

УДК 519.63:539.37

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА УПРУГИХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ СРЕДАХ С ТОНКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

М. П. Варыгина¹, М. А. Похабова², О. В. Садовская¹, В. М. Садовский¹

Разработаны вычислительные алгоритмы, моделирующие динамическое взаимодействие упругих блоков через тонкие вязкоупругие прослойки в структурно-неоднородных средах типа горных пород. На основе реологического метода построены модели деформирования материала прослоек различного уровня сложности. При численном решении одномерных задач применены монотонные сеточно-характеристические схемы со сбалансированным числом шагов по времени в блоках и прослойках. Рассмотрены вопросы программной реализации алгоритмов на многопроцессорных вычислительных системах с графическими ускорителями. Приведены результаты расчетов, демонстрирующие качественные особенности распространения плоских волн в материалах со слоистой микроструктурой.

Ключевые слова: упругие волны, блочная среда, микроструктура, реологическая схема, вычислительный алгоритм.

1. Введение. Некоторые природные материалы, в частности горные породы, имеют ярко выраженное структурно-неоднородное блочно-иерархическое строение. Блочная структура проявляется на разных масштабных уровнях, от размеров кристаллических зерен до блоков горного массива, выделяемых крупными разломами. Блоки связаны друг с другом прослойками породы с существенно более слабыми механическими свойствами [1].

Одной из важнейших технологических задач угледобычи является прогноз внезапного обрушения кровли угольных шахт. Этому процессу предшествует ослабление механического контакта между блоками: порода приобретает ослабленную микроструктуру. Такое состояние среды можно обнаружить, возбуждая в ней упругие волны малой амплитуды и регистрируя отклик на эти возмущения, что может быть использовано при разработке специальных технических устройств для своевременного предсказания и предотвращения аварийных ситуаций.

Цель настоящей статьи состоит в разработке надежных вычислительных алгоритмов для расчета распространения упругих волн в горных породах на основе математических моделей, учитывающих сложные реологические свойства материала прослоек. Предлагаемые алгоритмы реализованы в виде параллельных программ для многопроцессорных кластерных и графических вычислительных систем. Одномерные расчеты плоских волн, выполненные на суперкомпьютерах для большого числа слоев, позволили проанализировать специфические “маятниковые” волны, связанные со структурной неоднородностью среды, экспериментальному и теоретическому исследованию которых посвящены работы [2–5].

Следует отметить, что теория неоднородных сред со слоистой и блочной микроструктурой — область механики, интенсивно развивающаяся в течение более чем полувека. К настоящему времени в этой области построены адекватные математические модели, развиты эффективные аналитические методы исследования, разработаны численные алгоритмы для решения квазистатических и динамических задач, основанные на конечно-элементной аппроксимации непрерывных моделей [6–9]. Однако в задачах о распространении в слоистых средах высокочастотных волн, длины которых сравнимы с размерами блоков и прослоек, такие методы оказываются практически непригодными из-за методических погрешностей, обусловленных влиянием аппроксимационной вязкости, нередко превосходящей вязкость физическую, подлежащую учету в рамках используемой математической модели.

2. Уравнения одномерных движений. На рис. 1 изображена условная схема иерархического строения горной породы, которая в идеальном случае представляет собой вложенную слоистую структуру с инвариантным отношением характерных масштабов блоков и прослоек. Рассмотрим сначала отдельный

¹ Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 50/44, 660036, Красноярск; М. П. Варыгина, науч. сотр., e-mail: varuginam@yandex.ru; О. В. Садовская, ст. науч. сотр., e-mail: o_sadov@icm.krasn.ru; В. М. Садовский, зам. директора по науч. работе, e-mail: sadov@icm.krasn.ru

² Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, 660041, Красноярск; студент, e-mail: rahomova_mariya_@mail.ru

фрагмент этой структуры в одномерном приближении — чередующуюся систему из n упругих слоев толщины h с упругими прослойками толщины δ .

Пусть ρ и ρ_0 , c и c_0 , $a = \frac{1}{\rho c^2}$ и $a_0 = \frac{1}{\rho_0 c_0^2}$ — плотности, скорости звука и упругие податливости материалов слоя и прослойки соответственно. Внутри слоя с номером k выполняются одномерные уравнения теории упругости

$$\rho \frac{\partial v^k}{\partial t} = \frac{\partial \sigma^k}{\partial x}, \quad a \frac{\partial \sigma^k}{\partial t} = \frac{\partial v^k}{\partial x}, \tag{1}$$

записанные относительно продольной скорости v^k в направлении оси x (x меняется от 0 до h в пределах каждого слоя) и нормального напряжения σ^k . Поведение материала прослойки описывается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \frac{v^{k+1} + v^k}{2} = \frac{\sigma^{k+1} - \sigma^k}{\delta}, \quad a_0 \frac{d}{dt} \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta}, \tag{2}$$

в которую входят граничные значения введенных выше скоростей и напряжений, левые для $(k + 1)$ -го слоя и правые для k -го слоя. Такая система может быть получена методом осреднения уравнений упругой среды в приближении тонкой прослойки ($\delta \ll h$). Она учитывает инерционные свойства прослойки. Упрощенное описание без учета инерционных свойств вытекает из (2) в пределе при стремлении удельной массы прослойки $\rho_0 \delta$ к нулю. Тогда, очевидно, выполняется условие непрерывности напряжения на границе раздела слоев. Если модуль податливости прослойки $a_0 \delta$ также устремить к нулю, то из системы (2) последуют условия непрерывности скорости. Таким образом, получится малоинтересная для целей данной статьи математическая модель однородной упругой среды, не описывающая блочную структуру.

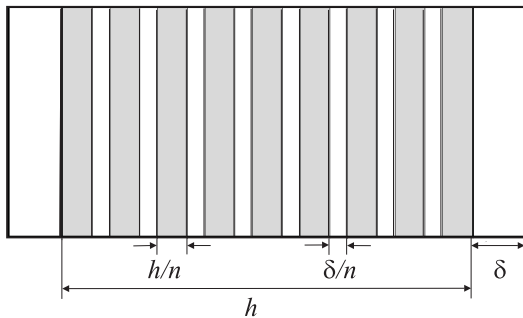


Рис. 1. Иерархическая слоистая структура горной породы

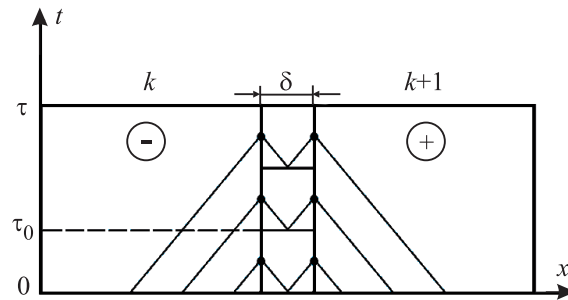


Рис. 2. Сеточно-характеристическая схема со сбалансированными шагами по времени

К системе уравнений (1) и (2) добавляются начальные условия $v^k = \sigma^k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) и граничные условия следующего вида: $\sigma^1(0, t) = -p(t)$, $v^n(h, t) = 0$, где $p(t)$ — заданное внешнее давление. Корректность постановки краевой задачи может быть доказана методами, изложенными в [10], на основе интегральных оценок, вытекающих из закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^n \int_0^h \left(\rho |v^k(x, t)|^2 + a |\sigma^k(x, t)|^2 \right) dx + \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\rho_0 \left| \frac{v^{k+1}(0, t) + v^k(h, t)}{2} \right|^2 + \right. \\ & \left. + a_0 \left| \frac{\sigma^{k+1}(0, t) + \sigma^k(h, t)}{2} \right|^2 \right) = \sigma^n(h, t) v^n(h, t) - \sigma^1(0, t) v^1(0, t), \end{aligned} \tag{3}$$

который является прямым следствием системы (1), (2). Закон сохранения (3) свидетельствует также о термодинамической самосогласованности рассматриваемой математической модели.

Численное решение задачи строилось на основе схемы распада разрыва Годунова на равномерной сетке с выбором предельно допустимого по условию Куранта–Фридрихса–Леви шага по времени $\tau = \Delta x/c$. Схема в этом случае в пределах слоя не обладает искусственной диссипацией энергии. При меньших значениях шага использовалась кусочно-линейная ENO-реконструкция (Essentially NonOscillatory) второго порядка точности [11], которая, как показали расчеты, существенно снижает эффект сглаживания пиков численного решения с соответствующим уточнением получаемых результатов.

Условия согласования на границах раздела слоев и прослоек в форме системы уравнений (2) также рассчитывались по схеме Годунова. Для этого в каждой из искусственно введенных ячеек длины δ , имитирующих отдельную прослойку, была реализована схема распада разрыва с независимым шагом по времени $\tau_0 = \delta/c_0 \ll \tau$, предельным по условию Куранта–Фридрихса–Леви для материала прослойки. В прослойках производился расчет такого количества шагов по времени, которое необходимо для достижения очередного временного слоя $t + \tau$ основной схемы.

Сеточно-характеристическая интерпретация применяемого метода схематически приведена на рис. 2. На этапе решения системы (2) с шагом τ_0 использовались уравнения распада разрыва на границах раздела сред (“предиктор” схемы в прослойке):

$$z_0 v_+ - \sigma_+ = z_0 v - \sigma, \quad z v_+ + \sigma_+ = z v^{k+1} + \sigma^{k+1}, \quad z_0 v_- + \sigma_- = z_0 v + \sigma, \quad z v_- - \sigma_- = z v^k - \sigma^k. \quad (4)$$

Здесь $z = \rho c$ и $z_0 = \rho_0 c_0$ – акустические импедансы материалов основного слоя и прослойки, величины с верхними индексами относятся к приграничным ячейкам взаимодействующих слоев, с нижним индексом “+” – к правой, а с индексом “-” – к левой границе прослойки. Последующий пересчет решения (“корректор” схемы) производился по формулам

$$\hat{v} = v + (\sigma_+ - \sigma_-) \frac{\tau_0}{\rho_0 \delta}, \quad \hat{\sigma} = \sigma + (v_+ - v_-) \frac{\tau_0}{a_0 \delta}, \quad (5)$$

в которых величины с крышкой относятся к новому временному слою. Предикторные значения сеточных величин основной схемы с шагом τ на границах слоев вычислялись путем осреднения значений, относящихся к границам ячеек на мелких шагах. “Корректор” основной схемы в слоях выполнялся обычным способом на основе интегральных аналогов дифференциальных уравнений (1).

Подставляя точное решение уравнений (1), (2) в полученную таким образом явную разностную схему, можно по стандартной методике с помощью разложения Тейлора убедиться в том, что схема обладает по крайней мере первым порядком аппроксимации относительно введенных параметров шага по времени и по пространственной переменной. Кроме того, можно установить, что для нее выполняется разностный аналог закона сохранения энергии (3), в котором знак равенства заменяется знаком нестрогого неравенства, означающим, что в схеме, вообще говоря, присутствует искусственная (паразитная) диссипация энергии.

3. Вязкоупругие прослойки. Анализ экспериментальных данных по распространению упругих волн в слоистых средах показывает, что прослойки ведут себя неупруго даже при весьма малых амплитудах волн. Более сложные варианты моделей, учитывающие естественные диссипативные процессы в прослойках, представлены реологическими схемами на рис. 3.

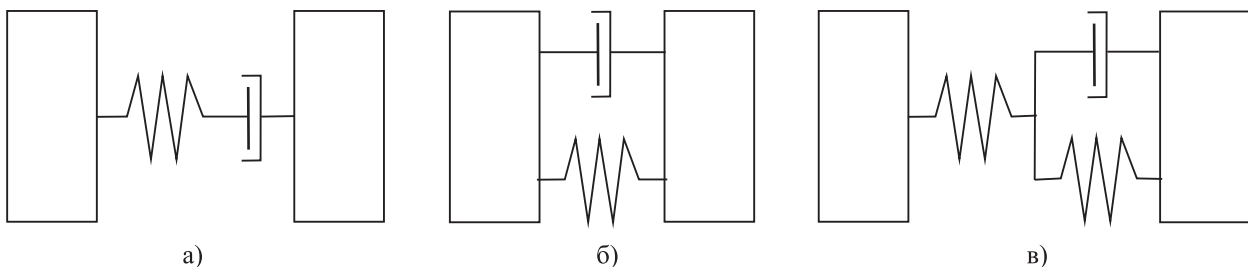


Рис. 3. Реологические схемы взаимодействия блоков:
 а) модель Максвелла, б) модель Кельвина–Фойхта, в) модель Пойнтинга–Томсона

Вязкоупругое взаимодействие по модели Максвелла (рис. 3а), согласно которой деформация прослойки складывается из упругой и вязкой составляющих, описывается системой (2) после замены второго уравнения более общим уравнением

$$a_0 \frac{d}{dt} \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} + \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2\eta} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta},$$

где η – коэффициент вязкости материала прослойки. В этом случае при численном решении вместо (5) на шаге “корректор” использовалась аппроксимация уравнений вязкоупругой среды по следующей схеме Кранка–Николсон:

$$\rho_0 \frac{\hat{v} - v}{\tau_0} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\delta}, \quad a_0 \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau_0} + \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2\eta} = \frac{v_+ - v_-}{\delta}.$$

Эта схема также реализуется с помощью явного вычислительного алгоритма.

В модели Кельвина–Фойхта (рис. 3б) напряжение в прослойке складывается из упругого и вязкого напряжений. Определяющее уравнение принимает следующий вид:

$$a_0 \frac{d}{dt} \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} = a_0 \eta \frac{d}{dt} \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta} + \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta}.$$

При численной реализации в отдельных ячейках, соответствующих прослойкам, применялась разностная схема типа “предиктор–корректор”, аппроксимирующая уравнения вязкоупругой среды. “Предиктор” схемы рассчитывался по уравнениям (4) упругой модели. “Корректор” выполнялся на основе системы

$$\rho_0 \frac{\hat{v} - v}{\tau_0} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\delta}, \quad a_0 \frac{\hat{s} - s}{\tau_0} = \frac{v_+ - v_-}{\delta}, \quad \sigma = s + \eta \frac{v_+ - v_-}{\delta}, \quad (6)$$

где s служит для обозначения упругого напряжения.

Данная схема относится к неявным, поскольку при вычислении решения на предыдущем слое по времени в ней используются значения предикторных величин v_{\pm} . В соответствии с (4), (6) разность этих величин равна $v_+ - v_- = \frac{z(v^{k+1} - v^k) + \sigma^{k+1} - \sigma^k - 2s}{z_0 + z + 2\eta/\delta}$. С учетом приведенной формулы последнее уравнение (6) позволяет определить напряжение σ и затем в силу (4) вычислить

$$v_+ = \frac{zv^{k+1} + z_0v + \sigma^{k+1} - \sigma}{z_0 + z}, \quad \sigma_+ = \frac{z_0\sigma^{k+1} + z\sigma + z_0z(v^{k+1} - v)}{z_0 + z},$$

$$v_- = \frac{zv^k + z_0v + \sigma - \sigma^k}{z_0 + z}, \quad \sigma_- = \frac{z_0\sigma^k + z\sigma + z_0z(v - v^k)}{z_0 + z}.$$

Решение на новом временном слое находится из системы (6).

В соответствии с моделью Пойнтинга–Томсона (рис. 3в) определяющее уравнение материала прослойки является интегро-дифференциальным уравнением следующего вида:

$$a_0 a_1 \eta \frac{d}{dt} \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} + (a_0 + a_1) \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} = a_1 \eta \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta} + \int_0^t \frac{v^{k+1}(t_1) - v^k(t_1)}{\delta} dt_1,$$

где a_1 — модуль упругой податливости пружины, параллельно соединенной с вязким демпфером. Численное решение задачи в ячейках, имитирующих прослойки, выполнялось на основе неявной разностной схемы Кранка–Николсон

$$\rho_0 \frac{\hat{v} - v}{\tau_0} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\delta}, \quad \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau_0} = \frac{v_+ - v_-}{\delta}, \quad a_0 a_1 \eta \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau_0} + (a_0 + a_1) \frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} = a_1 \eta \frac{v_+ - v_-}{\delta} + \frac{\hat{\varepsilon} + \varepsilon}{2}.$$

4. Отражение и прохождение волны. Верификация вычислительных алгоритмов и программ проводилась путем сравнения результатов расчетов с точным решением задачи об отражении и прохождении монохроматической волны через прослойку между двумя протяженными блоками, занимающими левое и правое полупространства. В этой задаче неизвестными являются зависящие от частоты волны ω коэффициенты прохождения $A(\omega)$ и отражения $B(\omega)$. Решение уравнений (1) при $x < 0$ представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн:

$$v = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + Bf\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad \sigma = -zf\left(t - \frac{x}{c}\right) + Bzf\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

где $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ — функция, определяющая форму падающей волны. При $x > 0$ решение соответствует прошедшей волне: $v = Af\left(t - \frac{x}{c}\right)$, $\sigma = -zAf\left(t - \frac{x}{c}\right)$. В случае упругой прослойки при $x = 0$ выполняются уравнения (2):

$$\rho_0 \delta (1 + A + B) \frac{df}{dt} = 2z(1 - A - B)f, \quad a_0 \delta z (1 + A - B) \frac{df}{dt} = 2(1 - A + B)f,$$

из которых следует, что $A = \frac{1 - \alpha\beta}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$, $B = \frac{\beta - \alpha}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$, где $\alpha = \frac{i\omega\delta}{2c_0} \frac{z_0}{z}$, $\beta = \frac{i\omega\delta}{2c_0} \frac{z}{z_0}$. Полученные формулы, в частности, показывают, что при одинаковых импедансах z и z_0 выполняются равенства

$|A| = 1$ и $B = 0$. В этом случае падающая волна проходит через прослойку беспрепятственно и без отражения, что является простейшим тестом правильности работы алгоритма и программы.

В случае вязкоупругой прослойки решение может быть получено из приведенного выше решения заменой модуля упругой податливости a_0 в выражении для коэффициента $\beta = \frac{1}{2} i\omega a_0 z \delta$ комплексным модулем, равным $a_0 + \frac{1}{i\omega\eta}$ в модели Максвелла, $\frac{a_0}{1 + i\omega a_0 \eta}$ в модели Кельвина–Фойхта и $\frac{a_0 + a_1 + i\omega a_0 a_1 \eta}{1 + i\omega a_1 \eta}$ в модели Пойнтинга–Томсона.

На рис. 4 приведены графики зависимости коэффициентов прохождения A и отражения B от безразмерной частоты $\bar{\omega} = \omega\delta/c_0$ для прослойки из упругого материала (кривые 1) и из вязкоупругих материалов Максвелла (кривые 2), Кельвина–Фойхта (кривые 3) и Пойнтинга–Томсона (кривые 4). Отношение акустических импедансов $z_0/z = 0.326$ задано исходя из расчета по механическим параметрам горной породы с микроразрушенными прослойками. Значение безразмерного коэффициента вязкости $\bar{\eta} = \eta/(z_0 \delta)$ во всех моделях принято равным единице. Отклонение этого коэффициента от единицы приводит к результатам, которые легко предсказать, рассматривая реологические схемы моделей на рис. 3. В модели Максвелла при уменьшении вязкости коэффициент прохождения низкочастотных волн стремится к нулю, а коэффициент отражения — к единице, что соответствует отражению от свободной поверхности. Высокочастотные волны проходят и отражаются от прослойки, так как в уравнениях прослойки учитываются силы инерции. При увеличении вязкости кривые 2, отвечающие решению в рамках модели Максвелла, приближаются к кривым 1 для упругой прослойки. В модели Кельвина–Фойхта такой же эффект наблюдается при уменьшении вязкости. При ее увеличении коэффициент прохождения стремится к единице, а коэффициент отражения — к нулю. Волна проходит через прослойку беспрепятственно. Однако это так только для низкочастотных волн, высокочастотные волны практически не проходят через прослойку из-за диссипации механической энергии. В модели Пойнтинга–Томсона с увеличением вязкости кривые 4 также приближаются к кривым 1, а при ее уменьшении до нуля получаются предельные кривые, которые соответствуют решению для упругой прослойки с модулем упругой податливости $a_0 + a_1$.

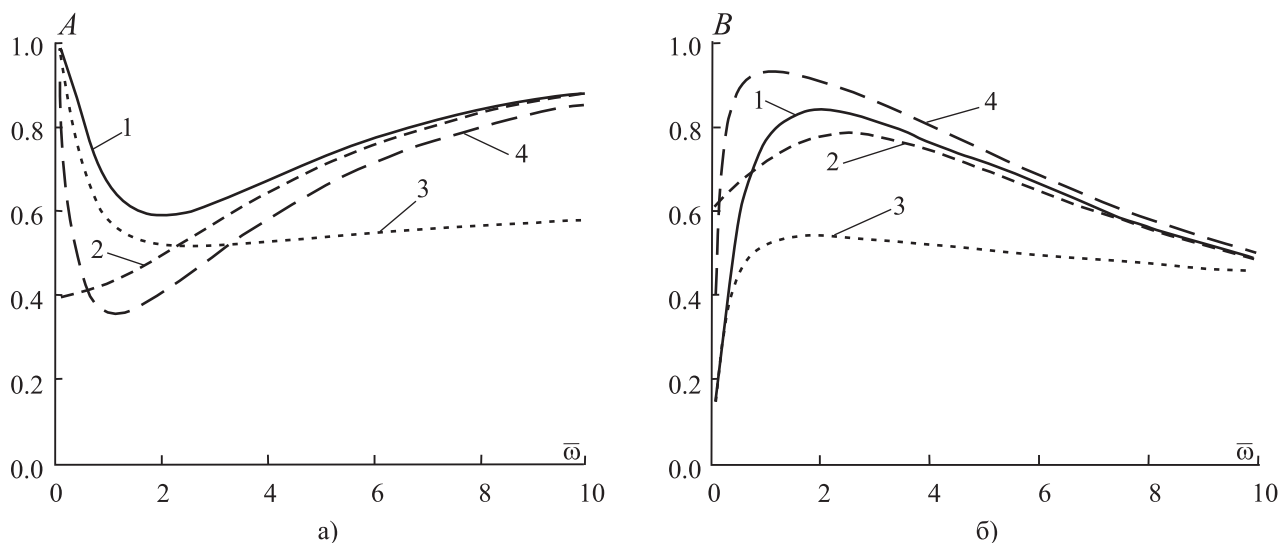


Рис. 4. Зависимости коэффициентов прохождения (а) и отражения (б) волны от частоты: 1) прослойка из упругого материала, 2) прослойка из вязкоупругого материала Максвелла, 3) прослойка из материала Кельвина–Фойхта, 4) прослойка из материала Пойнтинга–Томсона

Решение задачи об отражении и прохождении волны имеет самостоятельный интерес, поскольку с его помощью можно оценить диапазон частот, в котором слоистость среды оказывает заметное влияние на общую волновую картину. Сравнение точных и численных решений для низкочастотных волн, длины которых существенно больше толщины прослойки, показало хорошее соответствие результатов.

5. Параллельные вычислительные алгоритмы. Алгоритмы для расчета вязкоупругих прослоек реализованы в виде подпрограмм, предназначенных для численного исследования двумерных и трехмерных задач динамики упругопластических и сыпучих сред, и включены в комплексы параллельных программ, описанные в [12–14]. Эти комплексы ориентированы на многопроцессорные системы кластерного типа. В них в плоской и пространственной постановках решаются краевые задачи, описывающие процессы распространения волн напряжений и деформаций в блочных средах, составленных из разнородных

материалов. Ранее на межблочных границах ставились условия непрерывности векторов скорости и напряжения, что соответствует идеальной склейке блоков. В обновленном варианте имеется возможность выбора условий контакта через тонкие вязкоупругие прослойки, реологические свойства которых описываются приведенными схемами.

Моделирование контакта выполняется на основе системы уравнений (2) и ее обобщений, учитывающих вязкие свойства материала прослоек. Системы записываются в отдельности для нормальных и касательных по отношению к поверхности раздела напряжений и скоростей. При численном решении этих систем применяются алгоритмы с независимыми для продольных и поперечных волн шагами по времени.

Кроме того, в одномерном варианте модели выполнено распараллеливание алгоритмов для вычислительных систем на графических ускорителях по технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture). В результате такого распараллеливания программы позволили проводить быстрые расчеты задач исключительно высокой размерности, которая для персональных компьютеров и рабочих станций практически недостижима.

Основной единицей исполняемого кода программы в CUDA является так называемое ядро. Приложение состоит из нескольких ядер, написанных на расширении языка C/Fortran с дополнительными переменными и функциями, осуществляющими параллельные вычисления. Вычислительная нагрузка распределяется между блоками сетки графического устройства, которые, в свою очередь, состоят из нитей. Каждой нити соответствует одна ячейка расчетной области. Используется 1D-схема разбиения области по блокам, что позволяет достичь оптимальной загрузки видеокарты при решении пространственно одномерных задач. Сначала выполняется ядро, реализующее граничные условия и шаг “предиктор” разностной схемы для каждого слоя. Независимо от него выполняется ядро, осуществляющее шаг “предиктор” схемы в прослойках. После выполнения этих ядер производится синхронизация блоков графического устройства, которая обеспечивает корректное вычисление предикторных величин во всей расчетной области. Последним выполняется ядро, реализующее шаг “корректор” разностной схемы.

6. Методические расчеты. Для проверки работоспособности алгоритмов и программ выполнены расчеты плоских продольных волн, вызванных кратковременными и длительными П-образными и Λ-образными импульсными воздействиями на границе слоистой среды, составленной из 512 слоев горной породы с микроразрушенными упругими прослойками. Расчеты проводились после перехода в системе уравнений к безразмерным переменным при следующих значениях параметров: $\rho_0/\rho = 0.76$, $a_0/a = 7.17$, $\delta/h = 0.027$. Равномерная разностная сетка в слоях состояла из 16 узлов. В каждой прослойке в соответствии с предлагаемым методом использовалась одна ячейка. Выбор целочисленных параметров в виде степеней двойки связан со спецификой программирования и распределения памяти в CUDA. Расчеты выполнялись на восьмиядерном компьютере, оснащенный графической видеокартой Tesla C2050.

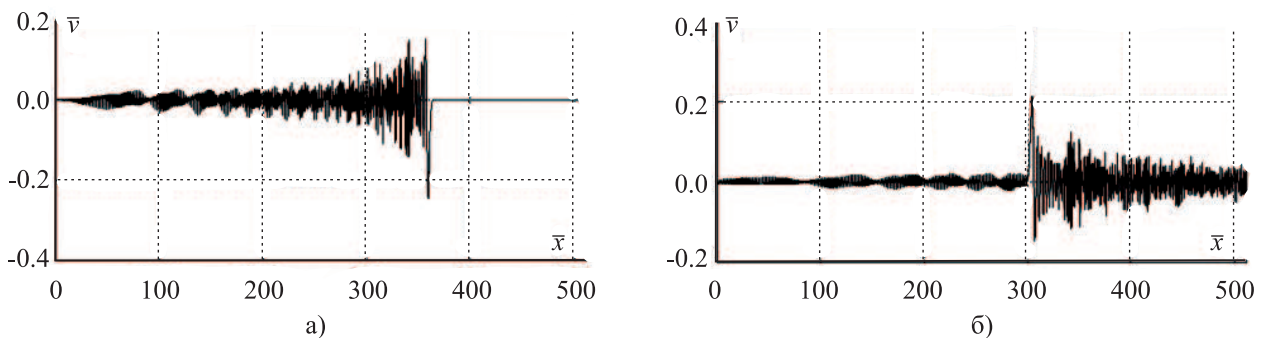


Рис. 5. Распределение скорости за фронтом падающей (а) и отраженной (б) волн, вызванных в слоистой среде воздействием короткого импульса

На рис. 5 и 6 приведены зависимости безразмерной скорости частиц \bar{v} от пространственной координаты, отнесенной к толщине слоя h , в задаче о действии Λ-образного импульса давления. Импульс единичной амплитуды действовал на левой границе расчетной области, правая ее граница считалась неподвижной. Рис. 5 соответствует длительности импульса, равной времени прохода упругой волны через один слой, рис. 6 – в два с половиной раза большей длительности. На рис. 5 а и 6 а изображены профили скорости на момент прохождения падающей волной примерно 370 слоев (6000-й шаг по времени основной схемы). На рис. 5 б и 6 б отраженная волна проходит в обратном направлении примерно 200 слоев (12 000-й шаг основной схемы).

Приведенные результаты демонстрируют качественное отличие волновой картины в слоистых средах по сравнению с однородной средой. Это отличие на начальном этапе заключается в появлении отраженных от прослоек волн — характерных осцилляций за фронтом волны нагружения по мере ее прохождения через границы раздела. Со временем, после многократного переотражения за фронтом головной волны возникает стационарная волновая картина, так называемая “маятниковая” волна, существование которой предсказывалось в работе [2].

Из сопоставления рис. 5 и 6 видно, что с увеличением длительности импульса амплитуда головной волны увеличивается, возрастая до единицы при дальнейшем увеличении длительности, а амплитуда осцилляций за фронтом убывает и стремится к нулю. Это связано с тем, что волны, длины которых значительно больше толщины прослойки, практически не отражаются от прослоек. Таким образом, обнаружить ослабленную микроструктуру слоистой или блочной среды можно только с помощью достаточно коротких волн.

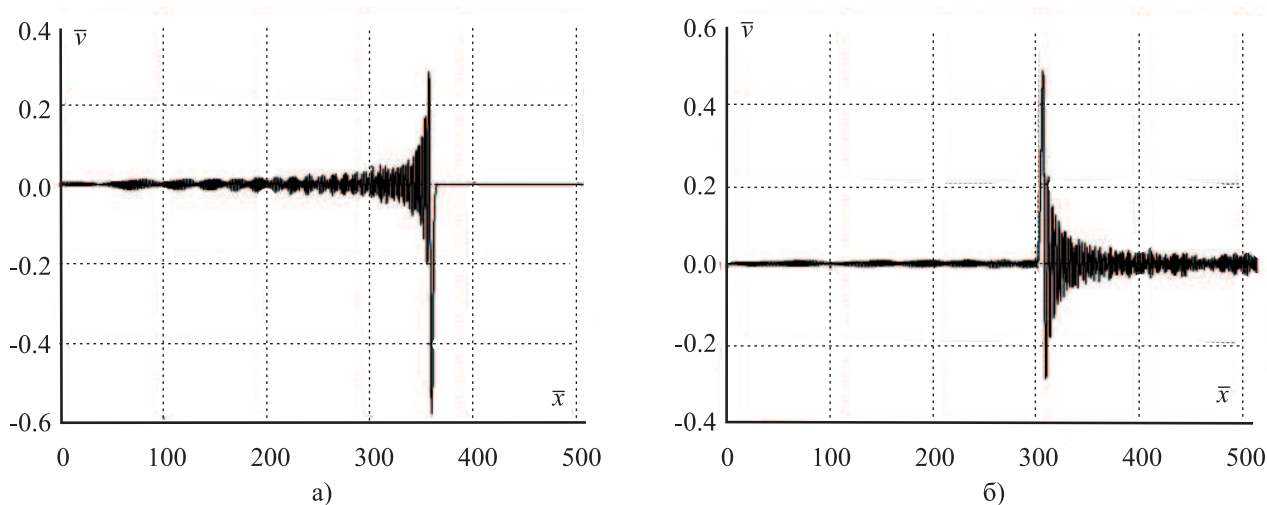


Рис. 6. Распределение скорости за фронтом падающей (а) и отраженной (б) волн, вызванных в слоистой среде воздействием длительного импульса

В процессе тестирования алгоритмов проводились аналогичные расчеты для упругих прослоек, импеданс которых совпадает с импедансом слоев, а плотность на порядок ниже их плотности. В этом случае волна, вызванная импульсным воздействием на границе, проходит через прослойки, как и в однородной среде, в виде уединенного импульса, но ее скорость естественным образом корректируется, поскольку скорости распространения возмущений в слое и в прослойке сильно различаются. Амплитуда волны практически не искажается на протяжении сотен тысяч шагов по времени основной схемы, если только шаги τ и τ_0 соответствуют предельно допустимым значениям по условию Куранта–Фридрихса–Леви. С их уменьшением амплитуда волны в слоистой среде очень быстро затухает. Так проявляется схемная вязкость.

Большая серия методических расчетов показала, что если механические параметры материалов, а также толщины слоев и прослоек не позволяют производить сбалансированный расчет задачи с предельно допустимыми шагами по времени, то для достижения удовлетворительной точности необходимо шаг в прослойке выбрать предельным, а в основном слое применить схему повышенной точности с реконструкцией решения, производя расчет с шагом ниже предельного значения.

Заметим в заключение, что вопрос о выборе расчетной схемы при численном решении задач о распространении высокочастотных волн в слоистых средах является исключительно важным и тонким. В этих задачах неприменимы немонотонные разностные схемы типа схемы Неймана–Рихтмайера (схемы “крест”) на разнесенных сетках, порождающие паразитные осцилляции на фронте головной волны, и монотонные схемы, обладающие искусственной вязкостью, в которых амплитуда неадекватно затухает по мере прохождения волны через достаточно большое количество слоев.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11–01–00053), Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация” и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 40.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовский М.А.* Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. 1979. **247**, № 4. 829–831.
2. *Курленя М.В., Опарин В.Н., Востриков В.И.* О формировании упругих волновых пакетов при импульсном возбуждении блочных сред. Волны маятникового типа // Докл. АН СССР. 1993. **333**, № 4. 3–13.
3. *Александрова Н.И., Черников А.Г., Шер Е.Н.* Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2005. № 3. 46–55.
4. *Александрова Н.И., Шер Е.Н., Черников А.Г.* Влияние вязкости прослоек на распространение низкочастотных маятниковых волн в блочных иерархических средах // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2008. № 3. 3–13.
5. *Сарайкин В.А.* Учет упругих свойств блоков в низкочастотной составляющей волны возмущений, распространяющейся в двумерной среде // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 2009. № 3. 9–24.
6. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972.
7. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
8. *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975.
9. *Attenbach H., Maugin G.A., Erofeev V.* Mechanics of generalized continua. Ser.: Advanced Structured Materials. **7**. Berlin–Heidelberg: Springer, 2011.
10. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
11. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
12. *Садовская О.В., Садовский В.М.* Параллельная реализация алгоритма для расчета упругопластических волн в сыпучей среде // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 2. 86–93.
13. *Садовская О.В., Садовский В.М.* Параллельные вычисления в пространственных задачах динамики сыпучей среды // Вестн. Красноярского гос. ун-та. 2006. № 1. 215–221.
14. *Садовская О.В., Садовский В.М.* Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.

Поступила в редакцию
30.09.2011
