УДК 519.6

СТРУКТУРА УСТОЙЧИВОГО МНОГООБРАЗИЯ ПОЛНОСТЬЮ НЕЯВНЫХ СХЕМ

Э. Ю. Ведерникова[1], А. А. Корнев[1]

Получен аналог теоремы Адамара–Перрона о существовании локального устойчивого многообразия в окрестности неподвижной точки гиперболического типа для неявно заданных отображений. В том числе, данный результат позволяет конструктивно исследовать структуру многообразия для конечно-разностной аппроксимации по времени для квазилинейных уравнений параболического типа и показать, что в смысле интегральной метрики многообразие нелинейной задачи существует в неограниченном эллипсоиде. Приводятся теоретические оценки и результаты численных расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12–01–00960).

Ключевые слова: стабилизация, численные алгоритмы, неявные разностные схемы.

Пусть на банаховом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$ заданы ограниченный линейный оператор L, непрерывный нелинейный оператор Q и формально определено неявное отображение $S(u) = Lu+Q\big(S(u)\big)$, для которого $z_0 = 0$ является неподвижной точкой, т.е. $S(0) = 0$. Пусть оператор L выделяет такое полное нормированное подпространство $H_L \subset H$, $\|\cdot\|_L$, что $L(H) \subset H_L$, $Q(H_L) \subset H_L$. Предположим, что имеется разложение H в прямую сумму $H = H_+ + H_-$, а операторы P_+ и P_- являются операторами проектирования вдоль подпространств $H_- = P_-[H]$ и $H_+ = P_+[H]$ на подпространства H_+ и H_- соответственно. При этом существуют такие числа M, $C_\pm$, μ, $\mu_\pm$, что выполнены условия

$$
\begin{aligned}
&\widehat{a}_0)\ \|Lu\| \leqslant M\|u\| \quad \forall u \in H;\\
&\widehat{a}_1)\ P_+ + P_- = I, \quad \|P_\pm\| \leqslant C_\pm;\\
&\widehat{a}_2)\ L(H_+) = H_+, \quad L(H_-) \subset H_-;\\
&\widehat{a}_3)\ \|Lv\| \geqslant \mu_+\|v\| \quad \forall v \in H_+, \quad \|Lw\| \leqslant \mu_-\|w\| \quad \forall w \in H_-, \quad \mu_- < \mu < \mu_+;\\
&\widehat{a}_4)\ \big\|Q(u_1) - Q(u_2)\big\|_L \leqslant \vartheta_L\Big(\max\big\{\|u_1\|_L, \|u_2\|_L\big\}\Big)\|u_1 - u_2\|_L,\\
&\qquad \big\|Q(u_1) - Q(u_2)\big\| \leqslant \vartheta\Big(\max\big\{\|u_1\|_L, \|u_2\|_L\big\}\Big)\|u_1 - u_2\| \quad \forall u_i \in \mathcal{O}^L_{r_1},\\
&\qquad \Big\|P_\pm\big[Q(u_1) - Q(u_2)\big]\Big\| \leqslant \vartheta_\pm\Big(\max\big\{\|u_1\|_L, \|u_2\|_L\big\}\Big)\|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}
$$

Здесь и далее используется обозначение $\mathcal{O}^L_{r_1} = \big\{u \in H_L : \|u\|_L \leqslant r_1\big\}$ для шаровой в смысле нормы пространства H_L окрестности нуля. Функции $\vartheta_L(\xi)$, $\vartheta(\xi)$, $\vartheta_+(\xi)$ и $\vartheta_-(\xi)$ являются непрерывными, положительными и неубывающими функциями одного аргумента, равными нулю при $\xi = 0$ (при этом можно всегда считать, что $\vartheta_\pm(\xi) \leqslant C_\pm\vartheta(\xi)$).

Сформулированные условия $\big(\widehat{a}\big)$ для операторов неявного вида $S(u) = Lu + Q\big(S(u)\big)$ являются аналогом классических a-условий гиперболичности [1–3] для явно заданных отображений $S(u) = Lu + R(u)$. Покажем, что если условия $(\widehat{a})$ выполнены, то неявный оператор $S(u)$ в некоторой окрестности нуля $\mathcal{O}^0 \subset H$ можно представить в указанном явном виде, а в некоторой подокрестности $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}^0$ выделить для него устойчивое многообразие $\mathcal{W}^-_\mu(\mathcal{O}) = \Big\{m \in \mathcal{O} : S^i(m) \in \mathcal{O},\ \big\|S^i(m)\big\| \leqslant C\,\mu^i,\ i = 0, 1, \dots\Big\}$, содержащее все точки $m \in \mathcal{O}$, для которых положительные полутраектории $\Big\{S^i(m) = S\big(S^{i-1}(m)\big),\ i = 1, 2, \dots\Big\}$ сходятся к нулю под действием оператора $S(\cdot)$ с асимптотической скоростью не ниже, чем μ^i.

Построим окрестность $\mathcal{O}^0$. Выберем произвольные числа $0 \leqslant q < 1$ и $\delta > 0$ и рассмотрим такую

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; Э. Ю. Ведерникова, аспирант, e-mail: elvira.vedernikova@socgen.com; А. А. Корнев, профессор, e-mail: kornev@mech.math.msu.su

окрестность $\mathcal{O}^L_{r_2} \subset H_L$, что выполнены условия

$$\begin{aligned}
&\widehat{b}_1) \quad \mathcal{O}^L_{r_2+\delta} \subset \mathcal{O}^L_{r_1},\\
&\widehat{b}_2) \quad \big\|Q(\overline{u})\big\|_L \leqslant (1-q)\delta \quad \forall \overline{u} \in \mathcal{O}^L_{r_2},\\
&\widehat{b}_3) \quad \big\|Q(u_1) - Q(u_2)\big\|_L \leqslant q\|u_1 - u_2\|_L \quad \forall u_{1,2} \in \mathcal{O}^L_\delta(\overline{u}),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{O}^L_\delta(\overline{u}) = \big\{u \in H_L : \|\overline{u} - u\|_L \leqslant \delta\big\}$. Определим множество $\mathcal{O}^0$ следующим образом:

$$\widehat{b}_4) \quad \mathcal{O}^0 \subset H : L\big(\mathcal{O}^0\big) \subset \mathcal{O}^L_{r_2}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть отображения L и Q удовлетворяют условиям $(\widehat{a})$.*

1. *Тогда множества $\mathcal{O}^L_{r_2}$ и $\mathcal{O}^0$, заданные согласно условиям $\big(\widehat{b}\big)$, существуют и не пусты.*

2. *Для произвольного $u \in \mathcal{O}^0$ уравнение $\widehat{u} = Lu + Q\big(\widehat{u}\big)$ имеет единственное решение*

$$\widehat{u} \in \mathcal{O}^L_\delta(Lu) \subset \mathcal{O}^L_{r_2+\delta}.$$

При этом итерационный процесс $\widehat{u}^{\,k+1} = Lu + Q\big(\widehat{u}^{\,k}\big)$ сходится для любого $\widehat{u}^0 \in \mathcal{O}^L_\delta(Lu)$ и верна оценка $\big\|\widehat{u} - \widehat{u}^{\,k}\big\|_L \leqslant q^k \big\|\widehat{u} - \widehat{u}^0\big\|_L$.

3. *Для произвольного $u \in \mathcal{O}^0$ оператор $S(u)$ можно представить в виде $S(u) = Lu + R(u)$ с непрерывной функцией $R(\cdot) : H \to H_L$, удовлетворяющей условиям*

$$\begin{aligned}
&\|R(u_1) - R(u_2)\| \leqslant \theta(r_3)\|u_1 - u_2\| \quad \forall u_{1,2} \in \mathcal{O}^0,\\
&\Big\|P_\pm\big[R(u_1) - R(u_2)\big]\Big\| \leqslant \theta_\pm(r_3)\|u_1 - u_2\|, \quad r_3 = r_2 + \delta,
\end{aligned}$$

где $\theta(\xi) = \dfrac{M\vartheta(\xi)}{1 - \vartheta(\xi)}$, $\quad \theta_\pm(\xi) = \left(M\vartheta_\pm(\xi) + \dfrac{M\vartheta_+(\xi)\vartheta_-(\xi)}{1 - \vartheta_\mp(\xi)}\right)\left(1 - \vartheta_\pm(\xi) - \dfrac{\vartheta_+(\xi)\vartheta_-(\xi)}{1 - \vartheta_\mp(\xi)}\right)^{-1}$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из условий $\big(\widehat{a}\big)$, так как значение функции $\vartheta_L(r_3)$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора r_2 и δ. Второе утверждение по сути доказано в работе [4], поскольку условия $\big(\widehat{b}\big)$ обеспечивают инвариантность множества $\mathcal{O}^L_\delta(Lu)$ и сжимаемость отображения, задаваемого указанным итерационным процессом. Оценка из третьего пункта для функции $\theta(\xi)$ может быть получена с учетом представления $R(u) := S(u) - Lu = Q\big(S(u)\big)$ следующим образом:

$$\big\|R(u_1)-R(u_2)\big\| = \Big\|Q\big(S(u_1)\big)-Q\big(S(u_2)\big)\Big\| \leqslant \vartheta(r_3)\big\|S(u_1)-S(u_2)\big\| \leqslant \vartheta(r_3)\Big(\big\|L(u_1-u_2)\big\|+\big\|R(u_1)-R(u_2)\big\|\Big).$$

Отсюда находим выражение для $\theta(\xi)$. Указанные в условии теоремы оценки для функций $\theta_\pm(\xi)$ находятся аналогично, при этом более грубые неравенства $\theta_\pm(\xi) \leqslant C_\pm\theta(\xi)$ следуют из свойства $\big(\widehat{a}_1\big)$. Теорема доказана.

Для построения устойчивого многообразия рассмотрим класс $B_\gamma(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset H$, состоящий из функций $f : P_-[\mathcal{O}] \to P_+[\mathcal{O}]$, удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$, $\big\|f(w_1) - f(w_2)\big\| \leqslant \gamma\|w_1 - w_2\|$. Введем на $B_\gamma(\mathcal{O})$ следующую норму: $|f|_{B_\gamma(\mathcal{O})} = \sup\limits_{w \in P_-[\mathcal{O}]} \big\|f(w)\big\|$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, при этом величины r_2, δ и γ удовлетворяют неравенствам*

$$\frac{\gamma\mu_- + \gamma(1+\gamma)\overline{\theta}_- + \overline{\theta}_+}{\mu_+ - \overline{\theta}_+} \leqslant \gamma, \quad \frac{\mu_- + (1+\gamma)\overline{\theta}_- + \gamma\overline{\theta}_-}{\mu_+ - \overline{\theta}_+} < 1, \tag{1}$$

где $\max\limits_{u \in \mathcal{O}^L_{r_2+\delta}} \theta_\pm\big(\|u\|_L\big) = \theta_\pm(r_2 + \delta) = \overline{\theta}_\pm$.

Тогда в окрестности $\mathcal{O} = \big\{u \in \mathcal{O}^0 : \ L(u) \in \mathcal{O}^L_{r_2},\ \|P_+u\| \leqslant \gamma\|P_-u\|\big\}$ существует устойчивое многообразие $\mathcal{W}^-_\mu(\mathcal{O})$. Многообразие касается подпространства H_- и может быть задано функцией $f \in B_\gamma(\mathcal{O})$: $\mathcal{W}^-_\mu(\mathcal{O}) = \big\{m \in \mathcal{O} : m = v + w,\ w = P_-[m], v = f(w)\big\}$.

Не сложно проверить, что условия $\big(\widehat{a}\big)$, $\big(\widehat{b}\big)$ и утверждение п. 3 теоремы 1 гарантируют выполнение оценок (1) в окрестности $\mathcal{O}^L_{r_2+\delta}$ достаточно малого радиуса $r_2 + \delta$. Будем искать многообразие $\mathcal{W}^-_\mu$ из условия инвариантности относительно оператора S:

$$L_+f(w) + R_+\big(f(w) + w\big) = f\Big(L_-w + R_-\big(f(w) + w\big)\Big). \tag{2}$$

Полученное функциональное уравнение (2) на отображение f является основой для построения искомого многообразия. Для решения уравнения (2) относительно $f \in B_\gamma(\mathcal{O})$ рассмотрим неявный метод сжимающих отображений [5]:

$$L_+ f_n(w) + R_+\big(f_n(w) + w\big) = f_{n-1}\Big(L_- w + R_-\big(f_{n-1}(w) + w\big)\Big). \tag{3}$$

Условия (1) гарантируют, что построенное отображение $f_n = \mathcal{F}(f_{n-1})$ является сжимающим в пространстве $B_\gamma(\mathcal{O})$. Отсюда следует существование единственного решения f и сходимость указанного итерационного процесса (детали доказательства см. в [5]).

В качестве примера рассмотрим одномерное уравнение Чафе–Инфанта $v_t = v_{xx} + bv - \alpha v^2$, $v = v(t,x)$, $\alpha, b = \mathrm{const}$, $b > 0$, $(t,x) \in [0,T] \times [0,\pi]$, $v(0,x) = v^0(x)$, $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$. Отметим, что задача разрешима в пространстве $H = L_2(0,\pi)$ только локально, т.е. на конечном отрезке времени, так как даже для начальных данных из малой окрестности тождественно нулевой функции существуют решения типа blow up. Возьмем стандартную чисто неявную по времени разностную схему

$$\begin{aligned} &\frac{u^{p+1} - u^p}{\tau} = u^{p+1}_{xx} + bu^{p+1} - \alpha\big(u^{p+1}\big)^2, \\ &u^p(x) \sim v(\tau p, x), \quad \tau > 0, \quad p = 0, 1, \ldots, \\ &u^p(0) = u^p(\pi) = 0, \quad u^0(x) = v^0(x) \end{aligned} \tag{4}$$

с порядком аппроксимации $O(\tau)$ и рассмотрим разрешающий оператор $S(\cdot) = S(\tau, \cdot)$ построенной дискретной по времени задачи $u^{p+1} = S\big(u^p\big)$ на пространстве H. Найдем область существования устойчивого многообразия $\mathcal{W}^-_\mu(\mathcal{O})$ для оператора S.

Отметим, что явная разностная схема рассматривалась Мосиной К.Н. Запишем разрешающий оператор S в терминах неявного отображения $u^{p+1} = S\big(u^p\big) = Lu^p + Q\Big(S\big(u^p\big)\Big)$, $L = \big(I - \tau(\Delta + b\, I)\big)^{-1}$, $Q(u) = \tau\alpha L u^2$, где $\Delta u := u_{xx}$, а действие линейного оператора $w^p = Lu^p$ естественно определяется как решение задачи типа Дирихле $\big(I - \tau(\Delta + b\, I)\big) w^p = u^p$, $w^p \in H$, $w^p(0) = w^p(\pi) = 0$.

Пусть $\big\{\xi^{(k)} = \sqrt{2}\sin kx,\ \lambda_k = k^2,\ k = 1, 2, \ldots\big\}$ — ортонормированные собственные функции и собственные значения оператора $(-\Delta)$ на отрезке $[0,\pi]$ с нулевыми краевыми условиями.

Тогда $\big\{\xi^{(k)},\ \nu_k = \big(1 + \tau(\lambda_k - b)\big)^{-1},\ k = 1, 2, \ldots\big\}$ являются собственными функциями и собственными значениями оператора L. Далее будем считать, что при заданных значениях α, b и τ имеем $1 - \tau b = C_0 > 0$ и для некоторого i_0 выполняются неравенства $\lambda_{i_0} < b < \lambda_{i_0+1}$. Тогда нулевая начальная функция $v^0(x) \equiv 0$ называется гиперболической неподвижной точкой отображения $S(\cdot)$.

В этом случае операторы P_+ и P_- представляют собой (см. [5, 8, 9]) операторы ортогонального проектирования на подпространства $P_+[H] = \mathrm{span} < \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(i_0)} >$ и $P_-[H] = \mathrm{span} < \xi^{(i_0+1)}, \xi^{(i_0+2)}, \ldots >$ соответственно, а константы в условиях $(\widehat{a})$ имеют вид $M = \nu_1$, $\mu_- = \nu_{i_0+1} < \mu < 1 < \nu_{i_0} = \mu_+$. Для получения ключевой оценки $(\widehat{a}_4)$ выпишем согласно определению оператора L формальные задачи на функции $Q_1(x) = Q\big(u_1(x)\big)$, $Q_2(x) = Q\big(u_2(x)\big)$ для произвольных $u_{1,2} \in H$:

$$\big(I - \tau(\Delta + b\, I)\big) Q_i = \alpha\tau u_i^2, \quad Q_i(0) = Q_i(\pi) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Введем следующую норму:

$$\|u\|^2_L = \int\limits_0^\pi \Big(\big(I - \tau(\Delta + b\, I)\big)u\Big) u\, dx = (1 - \tau b)\int\limits_0^\pi u^2\, dx + \tau\int\limits_0^\pi (u_x)^2\, dx = (1 - \tau b)\|u\|^2_2 + \tau\|u\|^2_x.$$

Здесь и далее используются стандартные обозначения $\|u\|^p_p = \int\limits_0^\pi u^p\, dx$, $p = 2, 4$; $\|u\|^2_x = \int\limits_0^\pi u^2_x\, dx$ для норм в пространствах $L_p[0,\pi]$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_2[0,\pi]$ соответственно. При этом считаем, что $H = L_2(0,\pi)$, $H_L = \overset{\circ}{W}{}^1_2[0,\pi]$ и на H_L задана норма $\|\cdot\|_L$, эквивалентная исходной норме $\|\cdot\|_x$. Отметим, что для функции вида $u(x) = \sum\limits_{i=1}^\infty \alpha_k \xi^{(k)}(x)$ имеем $\|u\|^2_2 = \sum\limits_{i=1}^\infty \alpha^2_k$, $\|u\|^2_L = \sum\limits_{i=1}^\infty \dfrac{\alpha^2_k}{\nu_k}$. Найдем требуемые в теореме 1 оценки для разности $Q_1(x) - Q_2(x) = h(x)$. С учетом классического неравенства $\|u\|_4 \leqslant C_1\|u\|^{1/2}_x \|u\|^{1/2}_2$, верного для произвольной функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, из уравнения (5) находим интегральное тождество и следующие оценки:

$$\|h\|_L^2 = \alpha\tau \int_0^\pi (u_1-u_2)(u_1+u_2)h\,dx \leqslant \alpha\tau \left(\int_0^\pi (u_1-u_2)^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_0^\pi (u_1+u_2)^4\,dx\right)^{1/4} \left(\int_0^\pi h^4 dx\right)^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\tau\|u_1-u_2\|_2\big(\|u_1\|_4+\|u_2\|_4\big)\|h\|_4 \leqslant \alpha\tau C_1^2\|u_1-u_2\|_2\big(\|u_1\|_x^{1/2}\|u_1\|_2^{1/2}+\|u_2\|_x^{1/2}\|u_2\|_2^{1/2}\big)\|h\|_x^{1/2}\|h\|_2^{1/2}.$$

Отсюда с учетом неравенств

$$\|h\|_x^2 \leqslant \frac{1}{\tau}\left(\tau\|h\|_x^2+(1-\tau b)\|h\|_2^2\right) = \frac{1}{\tau}\|h\|_L^2, \quad \|u\|_2 \leqslant C_2\|u\|_x, \quad \|h\|_2^2 \leqslant \frac{1}{C_0}\|h\|_L^2, \quad C_0 = 1-\tau b > 0$$

можно получить искомые оценки типа $(\widehat{a}_4)$. Действительно,

$$\|h\|_L^2 \leqslant \alpha\tau C_1^2 C_2^{1/2}\|u_1-u_2\|_2\big(\|u_1\|_x+\|u_2\|_x\big)\tau^{-1/4}\|h\|_L^{1/2}C_0^{-1/4}\|h\|_L^{1/2},$$

т.е.

$$\|h\|_L \leqslant \alpha\tau^{3/4}C_0^{-1/4}C_1^2C_2^{1/2}\big(\|u_1\|_x+\|u_2\|_x\big)\|u_1-u_2\|_2 \leqslant \alpha\tau^{3/4}C_4\tau^{-1/2}2rC_0^{-1/2}\|u_1-u_2\|_L,$$

где $C_4 = C_0^{-1/4}C_1^2C_2^{1/2}$, $\|u_{1,2}\|_L \leqslant r$. Далее имеем $\|h\|_2 \leqslant C_0^{-1/2}\|h\|_L \leqslant \alpha\tau^{1/4}2C_4C_0^{-1/2}r\|u_1-u_2\|_2$. Таким образом, функции $\vartheta_L(\xi), \vartheta(\xi)$ можно выбрать в виде $\vartheta_L(r) = \vartheta(r) = \alpha\tau^{1/4}2C_4C_0^{-1/2}r$. Отсюда, согласно теоремам 1 и 2, многообразие $\mathcal{W}_\mu^-(\mathcal{O})$ определено, а значение $f(w)$ может быть найдено с помощью указанного алгоритма для произвольной функции $w(x) = \sum\limits_{k=i_0+1}^{\infty} c_k\nu_k^{-1/2}\xi^{(k)}(x)$ при условии, что для $Lw(x) = \sum\limits_{k=i_0+1}^{\infty} c_k\nu_k^{1/2}\xi^{(k)}(x)$ выполняется оценка $\|Lw\|_L = \left(\sum\limits_{k=i_0+1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2} \leqslant r_3$ при достаточно малом r_3. Отметим, что $\nu_k^{-1/2} \sim \sqrt{\tau}\,m$ при $m \gg 1$; следовательно, окрестность $\mathcal{O}$ существования многообразия $\mathcal{W}_\mu^-(\mathcal{O})$ для рассмотренной нелинейной задачи (4) имеет вид эллипсоида, полуоси которого неограниченно растут при увеличении номера k базисной функции $\xi^{(k)}(x)$.

Таблица 1

k	4	5	6	10	100	1000	10	100	1000
c_k	10.	10.	10.	10.	10.	10.	30.	1000.	30000
$\|m_n\|$	13.16	12.75	12.61	12.54	12.53	12.53	37.79	1253.99	37599.51
$\|f_n\|$	4.01	2.38	1.39	0.43	$7. \times 10^{-4}$	$1. \times 10^{-7}$	3.83	41.15	79.11
T_0	1.1	0.95	1.5	1.8	1.2	1.	1.5	0.3	0.36
D_0	$1. \times 10^{-2}$	$1. \times 10^{-5}$	$8. \times 10^{-6}$	$5. \times 10^{-8}$	$2. \times 10^{-12}$	$5. \times 10^{-15}$	$8. \times 10^{-6}$	1.4×10^{-1}	1.4×10^{-1}

Замечание. Наличие зависимости размера области существования устойчивого многообразия и функции $\theta(r)$ от параметра τ в данном случае связано со структурой операторов L, Q и является естественным. Для получения равномерных по τ оценок необходимо определить отображение $S(\cdot)$ как оператор разностной схемы за M шагов при $M\tau = \text{const}$, т.е. $S(\cdot) = S(\tau M, \cdot)$. Такой подход используется в указанных алгоритмах (3) для численного построения $\mathcal{W}_\mu^-$ [5]. В этом случае полученные теоремы 1 и 2 могут применяться для нахождения области существования устойчивого многообразия исходной дифференциальной задачи. Отметим, что утверждение об эллипсоидной форме области существования устойчивого многообразия для двумерных уравнений Навье–Стокса доказано А. В. Фурсиковым методом функционально-аналитических рядов в работе [6].

Приведем результаты приближенного построения типичных для окрестности $\mathcal{O}$ функций $m(x)$, принадлежащих устойчивому многообразию. Пусть $b = 10$, $\alpha = 1$. Тогда размерность i_0 подпространства $P_+[H]$ равняется трем. Введем в области $[0,\pi]$ равномерную сетку $x_j = jh$, $j = 0,1,\ldots,N$, $h = \pi/N$, и построим стандартную конечно-разностную аппроксимацию задачи (4) на пространстве дискретных функций $u_j^p \in H_h$, заменив оператор Δ на его конечно-разностный аналог Δ_h на трехточечном шаблоне. Суммарный порядок аппроксимации полученной полностью неявной разностной схемы равен $O\big(\tau+h^2\big)$. Дальнейшие расчеты проводились при $\tau = \big\{10^{-3}, 10^{-5}\big\}$, $N = 3001$.

В табл. 1 представлены результаты построения $m_n(x_j) = w(x_j) + f_n\big(w(x_j)\big)$ для $w(x) = c_k \sin(k\,x)$, где функция $f_n(w)$ найдена с помощью итерационного процесса (3) (детали реализации алгоритма можно найти в работе [5]).

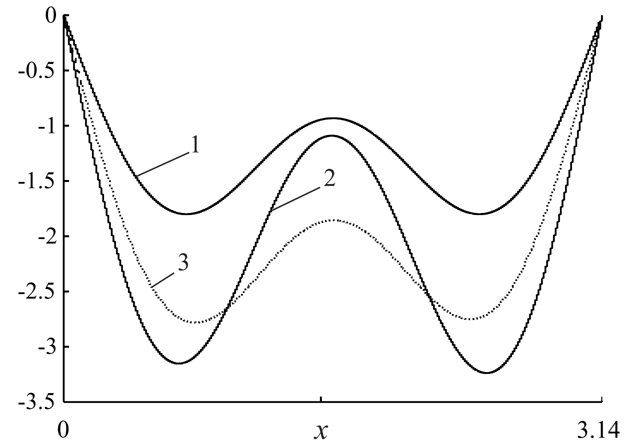

Рис. 1. Вид функций $f\big(w(x)\big)$:
1) $C_4 = 10$; 2) $C_5 = 10$; 3) $C_{10} = 30$

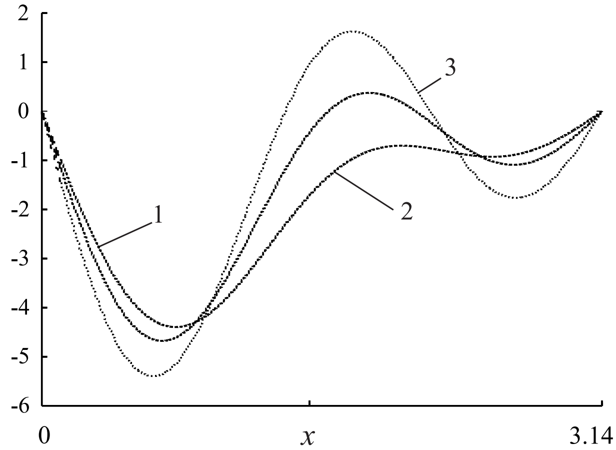

Рис. 2. Вид функций $f\big(w(x)\big)$:
1) $C_4 = C_5 = 7.07$; 2) $C_4 = C_5 = C_6 = 5.77$;
3) $C_4 = 0.5, \ldots, C_{25} = 12.5$

Напомним, что $f(w)$ задает смещение многообразия $\mathcal{W}_\mu^-(\mathcal{O})$ от линейного подпространства H_- вдоль H_+, а величина $\dfrac{\big\|f(w)\big\|}{\|w\|}$ характеризует показатель γ класса $B_\gamma(\mathcal{O})$. Согласно определению устойчивого многообразия решение u_j^p сеточной задачи стремится с течением времени к нулю только в том случае, если u_j^0 принадлежит устойчивому многообразию конечно-разностного оператора полностью дискретной задачи. Поэтому близость найденного приближения $m_n(x_j)$ и устойчивого многообразия дифференциальной задачи при малых τ и h характеризуется временем $T_0 = p_0\tau$, в течение которого норма решения u_j^p построенной разностной схемы с начальной функцией $u_j^0 = m_n(x_j)$ убывает, и малостью величины $D_0 = \big\|u_j^{p_0}\big\| = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{N} \big(u_j^{p_0}\big)^2 h\right)^{1/2}$. Результаты соответствующих расчетов представлены в табл. 1. На рис. 1 изображены найденные численно функции $f_n\big(10\sin(4\,x)\big)$, $f_n\big(10\sin(5\,x)\big)$ и $f_n\big(30\sin(10\,x)\big)$. Отметим, что для всех рассмотренных в табл. 1 примеров функции $f_n\big(c_k\,\sin(k\,x)\big)$ имеют подобный характерный вид и по сути отличаются амплитудой.

В табл. 2 представлены результаты построения $m_n(x_j) = w(x_j) + f_n\big(w(x_j)\big)$ для $w(x) = \sum_k c_k \sin(k\,x)$, где коэффициенты c_k принимают ненулевые значения только для указанных k. На рис. 2 изображены соответствующие сеточные функции $f_n\big(w(x_j)\big)$.

Таблица 2

k	4;5	4;5;6	$4;\ldots;25$
c_k	7.07;	5.77	$0.5k$
$\|w_n\|$	13.20	13.18	46.75
$\|f_n\|$	4.16	4.07	4.65
T_0	1.3	1.2	1.0
D_0	$4. \times 10^{-3}$	$7. \times 10^{-3}$	1.9×10^{-2}

Таким образом, полученные теоретические оценки и численные результаты показывают, что теория устойчивых многообразий хотя и является принципиально подлинейной теорией, в некоторых случаях применима в окрестности, имеющей в естественной норме весьма существенный (в том числе, неограниченный) размер. Теорема 2 впервые объясняет высокую эффективность методов стабилизации по начальным данным, краевым условиям и правой части, основанных на проектировании на устойчивое многообразие нелинейных задач (см. [5–7] и цитированную там литературу).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1967. **90**, № 5. 3–210.
2. *Kostin I.N.* Rate of attraction to a non-hyperbolic attractor // Asymptotic Analysis. 1998. **16**, N 3/4. 203–222.

3. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1973. **38**. 46–93.
4. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005.
5. *Иванчиков А.А., Корнев А.А., Озерицкий А.В.* О новом подходе к решению задач асимптотической стабилизации // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2009. **49**, № 12. 2167–2181.
6. *Fursikov A.V.* Local existence theorems with unbounded set of input data and unboundedness of stable invariant manifolds for 3D Navier–Stokes equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. 2010. **3**, № 2. 269–290.
7. *Fursikov A.V., Kornev A.A.* Feedback stabilization for Navier–Stokes equations: theory and calculations // Mathematical Aspects of Fluid Mechanics. Lecture Notes Series. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 130–172.
8. *Чижонков Е.В.* Об операторах проектирования для численной стабилизации // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 161–169.
9. *Милютин С.В., Чижонков Е.В.* О двух методах приближенного проектирования на устойчивое многообразие // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 1. 177–182.

Поступила в редакцию
11.01.2013