности множества  $\sigma(T)$  и на бесконечности, то определен ограниченный оператор

$$F(T) = F(\infty)E + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} F(\lambda)R(\lambda, T) d\lambda, \tag{2.4}$$

где  $\tilde{\Gamma}$  — контур, охватывающий  $\sigma(T)$  и бесконечно удаленную точку плоскости  $\mathbb{C}$ . В частности, если  $F(\lambda) \equiv 1$ , то  $F(T) = E$  [8]. В соответствии с данным определением будем выбирать начальные функции  $v_j(\lambda)$

аналитическими в окрестности сектора  $K(\varphi_0)$  и на бесконечности и потребуем выполнения следующего условия.

**Условие 3.** Коэффициент  $\beta_k$  схемы (1.3) не равен нулю и  $|\arg \beta_k| > \varphi_0$ .

Связь между решениями уравнений (1.3) и (2.1) устанавливает

**Лемма 1.** Если  $v_0 \equiv 1$ , функции  $v_j(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , аналитичны в окрестности  $K(\varphi_0)$  и на бесконечности, выполнено условие 3 и, кроме того, начальные условия схем (1.3) и (2.1) связаны соотношением  $x_j = v_j(A)f$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , то определены операторы  $v_n(A) \in L(X)$  и

$$x_n = v_n(A)f, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Для  $0 \leq n \leq k$  утверждение леммы очевидно. Из (2.2) видно, что функции  $v_n(\lambda)$ ,  $k \leq n \leq N$  аналитичны на бесконечности и могут иметь только одну особую точку, не совпадающую с особыми точками функций  $v_j(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , а именно точку  $\lambda = (\beta_k \Delta t)^{-1}$ . В силу условия 3 она лежит вне замыкания сектора  $K(\varphi_0)$ . Теперь справедливость доказываемого утверждения для  $k \leq n \leq N$  устанавливается аналогично [9]. Лемма доказана.

Ниже будем считать условия леммы 1 выполненными. Установим связь между качеством приближения схемой (1.3) решения задачи (1.1) и приближения уравнением (2.1) решения задачи (2.3) при следующем условии продолжимости искомого решения  $x(t)$ .

**Условие 4.** Решение  $x(t)$  задачи (1.1) существует на отрезке  $[0, T_1]$ , где  $T_1 > aT$ ,  $a$  — характеристический показатель применяемой разностной схемы.

Под характеристическим показателем  $a \geq 1$  будем понимать величину, характеризующую разностную схему (2.1) с заданными начальными условиями  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , при фиксированном угле секториальности  $\varphi_0$  оператора  $A$  и определяемую соотношением

$$|v_n(\lambda)| \leq C_1 e^{at \operatorname{Re} \lambda}, \quad t = n\Delta t, \quad (2.6)$$

которое должно выполняться с некоторой константой  $C_1$  для всех  $\lambda \in \partial K(\varphi_0)$  и для всех  $0 \leq n \leq N$ . Очевидно, если  $a_0$  — характеристический показатель, то и любое  $a > a_0$  также является характеристическим показателем. В лемме 4 будет показано, что при используемом нами способе выбора начальных условий характеристический показатель всегда существует.

Наряду с описанным выше исчислением замкнутых операторов будем использовать исчисление секториальных операторов в банаховом пространстве [10, 11]. Если функция  $F(\zeta)$  аналитична в секторе  $K(\varphi_0 + \varepsilon)$  с некоторым  $\varepsilon > 0$  и убывает на бесконечности быстрее некоторой отрицательной степени  $|\zeta|$  равномерно по  $\arg \zeta$  в этом секторе, то формула  $F(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} F(\zeta) R(\zeta, T) d\zeta$  определяет оператор

$F(T) \in L(X)$ . Здесь  $\Gamma(\varphi_0, r_0)$  — граница множества  $K(\varphi_0) \setminus S(r_0)$ , проходимая в направлении возрастания мнимой части,  $S(r_0)$  — круг с центром в начале координат и достаточно малым радиусом  $r_0$ . В частности, для  $G(\zeta) = \zeta^{-p}$ ,  $p > 0$ , справедливо  $G(A) = A^{-p}$ . Теория дробных степеней операторов изложена в [10, 11]. Кроме того, если определены функции  $F(T)$ ,  $G(T)$  от оператора  $T$ , то выполняется равенство

$$F(T)G(T) = (FG)(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} F(\zeta)G(\zeta)R(\zeta, T) d\zeta. \quad (2.7)$$

Отметим, что функция от оператора может быть определена в одном из вышеописанных исчислений и не определена в другом. Однако если функцию от оператора можно определить обоими способами, то получающиеся операторы совпадают [10].

Из условия 4 следует  $x(t) = U_{-A}(T_1 - t)x(T_1)$ , однако  $U_{-A}(t)$  является функцией  $F_t(\zeta) = e^{-\zeta t}$  от оператора  $A$  [12]. Поэтому

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} e^{-(T_1-t)\lambda} R(\lambda, A)x(T_1) d\lambda, \quad (2.8)$$

$$x(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} e^{-T_1\lambda} R(\lambda, A)x(T_1) d\lambda. \quad (2.9)$$

В качестве  $\tilde{\Gamma}$  в формуле (2.4) будем выбирать замкнутый контур, окружающий особые точки функций  $v_n(\lambda)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , описанные в доказательстве леммы 1, и не пересекающийся с сектором  $K(\varphi_0)$ . Форма этого контура будет зависеть от  $\Delta t$ :  $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(\Delta t)$ .

Согласно (2.5), имеем  $x_n = v_n(A)x(0) = v_n(\infty)x(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} v_n(\lambda)R(\lambda, A)x(0) d\lambda$ . Подставляя сюда выражение для  $x(0)$  из формулы (2.9), аналогично [3] получаем представление

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} v_n(\lambda)e^{-T_1\lambda}R(\lambda, A)x(T_1) d\lambda. \tag{2.10}$$

Объединение (2.8) и (2.10) дает  $x_n - x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} (v_n(\lambda)e^{-T_1\lambda} - e^{-(T_1-t)\lambda}) R(\lambda, A)x(T_1) d\lambda$ ,  $t = n\Delta t$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Отсюда с учетом (1.2) получаем оценку

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_2 \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \frac{e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda} |v_n(\lambda) - e^{\lambda t}|}{1 + |\lambda|} |d\lambda|. \tag{2.11}$$

Здесь и далее  $C_l$  — неотрицательные константы, которые могут зависеть от коэффициентов  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ , разностной схемы (1.3) и угла секториальности  $\varphi_0$ , а также от величин  $T, T_1$  и элемента  $x(T_1)$ , но не от  $\lambda$  или  $\Delta t$ .

Оценка (2.11) устанавливает связь между качеством  $\|x_n - x(n\Delta t)\|$  приближения схемой (1.3) решения задачи (1.1) и качеством  $|v_n(\lambda) - e^{\lambda t}|$  приближения разностным уравнением (2.1) решения задачи (2.3). Изучим возможности минимизации величины  $|v_n(\lambda) - e^{\lambda t}|$  за счет выбора функций  $v_j(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ .

Обозначим  $\tilde{O}(\Delta t) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \left| \left| \lambda - \frac{1}{\beta_k \Delta t} \right| = \tilde{\varepsilon} \left| \frac{1}{\beta_k \Delta t} \right| \right. \right\}$ , где значение  $\tilde{\varepsilon} > 0$  следует выбирать так, чтобы  $\tilde{O}(\Delta t) \cap \overline{K(\varphi_0)} = \emptyset$ . Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 2.** *Справедливы оценки*

$$|v_n(\lambda) - e^{\lambda t}| \leq C_3 e^{\mu T \operatorname{Re} \lambda} \left( \sum_{j=0}^{n-k} |\tilde{g}_j| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - e^{j\lambda \Delta t}| \right), \quad \lambda \notin \operatorname{Int} \tilde{O}(\Delta t), \quad \operatorname{Re} \lambda \neq 0; \tag{2.12}$$

$$|v_n(\lambda)| \leq C_4 e^{M|\lambda|t} \max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda)|, \quad \lambda \notin \operatorname{Int} \tilde{O}(\Delta t) \tag{2.13}$$

с константами  $C_3, C_4, M$ , зависящими только от коэффициентов  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ , и с величиной  $\mu$ , зависящей еще и от  $\arg \lambda$ . Здесь  $\tilde{g}_j = \sum_{\nu=0}^k \alpha_\nu v(t_{j+\nu}) - \Delta t \lambda \sum_{\nu=0}^k \beta_\nu v(t_{j+\nu})$ ,  $0 \leq j \leq N-k$ ,  $t_\nu = \nu \Delta t$ ,  $0 \leq \nu \leq N$ , функции  $v_n(\lambda)$  определены схемой (2.1),  $v(t) = e^{\lambda t}$ .

Доказательство леммы проводится по аналогии с [3], где рассмотрен случай  $\tilde{\varepsilon} = 1/2$  [6].

**Замечание 1.** Величины  $\mu$  и  $M$  в лемме 2 определяются следующим образом. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} -\alpha_{k-1} & -\alpha_{k-2} & \dots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , — собственные значения матрицы  $B$  и  $\eta = 1 - \max_{|\lambda_j| < 1} |\lambda_j|$ . Приведем матрицу  $\eta^{-1}B$  к жордан-

новой нормальной форме  $J = D^{-1}(\eta^{-1}B)D$ . Тогда  $M = 2\|D\|_\infty \|D^{-1}\|_\infty \sum_{j=0}^{k-1} (|\beta_j| + |\alpha_j \beta_k|)$ ,  $\mu = \frac{M}{\cos \arg \lambda}$ .

Здесь  $\|D\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}^k, x \neq 0} \frac{\|Dx\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |d_{ij}|$ ,  $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ .

**Замечание 2.** Величина  $\tilde{g}_j$  в лемме 2 — это погрешность аппроксимации уравнения (2.3) разностной схемой (2.1).

Основной характеристикой разностной схемы является порядок аппроксимации  $m$ . Порядок аппроксимации схемы (2.1) зависит от ее коэффициентов и характеризует качество аппроксимации уравнения (2.3). Для схем вида (2.1) с порядком аппроксимации  $m \geq 1$  выполняется оценка [6]

$$|\tilde{g}_j| \leq C_5 \max_{t \in [0, T]} |v^{(m+1)}(t)| (\Delta t)^{m+1}, \quad 0 \leq j \leq N - k.$$

В рассматриваемом случае  $v(t) = e^{\lambda t}$  и, следовательно,  $\max_{t \in [0, T]} |v^{(m+1)}(t)| = |\lambda|^{m+1} e^{T \operatorname{Re} \lambda}$  при  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Таким образом,  $|\tilde{g}_j| \leq C_5 |\lambda|^{m+1} e^{T \operatorname{Re} \lambda} (\Delta t)^{m+1}$ ,  $0 \leq j \leq N - k$ .

Далее предполагается выполненным следующее условие.

**Условие 5.** Коэффициенты  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ , таковы, что разностная схема (2.1) имеет порядок аппроксимации  $m \geq 1$ .

Первое слагаемое в (2.12) при  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  оценивается как

$$\sum_{j=0}^{n-k} |\tilde{g}_j| \leq C_5 N |\lambda|^{m+1} e^{T \operatorname{Re} \lambda} (\Delta t)^{m+1} = C_5 T |\lambda|^{m+1} e^{T \operatorname{Re} \lambda} (\Delta t)^m \quad (2.14)$$

и имеет порядок  $m$  по  $\Delta t$ . Чтобы оценка (2.12), а значит, и оценка (2.11), имела максимальный порядок по  $\Delta t$ , требуется, чтобы порядок выражения  $\max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - e^{j\lambda\Delta t}|$  был также не меньше  $m$ . В [3] в качестве начальных условий схемы (2.1) выбирались  $v_0 = v_1 = \dots = v_{k-1} = 1$ , в результате чего для достаточно малых  $|\lambda|\Delta t$  получалась оценка с порядком 1:  $\max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - e^{j\lambda\Delta t}| \leq C_6 |\lambda|\Delta t$ . В настоящей работе функции  $v_j(\lambda)$  будем выбирать так, чтобы этот порядок был равен  $m$ . Нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть даны  $u_0, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}$ . Тогда для функции  $u(z) = (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n)(1+z)^{-n}$ , где  $a_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} \frac{n!}{s!(\nu-s)!(n-\nu+s)!} u_s$ ,  $0 \leq \nu \leq n$ , справедливы равенства  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = u_1$ ,  $\dots$ ,  $u^{(n)}(0) = u_n$ .

**Доказательство.** Заметим, что

$$\begin{aligned} \left( u_0 + u_1 z + \frac{u_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{u_n}{n!} z^n \right) (1+z)^n &= \left( \sum_{j=0}^n \frac{u_j}{j!} z^j \right) \left( \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} z^l \right) = \\ &= \sum_{\nu=0}^n \left( \sum_{s=0}^{\nu} \frac{u_s}{s!} \frac{n!}{(\nu-s)!(n-\nu+s)!} \right) z^\nu + O(z^{n+1}) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu + O(z^{n+1}), \quad z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем  $u(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{(1+z)^n} = u_0 + u_1 z + \frac{u_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{u_n}{n!} z^n + O(z^{n+1})$ . В силу единственности разложения аналитической функции в ряд Тейлора имеем  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = u_1$ ,  $\dots$ ,  $u^{(n)}(0) = u_n$ . Лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что существуют функции  $u_j(z) = P_{m-1}^{(j)}(z)(1+z)^{-m+1}$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , где  $P_{m-1}^{(j)}(z)$  — многочлены степени  $m-1$ , такие, что  $u_j(0) = 1$ ,  $u_j'(0) = j$ ,  $\dots$ ,  $u_j^{(m-1)}(0) = j^{m-1}$ . Такие же производные до  $(m-1)$ -го порядка включительно имеет функция  $e^{jz}$ , поэтому  $u_j(z) - e^{jz} = O(z^m)$  при  $z \rightarrow 0$ . Положим теперь

$$v_0(\lambda) \equiv 1, \quad v_j(\lambda) = u_j(\lambda\Delta t), \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad (2.15)$$

Тогда погрешность  $v_j(\lambda) - e^{j\lambda\Delta t}$  имеет искомым порядок относительно  $\Delta t$ :

$$\max_{1 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - e^{j\lambda\Delta t}| = O(\lambda^m (\Delta t)^m), \quad \lambda\Delta t \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Функции  $v_j(\lambda)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , имеют единственную особую точку  $\lambda = -(\Delta t)^{-1}$ , лежащую вне окрестности  $K(\varphi_0)$ , так что выполнены условия леммы 1.

Отметим, что функции  $u_j(z)$  являются рациональными аппроксимациями экспоненты  $e^{jz}$ , не имеющими полюсов в окрестности сектора  $K(\varphi_0)$ . Это свойство, обеспечивающее выполнение условий леммы 1,

отличает построенные аппроксимации, например, от аппроксимаций Паде [13]. Другая особенность функций  $u_j(z)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , состоит в том, что все они имеют единственную особую точку  $z = -1$ . Это позволяет упростить вид контура  $\tilde{\Gamma}_z$  (см. раздел 5), охватывающего особые точки таких функций.

Следуя лемме 1, будем выбирать начальные условия для схемы (1.3) следующим образом.

**Условие 6.** Начальные данные для схемы (1.3) имеют вид  $x_0 = f$ ,  $x_j = v_j(A)f$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , где функции  $v_j(\lambda)$  определены в (2.15).

Отметим, что согласно (2.2), (2.12) все функции  $v_n(\lambda)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , являются рациональными аппроксимациями экспоненты  $e^{\lambda n \Delta t}$ , а в силу леммы 1 имеем представление  $x_n = v_n(A)f$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Идея построения приближений  $x_n$  к решению абстрактной задачи Коши в такой форме использовалась различными авторами [10, 14] для корректных абстрактных задач вида  $\frac{dx}{dt} = -Ax(t)$ ,  $x(0) = f$  с оператором  $A$ , удовлетворяющим условию 1. Строятся приближения  $x_n = r^n(\Delta t A)f$ , где  $r(z)$  — рациональная аппроксимация функции  $e^{-z}$ :  $r(z) - e^{-z} = O(z^{m-1})$ ,  $z \rightarrow 0$ ,  $m \geq 1$ . Показано, что в этом случае функции  $r^n(z)$  аппроксимируют  $e^{-nz}$  с порядком  $m$ . При определенных условиях на  $r(z)$  в [10] приведена оценка для  $\|x_n - x(n\Delta t)\|$ , имеющая порядок  $m$  по  $\Delta t$ . Аналогичная оценка будет получена здесь для некорректной задачи (1.1) (см. теорему 1).

Содержательность условия 4 при описанном выборе функций  $v_j(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$  гарантирует следующее утверждение.

**Лемма 4.** При выборе  $v_j(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , согласно (2.15), любая разностная схема (2.1), удовлетворяющая условиям 2 и 3, обладает характеристическим показателем для любого угла секториальности  $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ .

**Доказательство.** Определенные выше функции  $u_j(z)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , аналитичны на бесконечности и имеют единственный полюс  $z_0 = -1$ . Сектор  $K(\varphi_0)$  находится вне окрестности этого полюса, так что функции  $u_j(z)$  ограничены при  $z \in \partial K(\varphi_0)$  и можно выбрать константу  $C_7 \geq 1$ , такую, что  $\max_{1 \leq j \leq k-1} |u_j(z)| \leq C_7 \forall z \in \partial K(\varphi_0)$ . Так как при  $\lambda \in \partial K(\varphi_0)$  точка  $\lambda \Delta t$  лежит на границе сектора  $K(\varphi_0)$ ,

то  $\max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda)| = \max \left\{ 1, \max_{1 \leq j \leq k-1} u_j(\lambda \Delta t) \right\} \leq C_7$  для всех  $\lambda \in \partial K(\varphi_0)$ . Согласно лемме 2, имеем

$$|v_n(\lambda)| \leq C_4 e^{M|\lambda|t} \max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda)| \leq C_4 C_7 e^{(M/\cos \varphi_0)t \operatorname{Re} \lambda} \quad \forall \lambda \in \partial K(\varphi_0).$$

Следовательно,  $a = M/\cos \varphi_0$  есть характеристический показатель. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основного результата данного раздела.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия 1–6. Тогда для погрешности разностной схемы (1.3) справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_7 \left( \ln^{m+1} \frac{1}{\Delta t} \right) (\Delta t)^{m(T_1 - aT)/(T_1 - aT + (\mu+1)T)}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (2.17)$$

**Доказательство.** По схеме доказательства теорем 1 и 2 из [3], разобьем контур интегрирования в (2.11) на части:  $\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda) = \{\lambda \in \Gamma(\varphi_0, r_0) : \operatorname{Re} \lambda < \Lambda\}$  и  $\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda) = \{\lambda \in \Gamma(\varphi_0, r_0) : \operatorname{Re} \lambda \geq \Lambda\}$ . Величина  $\Lambda$  здесь может зависеть от  $\Delta t$ . Ниже предполагается, что  $\Lambda \rightarrow +\infty$  и  $\Lambda \Delta t \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Способ выбора  $\Lambda = \Lambda(\Delta t)$  будет далее уточнен.

Запишем (2.11) в виде

$$\begin{aligned} \|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_2 & \left( \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda} |v_n(\lambda) - e^{\lambda t}|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda)| e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-(T_1 - t) \operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пользуясь (2.12), оценим величину  $|v_n(\lambda) - e^{\lambda t}|$  в правой части (2.18). В силу (2.16) выполняется неравенство

$$\max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - e^{j\lambda \Delta t}| \leq C_6 |\lambda|^m (\Delta t)^m \quad (2.19)$$

для таких  $\lambda \in \mathbb{C}$ , при которых величина  $|\lambda|\Delta t$  мала. В частности, неравенство (2.19) справедливо для  $\lambda \in \Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$  при достаточно малом  $\Delta t$ . Подставляя (2.14) и (2.19) в (2.12), получаем

$$|v_n(\lambda) - e^{\lambda t}| \leq C_7 e^{\mu T \operatorname{Re} \lambda} (|\lambda|^{m+1} e^{T \operatorname{Re} \lambda} (\Delta t)^m + |\lambda|^m (\Delta t)^m). \quad (2.20)$$

В (2.20) имеем  $|\lambda| \leq \frac{\Lambda}{\cos \varphi_0}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \leq \Lambda$  и  $\Lambda(\Delta t) \rightarrow +\infty$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , тогда

$$|v_n(\lambda) - e^{\lambda t}| \leq C_8 e^{(\mu+1)T\Lambda} \Lambda^{m+1} (\Delta t)^m, \quad \lambda \in \Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$$

для достаточно малых  $\Delta t$ . Приходим к следующей оценке первого слагаемого в (2.18):

$$\int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda} |v_n(\lambda) - e^{\lambda t}|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq C_8 e^{(\mu+1)T\Lambda} \Lambda^{m+1} (\Delta t)^m \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda|.$$

Заметим, что

$$\int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq \frac{e^{-T_1 r_0 \cos \varphi_0}}{1 + r_0} 2\varphi_0 r_0 + 2 \int_{r_0}^{\Lambda / \cos \varphi_0} \frac{e^{-T_1 \rho \cos \varphi_0}}{1 + \rho} d\rho \leq \frac{2\varphi_0 r_0 e^{-T_1 r_0 \cos \varphi_0}}{1 + r_0} + 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{e^{-T_1 \rho \cos \varphi_0}}{1 + \rho} d\rho$$

есть величина, ограниченная сверху не зависящей от  $\Lambda$  константой. Окончательно получаем

$$\int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda} |v_n(\lambda) - e^{\lambda t}|}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq C_9 e^{(\mu+1)T\Lambda} \Lambda^{m+1} (\Delta t)^m. \quad (2.21)$$

Выберем произвольно  $\tilde{T} \in (aT, T_1)$ , где  $a$  — характеристический показатель, и оценим второе слагаемое в правой части (2.18) с помощью неравенства (2.6):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda)| e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| &\leq C_1 \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{(at-T_1)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq \\ &\leq C_1 \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{(at-\tilde{T})\operatorname{Re} \lambda} e^{(\tilde{T}-T_1)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq C_1 e^{-(T_1-\tilde{T})\Lambda} \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-(\tilde{T}-aT)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda|. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается и третье слагаемое:

$$\int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-(T_1-t)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq e^{-(T_1-\tilde{T})\Lambda} \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-(\tilde{T}-t)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq e^{-(T_1-\tilde{T})\Lambda} \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-(\tilde{T}-aT)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda|.$$

Здесь

$$\int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-(\tilde{T}-aT)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| = 2 \int_{\Lambda / \cos \varphi_0}^{+\infty} \frac{e^{-(\tilde{T}-aT)\rho \cos \varphi_0}}{1 + \rho} d\rho \leq 2 \int_{\Lambda / \cos \varphi_0}^{+\infty} e^{-(\tilde{T}-aT)\rho \cos \varphi_0} d\rho = \frac{2}{(\tilde{T}-aT) \cos \varphi_0} e^{-(\tilde{T}-aT)\Lambda}.$$

Таким образом,  $\int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda)| e^{-T_1 \operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq C_{10} e^{-(T_1-aT)\Lambda}$ ,  $\int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{e^{-(T_1-t)\operatorname{Re} \lambda}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq C_{11} e^{-(T_1-aT)\Lambda}$ .

Подставляя эти оценки вместе с (2.21) в (2.18) и оценивая величину  $t = n\Delta t$  сверху константой  $T$ , получим

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq f_1(\Lambda), \quad f_1(\Lambda) = C_{12} \left( e^{(\mu+1)T\Lambda} \Lambda^{m+1} (\Delta t)^m + e^{-(T_1-aT)\Lambda} \right). \quad (2.22)$$

Выбирая  $\Lambda(\Delta t) = \frac{1}{(T_1 - aT) + (\mu + 1)T} \ln \frac{T_1 - aT}{(\Delta t)^m}$ , приходим к оценке (2.17). Аналогично [3] убеждаемся, что нижняя граница для всех оценок величины  $\|x_n - x(n\Delta t)\|$ , получаемых из (2.22) при соответствующем выборе зависимости  $\Lambda = \Lambda(\Delta t)$ , имеет вид  $f_1(\Lambda(\Delta t)) > C_{11} (\Delta t)^{m(T_1 - aT) / ((T_1 - aT) + (\mu + 1)T)}$ . Значит, оценка (2.17) не допускает существенного улучшения. Теорема доказана.

Из (2.12) и (2.14) видно, что если вместо (2.19) мы имели бы любую другую оценку величины  $\max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - e^{j\lambda\Delta t}|$ , то принятая нами схема рассуждений не привела бы к итоговой оценке скорости сходимости разностной схемы (1.3), которая была бы лучше, чем (2.17). Это значит, что выбор функций  $v_j(\lambda)$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , согласно (2.15) является оптимальным. В частности, в работе [3], где рассматривался простейший выбор  $v_j(\lambda) \equiv 1$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ , вместо (2.17) были получены худшие по порядку  $\Delta t$  оценки

$$\begin{aligned} \|x_n - x(n\Delta t)\| &\leq C_{14}(\Delta t)^{(T_1-aT)/(T_1-aT+(\mu+1)T)} \ln^2 \frac{1}{\Delta t}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad m = 1; \\ \|x_n - x(n\Delta t)\| &\leq C_{14}(\Delta t)^{(T_1-aT)/(T_1-aT+(\mu+1)T)}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad m > 1. \end{aligned}$$

В [3] изучался также случай, когда искомое решение  $x(t)$  вместо условия 4 (условия продолжимости) удовлетворяет следующему более слабому условию истокопредставимости.

**Условие 4а.** Элемент  $x(T)$  допускает истокообразное представление  $x(T) = A^{-p}w$  с некоторыми  $p \geq 1$ ,  $w \in X$ .

Следующая теорема устанавливает оценку скорости сходимости разностной схемы (1.3) для этого случая; в отличие от [3], при этом используется описанный выше оптимальный выбор начальных данных  $x_j = v_j(A)f$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ .

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия 1-3, 4а, 5, 6 и характеристический показатель  $a = 1$ . Тогда для погрешности разностной схемы (1.3) справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{15} \ln^{-p} \frac{1}{\Delta t}, \quad 0 \leq n \leq N. \tag{2.23}$$

Здесь и далее константы  $C_i$ , вообще говоря, зависят от  $p$  и  $\|w\|$ . Доказательство теоремы 2, проводимое аналогично [3], не приводится ввиду того, что при выполнении условия 4а вместо условия 4 оптимальный выбор функций  $v_j(\lambda)$  не позволяет улучшить оценку скорости сходимости. Оценка (2.23) не лучше установленной в [3]; кроме того, в [3] показана ее неулучшаемость в рамках принятой схемы рассуждений. Таким образом, теорема 2 приведена лишь для полноты характеристики скорости сходимости разностных схем с оптимальными начальными элементами.

**3. Анализ некоторых классов допустимых разностных схем.** Будем называть разностные схемы, удовлетворяющие условиям 2, 3, 5, допустимыми. Перейдем к описанию классов таких схем с указанием условий на их коэффициенты. Как мы видели, каждая схема характеризуется величиной верхнего индекса суммирования  $k$  в (1.3) и порядком аппроксимации  $m$ . При выделении классов будем руководствоваться следующими правилами:

- 1) из схем с фиксированным  $k$  заслуживают внимания те, у которых порядок аппроксимации  $m$  максимален, так как у них наиболее высокая скорость сходимости;
- 2) из схем с фиксированным  $m$  интерес представляют те, у которых величина  $k$  минимальна, так как они проще, а сходятся столь же быстро.

Согласно [6], величина  $m$  определяется из условий

$$\begin{aligned} E_0 = E_1 = \dots = E_m = 0, \quad E_{m+1} \neq 0, \\ E_0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j, \quad E_\nu = \sum_{j=0}^k \frac{\alpha_j(-k+j)^\nu}{\nu!} - \sum_{j=0}^k \frac{\beta_j(-k+j)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Неопределенность при  $\nu = 1$ ,  $j = k$  в (3.1) разрешается следующим образом:  $(-k+j)^{\nu-1} = 1$ . Пользуясь (3.1), приходим к выводу, что схема с  $k = 1$ ,  $m = 2$  единственна и характеризуется коэффициентами  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 0.5$  и  $\beta_1 = 0.5$ . Эта схема не удовлетворяет условию 3. Итак, допустимых схем с  $k = 1$ ,  $m = 2$  не существует. В то же время, класс допустимых схем с  $k = 1$ ,  $m = 1$  описывается следующим образом:

$$C1 : \quad \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1 - \beta_1, |\arg \beta_1| > \varphi_0.$$

Сужение этого класса, включающее схемы с вещественными коэффициентами, имеет вид

$$R1 : \quad \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1 - \beta_1, \beta_1 < 0.$$

Здесь и далее число, стоящее в конце обозначения класса схем, указывает порядок аппроксимации.



Перейдем к описанию классов схем с  $k = 2$ . Элементарно устанавливается, что допустимых схем с  $k = 2$ ,  $m = 4$  нет. Для схем с  $k = 2$ ,  $m = 3$  система уравнений (3.1) дает следующие соотношения на коэффициенты:

$$\alpha_0 = 12\beta_2 - 5, \alpha_1 = -12\beta_2 + 4, \alpha_2 = 1, \beta_0 = -5\beta_2 + 2, \beta_1 = -8\beta_2 + 4.$$

Характеристический полином из условия 2 принимает вид  $\rho(\xi) = \xi^2 + (-12\beta_2 + 4)\xi + (12\beta_2 - 5)$ . Его корни  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = 12\beta_2 - 5$ . Чтобы условие 2 было выполнено, следует наложить условия  $\left| \beta_2 - \frac{5}{12} \right| \leq \frac{1}{12}$ ,  $\beta_2 \neq \frac{1}{2}$ . Нетрудно установить, что эти требования совместимы с условием 3, если только  $\varphi_0 < \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$ . Получаем следующий класс допустимых разностных схем с  $k = 2$ ,  $m = 3$ :

$$C3: \quad \alpha_0 = 12\beta_2 - 5, \alpha_1 = -12\beta_2 + 4, \alpha_2 = 1, \beta_0 = -5\beta_2 + 2, \beta_1 = -8\beta_2 + 4, \\ \left| \beta_2 - \frac{5}{12} \right| \leq \frac{1}{12}, \beta_2 \neq \frac{1}{2}, |\arg \beta_2| > \varphi_0, \quad \varphi_0 < \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right).$$

Легко видеть, что в классе  $C3$  нет схем с вещественными коэффициентами.

Если  $\varphi_0 \geq \arctg\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$  или если нас интересуют только схемы с вещественными коэффициентами, то максимальный порядок аппроксимации схем с  $k = 2$  равен  $m = 2$ . Класс

$$C2: \quad \alpha_0 = -2\gamma_1 + 3, \alpha_1 = 2\gamma_1 - 4, \alpha_2 = 1, \beta_0 = \gamma_2 - 2, \beta_1 = 3\gamma_1 - 2\gamma_2, \\ \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1, |2\gamma_1 - 3| \leq 1, \gamma_1 \neq 1, |\arg \beta_2| > \varphi_0$$

содержит схемы с  $k = 2$ ,  $m \geq 2$  и комплексными коэффициентами, а его подкласс

$$R2: \quad \alpha_0 = -2\gamma_1 + 3, \alpha_1 = 2\gamma_1 - 4, \alpha_2 = 1, \beta_0 = \gamma_2 - 2, \\ \beta_1 = 3\gamma_1 - 2\gamma_2, \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1, \gamma_1 \in (1, 2], \gamma_2 < \gamma_1$$

состоит из схем с  $k = 2$ ,  $m = 2$  и вещественными коэффициентами. Очевидно, что  $C3 \subset C2$ , класс  $C2$  непуст при любом  $\varphi_0$  и класс  $R2$  также непуст.

Согласно теоремам 1 и 2, все допустимые разностные схемы, в том числе и схемы классов  $R1$ ,  $C1$ ,  $R2$ ,  $C2$ ,  $C3$ , пригодны для аппроксимации некорректной задачи Коши (1.1).

Выше были получены оценки скорости сходимости, общие для всех допустимых разностных схем. Теперь покажем, что для отдельных классов таких схем полученные оценки допускают уточнение. Рассмотрим сначала схемы класса  $C1$ . Будем предполагать выполненным условие истокопредставимости 4а. Пусть  $G(\zeta) = \zeta^{-p}$ . Тогда

$$x(T) = A^{-p}w = G(A)w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \lambda^{-p} R(\lambda; A)w d\lambda. \quad (3.2)$$

Согласно [3] справедливо представление

$$x_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \lambda^{-p} v_N(\lambda) e^{-T\lambda} R(\lambda; A)w d\lambda. \quad (3.3)$$

Комбинируя (3.2) с (3.3) и пользуясь неравенством (1.2), приходим к оценке

$$\|x_N - x(T)\| \leq C_{16} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1 + |\lambda|)} |d\lambda|.$$

Разобьем контур интегрирования на три части:

$$\begin{cases} \Gamma_1(\varphi_0, r_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq r_0, \arg \lambda = -\varphi_0\}, \\ \Gamma_2(\varphi_0, r_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r_0, |\arg \lambda| < \varphi_0\}, \\ \Gamma_3(\varphi_0, r_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq r_0, \arg \lambda = \varphi_0\}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\|x_N - x(T)\| \leq C_{16} \left( \int_{\Gamma_1(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1 + |\lambda|)} |d\lambda| + \int_{\Gamma_2(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1 + |\lambda|)} |d\lambda| + \int_{\Gamma_3(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1 + |\lambda|)} |d\lambda| \right). \quad (3.4)$$

Оценим интеграл по контуру  $\Gamma_2(\varphi_0, r_0)$ . Используем (2.20) с  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1 + |\lambda|)} |d\lambda| &= \frac{1}{r_0^p(1 + r_0)} \int_{\Gamma_2(\varphi_0, r_0)} e^{-T\operatorname{Re}\lambda} |v_N(\lambda) - e^{T\lambda}| |d\lambda| \leq \\ &\leq C_{17} \int_{\Gamma_2(\varphi_0, r_0)} e^{(\mu-1)T\operatorname{Re}\lambda} (r_0^2 e^{T\operatorname{Re}\lambda} \Delta t + r_0 \Delta t) |d\lambda| \leq \\ &\leq C_{17} (r_0^2 e^{\mu T r_0} + r_0 e^{|\mu-1| T r_0}) \Delta t \int_{\Gamma_2(\varphi_0, r_0)} |d\lambda| \leq C_{18} \Delta t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В интеграле в третьем слагаемом (3.4) выполним замену переменной  $\lambda = \rho e^{i\varphi_0}$  и учтем следующее из (2.2) представление  $v_N(\lambda) = \left( \frac{1 + (1 - \beta_1)\lambda\Delta t}{1 - \beta_1\lambda\Delta t} \right)^{T/(\Delta t)}$ . Получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1 + |\lambda|)} |d\lambda| &= \int_{r_0}^{+\infty} \left| \left( \frac{1 + (1 - \beta_1)\rho\Delta t e^{i\varphi_0}}{1 - \beta_1\rho\Delta t e^{i\varphi_0}} \right)^{T/(\Delta t)} e^{-T\rho e^{i\varphi_0}} - 1 \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1 + \rho)} = \\ &= \int_{r_0}^{(\Delta t)^{-1/2}} |e^{X(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1| \frac{d\rho}{\rho^p(1 + \rho)} + \int_{(\Delta t)^{-1/2}}^{+\infty} |e^{X(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1| \frac{d\rho}{\rho^p(1 + \rho)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $X(\rho, \varphi_0, \Delta t) = \frac{T}{\Delta t} g_1(\rho\Delta t e^{i\varphi_0})$ ,  $g_1(z) = \ln \frac{1 + (1 - \beta_1)z}{1 - \beta_1 z} - z$ . Имеем  $\operatorname{Re} X(\rho, \varphi_0, \Delta t) = \frac{T}{\Delta t} h_1(\rho\Delta t)$ ,

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \ln \left| \frac{1 + (1 - \beta_1)x e^{i\varphi_0}}{1 - \beta_1 x e^{i\varphi_0}} \right| - x \cos \varphi_0 = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (2(1 - \operatorname{Re} \beta_1) \cos \varphi_0 + 2\operatorname{Im} \beta_1 \sin \varphi_0)x + (1 - 2\operatorname{Re} \beta_1 + |\beta_1|^2)x^2}{1 + (2\operatorname{Im} \beta_1 \sin \varphi_0 - 2\operatorname{Re} \beta_1 \cos \varphi_0)x + |\beta_1|^2 x^2} - x \cos \varphi_0, \\ h_1'(x) &= x q_3(x) \left( 1 + (2(1 - \operatorname{Re} \beta_1) \cos \varphi_0 + 2\operatorname{Im} \beta_1 \sin \varphi_0)x + (1 - 2\operatorname{Re} \beta_1 + |\beta_1|^2)x^2 \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left( 1 + (2\operatorname{Im} \beta_1 \sin \varphi_0 - 2\operatorname{Re} \beta_1 \cos \varphi_0)x + |\beta_1|^2 x^2 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $q_3(x)$  — многочлен третьей степени с коэффициентами, зависящими от  $\beta_1$  и  $\varphi_0$ . Квадратные трехчлены внутри первых и вторых скобок в (3.7) принимают только неотрицательные значения, так как их дискриминанты равны соответственно

$$D_1 = -4((1 - \operatorname{Re} \beta_1) \sin \varphi_0 + \operatorname{Im} \beta_1 \cos \varphi_0)^2 \leq 0, \quad D_2 = -4(\operatorname{Re} \beta_1 \sin \varphi_0 + \operatorname{Im} \beta_1 \cos \varphi_0)^2 \leq 0.$$

Обозначим через  $\Omega_1(\varphi_0) \subset \mathbb{C}$  область изменения коэффициента  $\beta_1$ , при которой коэффициенты многочлена  $q_3(x)$  неположительны. В дальнейшем будем предполагать, что  $\beta_1 \in \Omega_1$ . Тогда для всех  $x \geq 0$  функция  $h_1'(x)$  может принимать только неположительные значения (в том числе и  $-\infty$ ). Так как  $h_1(0) = 0$ , то и  $h_1(x) \leq 0$  для всех  $x \geq 0$ , поэтому справедливо  $\operatorname{Re} X(\rho, \varphi_0, \Delta t) < 0$  для всех  $\rho$  и  $\Delta t > 0$ .

Оценим второе слагаемое в правой части (3.6). Имеем  $|e^{X(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1| \leq e^{\operatorname{Re} X(\rho, \varphi_0, \Delta t)} + 1 \leq 2$ , тогда

$$\int_{(\Delta t)^{-1/2}}^{+\infty} |e^{X(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1| \frac{d\rho}{\rho^p(1 + \rho)} \leq 2 \int_{(\Delta t)^{-1/2}}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{p+1}} \leq C_{19} (\Delta t)^{p/2}. \quad (3.8)$$

Перейдем к оценке первого слагаемого в (3.6). Аргумент  $\rho$  функции  $X(\rho, \varphi_0, \Delta t)$  может принимать значения из отрезка  $[r_0, (\Delta t)^{-1/2}]$ . Имеем  $g_1(0) = g_1'(0) = 0$ ,  $|g_1''(0)| < \infty$ . Так как величина  $\rho \Delta t e^{i\varphi_0}$  ограничена по модулю, то  $|g_1(\rho \Delta t e^{i\varphi_0})| \leq C_{20} |\rho \Delta t e^{i\varphi_0}|^2 \leq C_{20} \Delta t$  и, значит,  $|X(\rho, \varphi_0, \Delta t)| \leq C_{20} T$ . Поэтому с подходящей константой  $C_{21}$  выполняется

$$\left| e^{X(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1 \right| \leq C_{21} |X(\rho, \varphi_0, \Delta t)| \leq \frac{C_{21} T}{\Delta t} |g_1(\rho, \varphi_0, \Delta t)| \leq \frac{C_{20} C_{21} T}{\Delta t} |\rho \Delta t e^{i\varphi_0}|^2 \leq C_{22} \rho^2 \Delta t.$$

С учетом полученного неравенства первое слагаемое правой части (3.6) оценивается следующим образом:

$$\int_{r_0}^{(\Delta t)^{-1/2}} \left| e^{X(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1 \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)} \leq \begin{cases} C_{23} (\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2; \\ C_{23} \Delta t \ln\left(\frac{1}{\Delta t}\right), & p = 2; \\ C_{23} \Delta t, & p > 2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Подставляя (3.8), (3.9) в (3.6), получим

$$\int_{\Gamma_3(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda) e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p (1+|\lambda|)} |d\lambda| \leq \begin{cases} C_{24} (\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2; \\ C_{24} \Delta t \ln\left(\frac{1}{\Delta t}\right), & p = 2; \\ C_{24} \Delta t, & p > 2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Оценка (3.10) установлена в предположении  $\beta_1 \in \Omega_1(\varphi_0)$ .

Из соображений симметрии ясно, что справедлива аналогичная оценка и для интеграла по контуру  $\Gamma_1(\varphi_0, r_0)$  в (3.4), если  $\beta_1 \in \Omega_1^-(\varphi_0)$ , где  $\Omega_1^-(\varphi_0) = \{z \in \mathbb{C} | \bar{z} \in \Omega_1(\varphi_0)\}$ . Комбинируя (3.4), (3.5) и (3.10), при  $\beta_1 \in \Omega_1(\varphi_0) \cap \Omega_1^-(\varphi_0)$  приходим к соотношению

$$\|x_N - x(T)\| \leq \begin{cases} C_{25} (\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2; \\ C_{25} \Delta t \ln\left(\frac{1}{\Delta t}\right), & p = 2; \\ C_{25} \Delta t, & p > 2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Получим теперь оценку для  $\|x_n - x(n\Delta t)\|$ , равномерную по  $0 \leq n \leq N$ . Для  $n = 0$  указанная норма равна нулю. Для  $0 < n < N$  будем рассматривать задачу (1.1) на отрезке  $[0, n\Delta t]$ . В соответствии с изучаемым методом решения этой задачи, разобьем указанный отрезок на  $n$  частей длиной  $\Delta t$  и применим выбранную схему класса C1. При этом все вышеприведенные формулы остаются в силе с заменой  $N$  на  $n$  и  $T$  на  $t = n\Delta t$ . Пояснений требует лишь обоснование условия 4а для такой задачи. Согласно (2.7), при  $0 < n < N$  выполняется

$$\begin{aligned} x(n\Delta t) &= U_{-A}(T-t)x(T) = U_{-A}(T-t)A^{-p}w = \\ &= F_{T-t}(A)G(A)w = G(A)F_{T-t}(A)w = A^{-p}\tilde{w}, \quad \tilde{w} = F_{T-t}(A)w. \end{aligned}$$

Отсюда следует выполнение условия 4а. Напомним, что  $F_t(\zeta) = e^{-\zeta t}$  и  $G(\zeta) = \zeta^{-p}$ . Таким образом, для любого  $0 \leq n \leq N$  справедлива оценка вида (3.11) с константами  $C_{25} = C_{25}(n, N)$ , при этом  $C_{25}(N, N)$  не зависит от  $N$ . Анализируя предыдущие рассуждения, видим, что  $C_{25}(n, N)$  зависит только от  $\|\tilde{w}(t)\|$ , где  $\tilde{w}(t) = \tilde{w}(nT/N) = U_{-A}(T-t)w$ . Из сильной непрерывности полугруппы  $U_{-A}$  следует ограниченность  $\|\tilde{w}(t)\|$  при  $t \in [0, T]$ , а отсюда, в свою очередь, вытекает оценка  $C_{25}(n, N) \leq C_{26}$ , где  $C_{26}$  не зависит от  $n$  и  $N$ . Приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия 1 и 4а и для решения задачи (1.1) применяется разностная схема класса C1 с  $\beta_1 \in \Omega_1(\varphi_0) \cap \Omega_1^-(\varphi_0)$ . Тогда при  $0 \leq n \leq N$  справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_{26} (\Delta t)^{p/2}, & 1 \leq p < 2; \\ C_{26} \Delta t \ln\left(\frac{1}{\Delta t}\right), & p = 2; \\ C_{26} \Delta t, & p > 2. \end{cases} \quad (3.12)$$

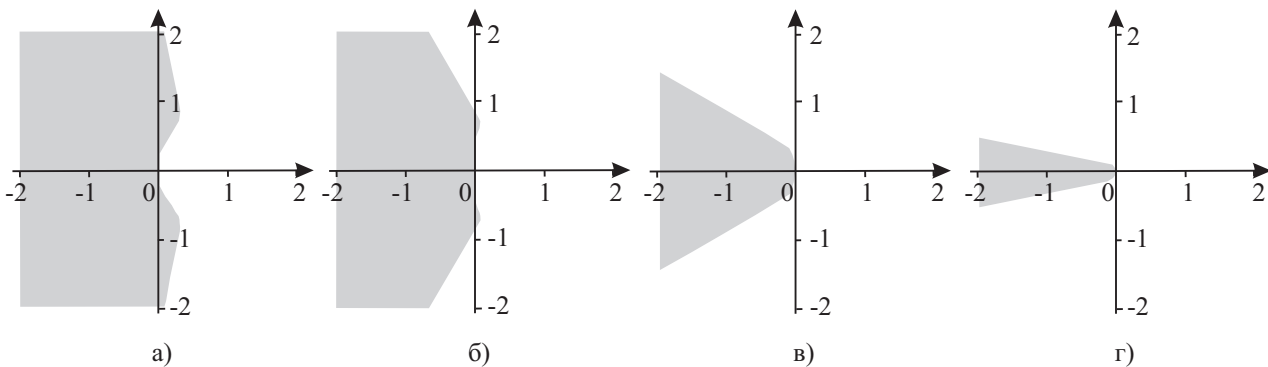
Расчеты, проведенные в системе компьютерной алгебры Maple 15, позволяют приближенно определить форму области  $\Omega_1(\varphi_0) \cap \Omega_1^-(\varphi_0)$  (см. рисунок).

**Следствие 1.** Пусть выполнены условие 1 с  $\varphi_0 < \pi/4$  и условие 4а. Пусть для решения задачи (1.1) применяется разностная схема класса R1. Тогда справедлива оценка (3.12).

**Доказательство.** Достаточно показать, что при  $\varphi_0 < \pi/4$  полуось  $\beta_1 < 0$ , характеризующая схемы класса R1, принадлежит  $\Omega_1(\varphi_0)$ . Для вещественных  $\beta_1$  многочлен  $q_3(x)$  имеет вид

$$q_3(x) = ((-1 + 2\beta_1) \cos 2\varphi_0) + \left( (-1 + \beta_1 - \beta_1^2) \cos \varphi_0 + (4\beta_1 - 4\beta_1^2) \cos^3 \varphi_0 \right) x + \left( (2\beta_1 - 6\beta_1^2 + 4\beta_1^3) \cos^2 \varphi_0 \right) x^2 + \left( (-\beta_1^2 + 2\beta_1^3 - \beta_1^4) \cos \varphi_0 \right) x^3.$$

Как видим, при  $\varphi_0 < \pi/4$  и  $\beta_1 < 0$  все его коэффициенты отрицательны. Утверждение доказано.



Область изменения параметра  $\beta_1$  схемы класса C1: а)  $\varphi_0 = 0.1$ , б)  $\varphi_0 = \pi/12$ , в)  $\varphi_0 = \pi/6$ , г)  $\varphi_0 = \pi/4 - 0.1$

Исследуем теперь скорость сходимости схем класса R2. Будем предполагать выполненными условия 1, 4а и 6. Тогда соотношение (3.4) остается справедливым, а оценка (3.5) заменяется на

$$\int_{\Gamma_2(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1 + |\lambda|)} |d\lambda| \leq C_{27}(\Delta t)^2. \tag{3.13}$$

Для нахождения  $v_N(\lambda)$  решается рекуррентное уравнение вида (2.2) при  $v_0(\lambda) = 1$ ,  $v_1(\lambda) = \frac{1 + 2\lambda\Delta t}{1 + \lambda\Delta t}$ :

$$v_{n+2}(\lambda) = \frac{(2\gamma_1 - 3) + (\gamma_2 - 2)\lambda\Delta t}{1 + (\gamma_1 - \gamma_2)\lambda\Delta t} v_n(\lambda) + \frac{(-2\gamma_1 + 4) + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)\lambda\Delta t}{1 + (\gamma_1 - \gamma_2)\lambda\Delta t} v_{n+1}(\lambda).$$

Решение имеет вид  $v_N(\lambda) = \tilde{M}(\lambda\Delta t)\tilde{X}^{T/\Delta t}(\lambda\Delta t) + (1 - \tilde{M}(\lambda\Delta t))\tilde{Y}^{T/\Delta t}(\lambda\Delta t)$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z) &= \frac{(2 + 4z)(1 + (\gamma_1 - \gamma_2)z) - (1 + z) \left( (-2\gamma_1 + 4) + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)z - \sqrt{q_2(z)} \right)}{2(1 + z)\sqrt{q_2(z)}}, \\ \tilde{X}(z) &= \frac{(-2\gamma_1 + 4) + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)z + \sqrt{q_2(z)}}{2(1 + (\gamma_1 - \gamma_2)z)}, \quad \tilde{Y}(z) = \frac{(-2\gamma_1 + 4) + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)z - \sqrt{q_2(z)}}{2(1 + (\gamma_1 - \gamma_2)z)}, \\ q_2(z) &= 4(\gamma_1 - 1)^2 + 4(\gamma_1 - 1)(2 - \gamma_1)z + (9\gamma_1^2 - 8\gamma_1\gamma_2 - 8\gamma_1 + 8\gamma_2)z^2. \end{aligned}$$

Здесь и далее выбирается ветвь квадратного корня, определенная на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси условием  $\sqrt{1} = 1$ .

Получим оценку третьего слагаемого в (3.4):

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| &= \int_{r_0}^{+\infty} \left( \widetilde{M}(\rho\Delta te^{i\varphi_0}) \widetilde{X}^{T/\Delta t}(\rho\Delta te^{i\varphi_0}) + \right. \\
&+ \left. \left(1 - \widetilde{M}(\rho\Delta te^{i\varphi_0})\right) \widetilde{Y}^{T/\Delta t}(\rho\Delta te^{i\varphi_0}) \right) e^{-T\rho e^{i\varphi_0}} - 1 \left| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)} \right| \leq \\
&\leq \int_{r_0}^{(\Delta t)^{-2/3}} \left| e^{\widehat{X}(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1 \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)} + \int_{(\Delta t)^{-2/3}}^{+\infty} \left| e^{\widehat{X}(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1 \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)} + \\
&+ \int_{r_0}^{+\infty} \left| e^{-T\rho e^{i\varphi_0}} \left(1 - \widetilde{M}(\rho\Delta te^{i\varphi_0})\right) \widetilde{Y}^{T/\Delta t}(\rho\Delta te^{i\varphi_0}) \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь  $\widehat{X}(\rho, \varphi_0, \Delta t) = \frac{T}{\Delta t} g_2(\rho\Delta te^{i\varphi_0}) + g_3(\rho\Delta te^{i\varphi_0})$ ,  $g_2(z) = \ln \frac{(-2\gamma_1 + 4) + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)z + \sqrt{q_2(z)}}{2(1 + (\gamma_1 - \gamma_2)z)} - z$ ,  $g_3(z) = \ln \widetilde{M}(z)$ . Имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \widehat{X}(\rho, \varphi_0, \Delta t) &= \frac{T}{\Delta t} h_2(\rho\Delta t) + h_3(\rho\Delta t), \\
h_2(x) &= \ln \left| \frac{(-2\gamma_1 + 4) + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)xe^{i\varphi_0} + \sqrt{q_2(xe^{i\varphi_0})}}{2(1 + (\gamma_1 - \gamma_2)xe^{i\varphi_0})} \right| - x \cos \varphi_0 = L_{\varphi_0}(x) - x \cos \varphi_0, \\
h_3(x) &= \ln \left| \frac{(2 + 4xe^{i\varphi_0})(1 + (\gamma_1 - \gamma_2)xe^{i\varphi_0})}{2(1 + xe^{i\varphi_0})\sqrt{q_2(xe^{i\varphi_0})}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1 + xe^{i\varphi_0}) \left( (-2\gamma_1 + 4) + (3\gamma_1 - 2\gamma_2)xe^{i\varphi_0} - \sqrt{q_2(xe^{i\varphi_0})} \right)}{2(1 + xe^{i\varphi_0})\sqrt{q_2(xe^{i\varphi_0})}} \right|.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Нетрудно видеть, что  $L_{\varphi_0}(x)$  — ограниченная функция аргумента  $x > 0$ , а потому  $h_2(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $h_2(x) < 0$  при  $x > (\cos \varphi_0)^{-1} \sup_{x>0} L_{\varphi_0}(x)$ . Пусть  $\Omega_2(\varphi_0) \subset \mathbb{R}^2$  — область изменения параметров  $\gamma_1, \gamma_2$ , при которых  $h_2(x) < 0 \quad \forall x \in \left(0, (\cos \varphi_0)^{-1} \sup_{\xi>0} L_{\varphi_0}(\xi)\right)$  и, стало быть,  $h_2(x) < 0$  для всех  $x > 0$ . Далее предполагаем, что  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Omega_2(\varphi_0)$ . Подробное исследование формы области  $\Omega_2(\varphi_0)$  выходит за рамки данной работы; вычисления в среде Maple 15 позволяют утверждать, что эта область непуста при  $\varphi_0 \leq \pi/6$ . Проведенные численные эксперименты дают основание предположить, что область  $\Omega_2(\varphi_0)$  содержит все допустимые пары  $(\gamma_1, \gamma_2)$ .

В формуле (3.16) знаменатель не обращается в нуль при  $x > 0$ . Действительно,  $q_2(z)$  — квадратный трехчлен с вещественными положительными коэффициентами, поэтому он может иметь только корни с отрицательной вещественной частью. Теперь элементарно устанавливается, что функция  $h_3(x)$  ограничена при  $x > 0$ . В связи с этим из (3.15) следует ограниченность  $\operatorname{Re} \widehat{X}(\rho, \varphi_0, \Delta t)$ . Подобно (3.8) получаем

$$\int_{(\Delta t)^{-2/3}}^{+\infty} \left| e^{\widehat{X}(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1 \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)} \leq C_{28}(\Delta t)^{2p/3}. \tag{3.17}$$

Так как  $h_2(0) = h_2'(0) = h_2''(0) = 0$ ,  $|h_2'''(0)| < \infty$ ,  $h_3(0) = h_3'(0) = 0$ ,  $|h_3''(0)| < \infty$ , по аналогии с (3.9) находим

$$\int_{r_0}^{(\Delta t)^{-2/3}} \left| e^{\widehat{X}(\rho, \varphi_0, \Delta t)} - 1 \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)} \leq \begin{cases} C_{29}(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3; \\ C_{29}(\Delta t)^2 \ln\left(\frac{1}{\Delta t}\right), & p = 3; \\ C_{29}(\Delta t)^2, & p > 3. \end{cases} \tag{3.18}$$

Обозначим через  $\Omega_3(\varphi_0) \subset \mathbb{R}^2$  область изменения  $\gamma_1, \gamma_2$ , когда  $\sup_{x>0} \left| \tilde{Y}(xe^{i\varphi_0}) \right| < 1$ . Далее предполагается, что  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Omega_3(\varphi_0)$ . В настоящей работе не исследуется форма области  $\Omega_3(\varphi_0)$ ; вычисления в системе Maple 15 позволяют установить, что эта область непуста, и предположить, что в нее входят все допустимые пары  $(\gamma_1, \gamma_2)$ ,  $\gamma_1 \neq 2$ . При данном ограничении легко устанавливается оценка

$$\int_{r_0}^{+\infty} \left| e^{-T\rho e^{i\varphi_0}} \left( 1 - \tilde{M}(\rho\Delta t e^{i\varphi_0}) \right) \tilde{Y}^{T/\Delta t}(\rho\Delta t e^{i\varphi_0}) \right| \frac{d\rho}{\rho^p(1+\rho)} \leq C_{30} \tilde{C}^{T/\Delta t}, \quad \tilde{C} \in (0, 1). \quad (3.19)$$

Подставляя (3.17), (3.18) и (3.19) в (3.14), получаем оценку третьего слагаемого в (3.4):

$$\int_{\Gamma_3(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_N(\lambda)e^{-T\lambda} - 1|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \leq \begin{cases} C_{31}(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3; \\ C_{31}(\Delta t)^2 \ln\left(\frac{1}{\Delta t}\right), & p = 3; \\ C_{31}(\Delta t)^2, & p > 3. \end{cases}$$

Аналогичная оценка справедлива и для первого слагаемого; комбинируя ее с (3.13), аналогично (3.12) получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия 1, 4а, 6 и для решения задачи (1.1) применяется разностная схема класса R2 с  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Omega_2(\varphi_0) \cap \Omega_3(\varphi_0)$ . Тогда при  $0 \leq n \leq N$  справедлива оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq \begin{cases} C_{32}(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \leq p < 3; \\ C_{32}(\Delta t)^2 \ln\left(\frac{1}{\Delta t}\right), & p = 3; \\ C_{32}(\Delta t)^2, & p > 3. \end{cases}$$

Теоремы 3 и 4 устанавливают полиномиальные оценки скорости сходимости для схем классов C1 и R2 при условии истокорпредставимости 4а, тем самым уточняя логарифмическую оценку из теоремы 2, справедливую для всех допустимых схем.

**4. Алгоритм нахождения характеристического показателя.** Рассмотрим следующий класс разностных схем с вещественными коэффициентами:

$$A: \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq j \leq k; \quad \alpha_j < 0, \quad 0 \leq j \leq k-1.$$

Для схем этого класса будет построен алгоритм нахождения характеристического показателя, зачастую дающий меньшие значения  $a$ , чем при использовании леммы 4 и замечания 1. Практический интерес представляют подклассы  $A1 = A \cap R1$  и  $A2 = A \cap R2$  класса  $A$ , состоящие только из допустимых схем. Первый из них совпадает с  $R1$ , второй описывается следующим образом:

$$A2: \quad \alpha_0 = -2\gamma_1 + 3, \quad \alpha_1 = 2\gamma_1 - 4, \quad \alpha_2 = 1, \\ \beta_0 = \gamma_2 - 2, \quad \beta_1 = 3\gamma_1 - 2\gamma_2, \quad \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_1 \in (1.5, 2), \quad \gamma_2 < \gamma_1.$$

По аналогии с [9] докажем следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 5.** Пусть  $\eta_j(z) = \frac{\beta_j z - \alpha_j}{1 - \beta_k z}$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $S(a; z) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} |\eta_j(z)| e^{-(k-j)a \operatorname{Re} z}$ . Если при некотором  $a \geq 1$  выполняется  $S(a; xe^{i\varphi_0}) \geq 0$  для всех  $x \geq 0$ , то  $a$  есть характеристический показатель.

**Доказательство.** Отметим, что  $S(a; xe^{i\varphi_0}) = S(a; xe^{-i\varphi_0})$ , поскольку

$$\left| \eta_j(xe^{i\varphi_0}) \right| = \left| \eta_j(xe^{-i\varphi_0}) \right| = \sqrt{\frac{\alpha_j^2 - 2\alpha_j\beta_j x \cos \varphi_0 + \beta_j^2 x^2}{1 - 2\beta_k x \cos \varphi_0 + \beta_k^2 x^2}}, \quad 0 \leq j \leq k-1. \quad (4.1)$$

Таким образом,

$$S(a; \lambda\Delta t) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \partial K(\varphi_0), \quad \Delta t > 0. \quad (4.2)$$

Пусть  $W_n(\lambda)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , — решение разностного уравнения  $W_{n+k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} |\eta_j(\lambda \Delta t)| W_{n+j}(\lambda)$ ,  $W_j(\lambda) = v_j(\lambda)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ .

Покажем, что  $|v_n(\lambda)| \leq W_n(\lambda)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , где  $v_n(\lambda)$  — решение разностного уравнения (2.1) с начальными данными  $v_j(\lambda)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , выбранными согласно (2.15). Для этого перепишем (2.2) в виде

$$v_{n+k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j(\lambda \Delta t) v_{n+j}(\lambda), \quad 0 \leq n \leq N-k, \quad \text{тогда требуемое неравенство доказывается по индукции.}$$

Положим  $\mathcal{E}_n(\lambda) = D e^{(na \operatorname{Re} \lambda) \Delta t} - W_n(\lambda)$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Константу  $D$  здесь следует выбрать так, чтобы  $\mathcal{E}_j(\lambda) \geq 0$  для всех  $\lambda \in \partial K(\varphi_0)$ ; это возможно в силу выбора функций  $W_j(\lambda)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ .

$$\text{Тогда } \mathcal{E}_{n+k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} |\eta_j(\lambda \Delta t)| \mathcal{E}_{n+j} + D e^{(n+k)(a \operatorname{Re} \lambda) \Delta t} S(a; \lambda \Delta t). \quad \text{С учетом (4.2) получаем } \mathcal{E}_{n+k}(\lambda) \geq 0$$

для всех  $\lambda \in \partial K(\varphi_0)$ . Следовательно,  $|v_n(\lambda)| \leq W_n(\lambda) \leq D e^{(na \operatorname{Re} \lambda) \Delta t}$ , и, значит, величина  $a$  есть характеристический показатель. Лемма доказана.

Пусть дана допустимая разностная схема класса  $A$ . Опираясь на лемму 5, укажем способ нахождения характеристического показателя по ее коэффициентам и углу секториальности  $\varphi_0$ . При фиксированном  $a \geq 1$  обозначим  $\Psi(x) = S(a; x e^{i\varphi_0})$ .

$$\text{Из условия 5 и представления (3.1) следует } \Psi(0) = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = \sum_{j=0}^k \alpha_j = 0.$$

Пользуясь представлением (4.1), получаем

$$\Psi(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{\phi_j(x)}, \quad \phi_j(x) = \frac{\alpha_j^2 - 2\alpha_j \beta_j x \cos \varphi_0 + \beta_j^2 x^2}{1 - 2\beta_k x \cos \varphi_0 + \beta_k^2 x^2} e^{-2(k-j)ax \cos \varphi_0}, \quad (4.3)$$

$$\phi'_j(x) = \frac{2(k-j)(\cos \varphi_0) e^{-2(k-j)ax \cos \varphi_0} (\alpha_j^2 - 2\alpha_j \beta_j x \cos \varphi_0 + \beta_j^2 x^2)}{1 - 2\beta_k x \cos \varphi_0 + \beta_k^2 x^2} (Q_j(x) - a), \quad (4.4)$$

где дробно-рациональная функция

$$Q_j(x) = \frac{(\beta_j^2 x - \alpha_j \beta_j \cos \varphi_0)(1 - 2\beta_k x \cos \varphi_0 + \beta_k^2 x^2)}{(k-j)(\cos \varphi_0)(\alpha_j^2 - 2\alpha_j \beta_j x \cos \varphi_0 + \beta_j^2 x^2)(1 - 2\beta_k x \cos \varphi_0 + \beta_k^2 x^2)} - \frac{(\alpha_j^2 - 2\alpha_j \beta_j x \cos \varphi_0 + \beta_j^2 x^2)(\beta_k^2 x - \beta_k \cos \varphi_0)}{(k-j)(\cos \varphi_0)(\alpha_j^2 - 2\alpha_j \beta_j x \cos \varphi_0 + \beta_j^2 x^2)(1 - 2\beta_k x \cos \varphi_0 + \beta_k^2 x^2)} \quad (4.5)$$

не зависит от  $a$ . Принимая во внимание, что  $\alpha_j \neq 0$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , легко установить, что знаменатель последней дроби положителен для всех  $x \geq 0$ . Поэтому функция  $Q_j(x)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ . Кроме того, из  $\beta_k \neq 0$  следует, что  $Q_j(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  вне зависимости от того, равен ли нулю коэффициент  $\beta_j$ . Таким образом, функции  $Q_j(x)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , ограничены на  $[0, +\infty)$ .

При  $a \geq \max\left\{1, \max_{0 \leq j \leq k-1} \sup_{x>0} Q_j(x)\right\}$  согласно (4.4) будем иметь  $\phi'_j(x) \leq 0$  для всех  $x \geq 0$ . Из (4.3) следует, что функция  $\Psi(x)$  не убывает на  $[0, +\infty)$ . Так как  $\Psi(0) = 0$ , то  $\Psi(x) = S(a; x e^{i\varphi_0}) \geq 0$  для всех  $x \geq 0$ . Применяя лемму 5, видим, что  $a$  есть характеристический показатель. Мы доказали следующую теорему.

**Теорема 5.** Для допустимых схем класса  $A$  любое число  $a \geq \max\left\{1, \max_{0 \leq j \leq k-1} \sup_{x>0} Q_j(x)\right\}$ , где функции  $Q_j(x)$  определены в (4.5), является характеристическим показателем.

**Следствие 2.** При  $\varphi_0 \leq \pi/4$  схемы класса  $R1$  имеют характеристический показатель  $a = 1$ .

**Доказательство.** Выше мы отмечали, что все схемы класса  $R1$  принадлежат классу  $A$ . Имеем

$$Q_0(x) = \frac{(\beta_1^2 - \beta_1)x^2 \cos \varphi_0 + (1 - 2\beta_1)x + \cos \varphi_0}{((1 - \beta_1)^2 x^2 + 2(1 - \beta_1)x \cos \varphi_0 + 1)(\beta_1^2 x^2 - 2\beta_1 x \cos \varphi_0 + 1) \cos \varphi_0}.$$

Дифференцирование этой дроби дает

$$Q'_0(x) = \frac{q_5(x)}{((1 - \beta_1)^2 x^2 + 2(1 - \beta_1)x \cos \varphi_0 + 1)^2 (\beta_1^2 x^2 - 2\beta_1 x \cos \varphi_0 + 1)^2 \cos^2 \varphi_0},$$

где  $q_5(x)$  — многочлен пятой степени, все коэффициенты которого неположительны при  $\varphi_0 \leq \pi/4$ . Поэтому  $Q'_0(x) \leq 0$  при  $x \geq 0$ , а так как  $Q_0(0) = 1$ , то  $Q_0(x) \leq 1$  при  $x \geq 0$ . Применяя теорему 5, получаем, что  $a = 1$  есть характеристический показатель, что и требовалось. При  $\beta_1 = -1$  данный результат был отмечен в [2].

Теперь у нас имеется два способа отыскания характеристического показателя, позволяющие получить соответственно значения  $a_1$  и  $a_2$ . Первый способ предполагает вычисление константы  $M$  по алгоритму, изложенному в замечании 1, и последующее применение леммы 4. Второй способ состоит в использовании теоремы 5, причем для оценки величин  $\sup_{x>0} Q_j(x)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , можно применять системы компьютерной математики, такие как Maple. На практике в условии 4 следует использовать характеристический показатель  $a = \min\{a_1, a_2\}$ . Опыт расчетов показывает, что описанные методы дополняют друг друга в том смысле, что для различных схем класса  $A$  может выполняться как  $a_1 > a_2$ , так и  $a_2 > a_1$ .

**Пример 1.** Для схемы класса  $A_2$  с параметрами  $\gamma_1 = 1.75$ ,  $\gamma_2 = -3$  при  $\varphi_0 = \pi/4$  выполняется  $a_1 \approx 158.39$ ,  $a_2 \approx 17.75$ , т.е.  $a_1 > a_2$ . В то же время, для схемы класса  $A_2$  с параметрами  $\gamma_1 = 1.95$ ,  $\gamma_2 = 1.9$  при том же значении угла секториальности справедливо  $a_1 \approx 13.10$ ,  $a_2 \approx 20.45$ ,  $a_2 > a_1$ .

**5. Случай приближенных начальных данных.** Обратимся к практически важному случаю, когда элемент  $f$  в задаче (1.1) известен приближенно. Будем считать, что вместо самого этого элемента задано некоторое его приближение  $f_\delta \in X$ , причем  $\|f_\delta - f\| \leq \delta$  с известным уровнем погрешности  $\delta > 0$ . В [3] показано, что разностные схемы (1.3) при определенных условиях регуляризуют некорректную задачу (1.1). Регуляризирующим оператором является отображение  $R(f_\delta, \delta) = x_{N(\delta)}(f_\delta)$ , где  $x_{N(\delta)}(f_\delta)$  — приближение, получаемое согласно (1.3) с шагом  $\Delta t = T/N(\delta)$  при специальном выборе зависимости  $N = N(\delta)$ . В [3] получены соответствующие оценки погрешности в случае простейшего выбора начальных элементов разностной схемы  $x_j = f_\delta$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ . Ниже будут установлены аналоги этих оценок при описанном в условии 6 оптимальном выборе начальных элементов с заменой  $f$  на  $f_\delta$ :  $x_0 = f_\delta$ ,  $x_j = v_j(A)f_\delta$ ,  $1 \leq j \leq k-1$ .

Для погрешности аппроксимации элемента  $x(n\Delta t)$  имеет место оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| = \|v_n(A)f_\delta - x(n\Delta t)\| \leq \|v_n(A)\|\delta + \|v_n(A)f - x(n\Delta t)\|. \tag{5.1}$$

В условиях теоремы 1 второе слагаемое в (5.1) оценивается согласно (2.17). Если же выполнены условия теоремы 2, то это слагаемое оценивается в соответствии с (2.23).

Напомним, что функция от оператора  $v_n(A)$  определяется по формуле (2.4), где  $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(\Delta t)$  при каждом  $\Delta t > 0$  есть произвольный замкнутый контур, проходимый по часовой стрелке, не пересекающийся с  $K(\varphi_0)$  и охватывающий особые точки  $-(\Delta t)^{-1}$  и  $(\beta_k \Delta t)^{-1}$  функций  $v_n(\lambda)$ . Конкретизируем теперь способ построения контура  $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$ . С этой целью введем обозначение  $\tilde{O}_z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \beta_k^{-1}| = \tilde{\varepsilon}|\beta_k|^{-1}\}$ , где величина  $\tilde{\varepsilon}$  определена в разделе 2. Построим произвольный контур  $\tilde{\Gamma}_z$ , не пересекающийся с замыканием сектора  $K(\varphi_0)$  и охватывающий окрестность  $\tilde{O}_z$  точки  $\beta_k^{-1}$  и точку  $z = -1$ . Теперь положим  $\tilde{\Gamma}(\Delta t) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \Delta t \in \tilde{\Gamma}_z\}$ . Нетрудно проверить, что этот контур удовлетворяет всем условиям, наложенным на  $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$  и, кроме того, не пересекается с определенной в условии леммы 2 окрестностью  $\tilde{O}(\Delta t)$ . Обозначив длину контура  $\tilde{\Gamma}_z$  через  $l(\tilde{\Gamma}_z)$ , получим, что длина контура  $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$  равна

$$l(\tilde{\Gamma}(\Delta t)) = \frac{l(\tilde{\Gamma}_z)}{\Delta t}. \tag{5.2}$$

Имеем

$$\|v_n(A)\| \leq |v_n(\infty)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} |v_n(\lambda)| \|R(\lambda, A)\| |d\lambda|. \tag{5.3}$$

По аналогии с [3] для первого слагаемого правой части (5.3) устанавливается оценка

$$|v_n(\infty)| \leq C_{33} e^{b_1 n} \tag{5.4}$$

с константой  $b_1$ , не зависящей от  $\Delta t$ . Точки контура  $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$  лежат вне  $\text{Int } \tilde{O}(\Delta t)$ . Согласно лемме 2, для них справедлива оценка (2.13), в которой  $M|\lambda|t = M|\lambda|n\Delta t \leq MRn$ ,  $R = \max_{z \in \tilde{\Gamma}_z} |z|$ , и  $|v_j(\lambda)| = |u_j(\lambda \Delta t)| \leq V_j$ ,

где  $V_j = \max_{z \in \tilde{\Gamma}_z} |u_j(z)|$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ . В результате для  $\lambda \in \tilde{\Gamma}(\Delta t)$  получаем

$$|v_n(\lambda)| \leq C_{34} e^{b_2 n} \tag{5.5}$$



с подходящими константами  $C_{34}$ ,  $b_2 > 0$ . Подставляя (1.2), (5.4) и (5.5) в (5.3) и используя (5.2), а также принимая во внимание, что для  $\lambda \in \tilde{\Gamma}(\Delta t)$  выполняется  $|\lambda| > r/(\Delta t)$ ,  $r = \min_{z \in \tilde{\Gamma}_z} |z|$ , приходим к оценке  $\|v_n(A)\| \leq C_{35} e^{bn}$ ,  $b = \max\{b_1, b_2\}$ . Подставляя ее в (5.1) и используя схему рассуждений из [3], получаем следующие оценки погрешности.

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть  $N(\delta) = \left\lceil \frac{1}{\kappa b} \ln \frac{qm}{\delta b T} \right\rceil$ , где  $\kappa > 1$ ,  $q \in \left(0, \frac{T_1 - aT}{T_1 - aT + (\mu + 1)T}\right)$  произвольны. Тогда для достаточно малых  $\delta > 0$  выполняется оценка

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{36} \ln^{-qm} \frac{1}{\delta}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad C_{36} = C_{36}(\kappa). \quad (5.6)$$

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и  $N(\delta) = \left\lceil \frac{1}{\kappa b} \ln \frac{\|w\|pm}{\delta b T} \right\rceil$ , где  $\kappa > 1$  произвольно. Тогда для достаточно малых  $\delta > 0$  выполняется оценка  $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leq C_{37} \ln^{-p} \ln \frac{1}{\delta}$ ,  $0 \leq n \leq N$ ,  $C_{37} = C_{37}(\kappa)$ .

Теорема 6 уточняет оценки погрешности, полученные в [3]. А именно, в (5.6) показатель логарифмической сходимости в  $m$  раз выше, чем в аналогичной оценке с неоптимальным выбором начальных элементов из [3].

**Замечание 3.** Аналогичные (5.6) оценки погрешности можно получить тем же способом и из полиномиальных оценок скорости сходимости, устанавливаемых теоремами 3 и 4. В условиях этих теорем справедливы оценки погрешности с показателем логарифмической сходимости по  $\delta$ , равным показателю полиномиальной сходимости по  $\Delta t$  в оценках из теорем 3, 4.

**6. Численные эксперименты.** Для численного тестирования будем использовать схему класса  $R2$  с коэффициентами  $\gamma_1 = 7/4$ ,  $\gamma_2 = 3/2$  и выбором начальных элементов в соответствии с условием 6. Эта схема имеет вид

$$-\frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n+1} + x_{n+2} = \Delta t \left( -\frac{1}{2}Ax_n + \frac{9}{4}Ax_{n+1} - \frac{1}{4}Ax_{n+2} \right), \quad 0 \leq n \leq N-2, \quad x_0 = f \in D(A). \quad (6.1)$$

В расчетах будет использоваться вытекающее из (6.1) представление

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= (-2E + 10(4E + \Delta t A)^{-1})x_n + (9E - 34(4E + \Delta t A)^{-1})x_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq N-2, \\ x_0 &= f, \quad x_1 = 2f - (E + \Delta t A)^{-1}f. \end{aligned} \quad (6.2)$$

**Пример 2.** Рассматривается некорректная начально-краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -a_0^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + b(s) \frac{\partial x}{\partial s} + c(s)x, \quad x = x(s, t), \\ x(0, t) &= 0, \quad x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(s, 0) = \psi_1(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad \psi_1(0) = \psi_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь  $b \in C^1[0, 1]$ ,  $c \in C[0, 1]$  — вещественные функции, удовлетворяющие условию

$$c(s) - \frac{1}{2}b'(s) \geq \epsilon > 0 \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (6.4)$$

Задача (6.3) имеет вид (1.1), где  $A : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ ,

$$[Au](s) = -a_0^2 u''(s) + b(s)u'(s) + c(s)u(s), \quad s \in [0, 1]; \quad f = \psi_1, \quad D(A) = \left\{ u \in H^2[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Аналогично [15] убеждаемся, что оператор  $A$  удовлетворяет условию 1 с произвольным  $\varphi_0 \in (\varphi_0^*, \pi/2)$ , где  $\operatorname{tg} \varphi_0^* = \max_{s \in [0, 1]} \left( |b(s)| \max \left\{ \frac{1}{2a_0^2}, \frac{1}{2c(s) - b'(s)} \right\} \right)$ . Потребуем, чтобы  $\varphi_0^* < \pi/4$ , т.е. наложим условие

$$\max_{s \in [0, 1]} \left( |b(s)| \max \left\{ \frac{1}{2a_0^2}, \frac{1}{2c(s) - b'(s)} \right\} \right) < 1. \quad (6.5)$$

Обозначим через  $\psi_2(s)$  искомую функцию  $x(s, T)$ . Для построения модельных примеров с заранее известной функцией  $\psi_2(s)$  выбирается функция  $\psi_0 \in D(A)$  и решается следующая вспомогательная корректно поставленная задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= a_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - b(s) \frac{\partial y}{\partial s} - c(s)y, \\ y(0, t) &= 0, \quad y(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T_1 \quad (T_1 > aT), \quad y(s, 0) = \psi_0(s), \quad 0 \leq s \leq 1. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Положим  $\psi_1(s) = y(s, T_1)$  в (6.3), при этом модельное решение есть  $\psi_2(s) = y(s, T_1 - T)$ .

Для нахождения элементов  $z = (E + \Delta tA)^{-1}f$ ,  $z_n = (4E + \Delta tA)^{-1}x_n$ ,  $0 \leq n \leq N - 1$ , в итерациях (6.2) применительно к (6.3) решаются краевые задачи

$$\begin{aligned} -a_0^2 \Delta t z''(s) + \Delta t b(s) z'(s) + (\Delta t c(s) + 1) z(s) &= f(s), \quad z(0) = z(1) = 0, \\ -a_0^2 \Delta t z_n''(s) + \Delta t b(s) z_n'(s) + (\Delta t c(s) + 4) z_n(s) &= x_n(s), \quad z_n(0) = z_n(1) = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Расчеты проводились в среде Maple 15. Сначала для схемы (6.1) с  $\varphi_0 = \pi/4$  был найден характеристический показатель  $a \approx 4.25$ . На каждом шаге (6.2) краевые задачи типа (6.7) решались на сетке с равномерным разбиением на 2048 интервалов, а значения функции  $x_{n+2}(s)$  вычислялись в точках  $s = j/10$ ,  $j = 0, \dots, 10$ . Затем по найденным значениям проводилась кубическая сплайн-интерполяция; получившаяся функция использовалась на следующей итерации.

В (6.3) и (6.6) для тестового расчета положим  $a_0 = 0.1$ ,  $b(s) = 0.02s$ ,  $c(s) = s(1 - s) + 0.02$ ,  $T = 0.5$ ,  $T_1 = 2.5$ ,  $\psi_0(s) = \sin(2\pi s)$  и выберем  $N = 5$ . Нетрудно проверить, что при этом выполняются условия (6.4), (6.5) и условие 4; ясно, что выполнено и более слабое условие 4а. Вычисления проводились как с точной функцией  $f(s) = \psi_1(s)$ , так и с возмущенной  $f_\delta(s) = \psi_1(s) + 0.005 \sin(3\pi s)$ . Для точной функции:  $\|\psi_2 - \psi_1\| \approx 5.60 \times 10^{-2}$ ,  $\|x_N - \psi_2\| \approx 4.06 \times 10^{-3}$ , относительная погрешность  $\frac{\|x_N - \psi_2\|}{\|\psi_2\|} \approx 1.83 \times 10^{-2}$ . Для возмущенной функции:  $\|x_N - \psi_2\| = 7.13 \times 10^{-3}$ , относительная погрешность  $\frac{\|x_N - \psi_2\|}{\|\psi_2\|} \approx 3.22 \times 10^{-2}$ .

Аналогичные вычисления проводились для неоптимального выбора начального элемента схемы (6.1)  $v_1(\lambda) \equiv 1$ , предлагавшегося в [3]. Для точной функции:  $\|x_N - \psi_2\| \approx 8.77 \times 10^{-3}$ , относительная погрешность  $\frac{\|x_N - \psi_2\|}{\|\psi_2\|} \approx 3.96 \times 10^{-2}$ . Для возмущенной функции:  $\|x_N - \psi_2\| = 1.05 \times 10^{-2}$ , относительная погрешность  $\frac{\|x_N - \psi_2\|}{\|\psi_2\|} \approx 4.76 \times 10^{-2}$ .

Полученные результаты указывают на практическую приемлемость рассмотренного метода решения обратных задач Коши вида (1.1); заметно улучшение аппроксимации искомого решения при оптимальном выборе начальных элементов схемы (1.3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филликов А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
2. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**. 163–171.
3. Бакушинский А.Б., Кокурин М.М., Кокурин М.Ю. Об одном классе разностных схем решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. **52**, № 3. 483–498.
4. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Kokurin M.M. On a class of finite difference methods for ill-posed Cauchy problems with noisy data // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2011. **18**, N 9. 959–977.
5. Бакушинский А.Б., Кокурин М.М., Кокурин М.Ю. О схеме полной дискретизации некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. **18**, № 1. 96–108.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ, 2007.
7. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.
8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004.
9. Бакушинский А.Б. Разностные методы решения некорректных задач Коши для эволюционных уравнений в комплексном  $B$ -пространстве // Дифференциальные уравнения. 1972. **8**, № 9. 1661–1668.
10. Naase M. The functional calculus for sectorial operators. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2006.

11. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
12. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York: Springer, 2000.
13. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
14. Thomee V. Galerkin finite element methods for parabolic problems. Berlin: Springer, 2006.
15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
16. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию  
02.10.2012

---