УДК 512.531; 515.124; 004.2

О СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ В РЕШЕТОЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}_c^n$

Г. Г. Рябов[1], В. А. Серов[1]

В предлагаемой работе методы кодирования кубических структур для n-куба и кубической n-окрестности в решеточном пространстве $\mathbb{R}_c^n$ развиваются с более общих позиций языкового формализма. Рассматривается выбор алфавита и его связь с перечислительными задачами на кубических структурах для кубической n-окрестности радиуса r (r — целое) в целях компьютерного конструирования кубических комплексов и многообразий с заданными свойствами. Обсуждается вопрос отображения подмножеств $\mathbb{Z}$ на конечные хаусдорфовы метрические пространства, точками которого являются все k-мерные грани n-куба. В заключение обсуждаются вопросы эффективности символьных вычислений при компьютерной реализации. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09–07–12135–офи_м).

Ключевые слова: решеточное пространство $\mathbb{R}_c^n$, представления k-граней в n-кубе, метрика Хаусдорфа–Хэмминга, посимвольные операции.

1. Введение. Более 25 лет назад С. П. Новиковым были выдвинуты задачи, относящиеся к исследованию решеточного пространства $\mathbb{R}_c^n$, содержащего стандартные n-кубы. В основополагающих работах Н. П. Долбилина, М. А. Штанько, М. И. Штогрина [1] рассмотрены вопросы вложения абстрактного кубического комплекса в $\mathbb{R}_c^n$. В работах М. Деза и М. Штогрина [2] детально изучено вложение мозаик в решетки. Кубические структуры играют важную роль во многих комбинаторно-топологических задачах, связывая симплициальные и кубические комплексы конусными построениями, что всесторонне изложено В. М. Бухштабером и Т. Е. Пановым [3]. В работах Р. Стенли [4], А. А. Гайфуллина [8] и С. А. Мелихова [9], связанных непосредственно с генерацией многообразий, также широко используются кубические комплексы и их свойства.

Эти работы характеризует, если можно так выразиться, фундаментальное направление исследований. Это направление при изучении симплициальных, кубических и иных комплексов выработало набор понятий и эффективных конструкций, которые позволяют на их основе создавать конструкции следующих уровней сложности. Такие понятия, как *link*, *star*, ∂ (граница), *cone* и др., многочисленные графические средства (стрелки и т.п.) для обозначений разнообразных отображений во многих случаях сокращают и делают более доступным научное изложение. Возникает вопрос: при использовании тех или иных методов для компьютерной реализации идти по пути интерпретации на машине таких понятий и условных обозначений и далее на основе такой интерпретации строить конструктивные алгоритмы построения тех или иных комплексов и многообразий или, пользуясь фундаментальными результатами и конкретными свойствами объектов, применяемых для построения, постараться найти адекватные языковые формализмы, которые бы позволяли иметь эффективную (высокопроизводительную) машинную реализацию? Скорее всего, этот вопрос говорит о двустороннем движении от фундаментальных основ геометрии и топологии к машинным реализациям (точнее, к Computer Science) и от Computer Science к решению задач генерации геометрических и топологических объектов (прежде всего прикладного характера).

Предложенные в [10–12] методы представления объектов в решеточном пространстве $\mathbb{R}_c^n$, содержащем стандартные n-кубы, направлены в конечном итоге на машинную реализацию операций, которые позволяют вычислять связность и метрику посимвольными операциями над n-буквенными словами (во многих случаях потенциально за один такт). Грубо говоря, каждой k-грани в некоторой области в $\mathbb{R}_c^n$ биективно сопоставлено n-буквенное слово, содержащее полную информацию о структуре грани и ее местоположении в этой области.

Прикладные задачи требуют все более изощренных алгоритмических методов построения комплексов и многообразий. Так, в проекте MITgcm [6] применение кубоидной конформной сферы можно рассматривать как вариант использования двумерного многообразия в качестве глобальной схемы для численных расчетов. Такая схема объединяет сеточные методы, используемые в различных составляющих этой системы.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; Г. Г. Рябов, зав. лабораторией, e-mail: genryabov@yandex.ru; В. А. Серов, науч. сотр., e-mail: v_serov_@mail.ru

Следует также отметить и еще одну ветвь математического интереса к комбинаторным геометрическим и топологическим задачам. Так, в рамках направления “пространственная логика” в последние годы активно развиваются конструкции формальных языков, основанные на описании топологических отношений (прежде всего связности) между объектами, расположенными в пространстве [5]. Эти исследования связаны, с одной стороны, с проблемой искусственного интеллекта, а с другой — могут иметь много общего с формальными представлениями конструктивного мира [7] кубических объектов, в конечном счете ориентированного на эффективную компьютерную реализацию задач синтеза таких объектов при заданных метрических и топологических свойствах. Возможный мост между этими направлениями можно представить в виде следующей цепочки:

задачи искусственного интеллекта (ИИ) →
→ пространственная топологическая логика →
→ конструктивный мир кубических структур →
→ методы компьютерной реализации.

Отметим общую черту, объединяющую эти подходы, — алгебраическое представление рассматриваемых множеств объектов и операций над этими объектами. Так, язык BRCC8 (булево исчисление связности областей) является разновидностью контактной алгебры, а представление k-мерных граней в n-кубе в виде четверичных слов (кубантов) приводит к образованию полугруппы с единицей — моноида [10]. В конечном итоге эти представления замыкаются на компьютер, при этом комбинаторные сложности, как правило, приводят к необходимости использования самых современных суперкомпьютеров. Реальная производительность в таком случае зависит от распараллеливаемости (совмещения во времени) выполняемых операций и алгоритмов. И если алгебраические представления позволяют распараллеливать вычисления, то правомерно говорить об алгебраизации самих супервычислений. Наиболее емко основная цель этих исследований выражена в [5]: “Надежда состоит в том, что использование языкового формализма, как удобного основания для представления определенного уровня геометрических объектов, позволит устранить трудоемкие машинные действия по их реконструкции в терминах множества точек”. В более общем виде это высказывание можно трактовать как пожелание более глубокого развития математического обеспечения, которое может облечь в формально языковые структуры представления семейств объектов и их свойств (чаще всего алгебраическими средствами), которые не только глубоко содержательны, но и удобны для реализации операций над ними в компьютерах архитектур нового поколения. Именно с такими целями рассматривались вопросы кодирования k-мерных кубических граней и других кубических структур в [10–12].

Краткий перечень предыдущих результатов можно изложить следующим образом.

1) Введено понятие кубантов — множества всех n-разрядных слов с разрядами из алфавита $\{0; 1; 2\}$, которое биективно всем k-мерным граням ($k = 0, 1, \dots n$) n-куба; размерность грани k равна числу символов 2 в слове, а координаты грани в n-кубе определяются разрядами с 0 и 1;

2) На кубантах определена поразрядная операция умножения, результатом которой является кубант, соответствующий общей грани (если грани пересекаются) или длине минимального пути (по ребрам) между соответствующими гранями, когда нет пересечения; алфавит расширен до $\{\emptyset; 0; 1; 2\}$;

3) Кубанты на расширенном алфавите образуют полугруппу с единицей — моноид;

4) Предложен алгоритм вычисления хаусдорфовой метрики на кубантах, который является обобщением метрики Хэмминга для двоичных слов, тем самым n-куб со всеми гранями — конечное хаусдорфово–хэммингово метрическое пространство;

5) В [12] понятие кубантов расширено до кросс-кубантов на основе алфавита $\{\underline{2}; \underline{1}; 0; 1; 2\}$. Множество всех n-разрядных слов с этим алфавитом биективно всем граням кубической n-окрестности (радиуса $r = 1$). Большинство методов для кубантов переносится на кросс-кубанты. С применением кросс-кубантов построен численный пример многообразия трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$. Обсуждаются вопросы конструирования кубических комплексов с определенными свойствами в рамках самого пространства $\mathbb{R}^n_c$. Сначала рассматриваются вопросы создания формального языка для описания таких структур, которые развивают методы кодирования кубических структур в рамках единичного n-куба. Затем рассматриваются подходы к языковым представлениям замкнутых кубических многообразий. Для примера построения 3-сферы единичного радиуса в [12] в приложении к статье приведена матрица смежностей ее вершин. В последней части обсуждаются вопросы компьютерной реализации.

2. Формальные определения и представления. На вещественной прямой $\mathbb{R}$ рассматривается два множества: множество целых точек $\{-r; -r+1; \dots; -1; 0; 1; \dots; r\}$ и множество единичных интервалов между ними $\big\{[-r; -r+1], [-r+1; -r+2], \dots, [-1; 0], [0; 1], \dots, [r-1; r]\big\}$. Будем считать, что каждой точке соответствует некоторая $2r+1$ буква из алфавита, а каждому интервалу — $2r$ других букв, так что общий алфавит содержит $4r+1$ букв. Для прозрачности излагаемых построений будем оперировать с условными буквами, состоящими из нескольких символов, которые однозначно соответствуют точкам и единичным отрезкам, считая их за буквы для слов фиксированной длины n. В таких словах номер буквы в слове, считая слева направо и начиная с 1, будем иногда называть номером разряда n-разрядного $(4r+1)$-ичного слова.

Примем для наглядности такую наиболее прозрачную форму нотации. Каждая такая буква имеет следующий однородный вид: признак, целое число, разделитель; здесь признаком p обозначается целая точка, d — единичный отрезок и m — длина пути (в единичных отрезках) между парой точек, точкой и отрезком, двумя отрезками. Целое число, следующее за признаком p, равно координате точки на прямой, максимальной по модулю координате интервала (при признаке d) и числу единичных интервалов при признаке m. Таким образом, буквы могут иметь вид $p-3$, $d+2$, $d-1$ и $m5$, что соответствует точке -3, интервалам $[1;2]$ и $[0;-1]$ и длине минимального пути, равного 5 (например, между $p-3$ и $p+2$). Между буквами в слове применяется разделитель $/$.

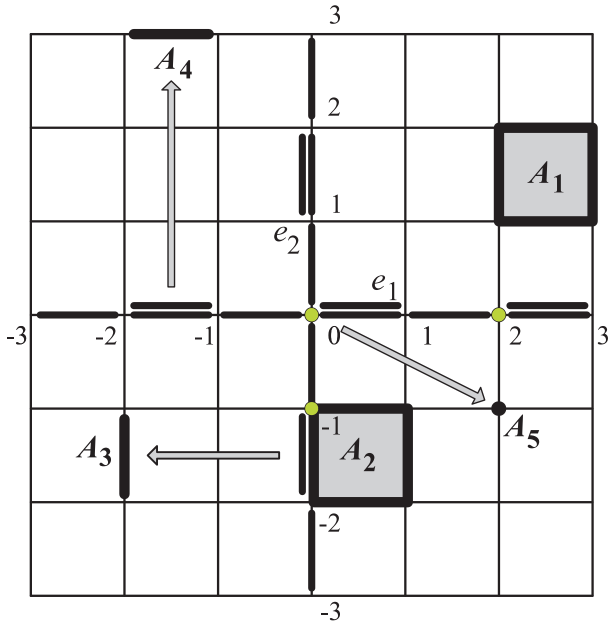


Рис. 1. Грани в кубической 2-окрестности радиуса $r=3$ и их формальное представление:
$A_1 = d+3/d+2/$ — квадратная грань $[2;3]\times[1;2]$,
$A_2 = d+1/d-2/$ — квадратная грань $[0;1]\times[-2;-1]$,
$A_3 = p-2/d-2/$ — ребро, $A_4 = d-2/p+3/$ — ребро,
$A_5 = p+2/p-1/$ — вершина(целая точка) $2;-1$

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots e_n$ и пусть $A = a_1, a_2, \dots a_i, \dots a_n$ — n-разрядное слово, в котором a_i однозначно соответствует e_i. Если $a_i = d+s$, то этому слову соответствует единичный интервал $[s-1, s]$, коллинеарный e_i. Если $a_j = p+s$, то этому слову соответствует перенос (трансляция) вдоль e_j на s единиц. Тогда каждое слово можно рассматривать как “генетический код” двух действий — декартова произведения единичных отрезков и параллельного переноса (трансляции) этого произведения. Формально для грани k-размерности в точке p можно записать $f(k,p) \to \prod\limits_{\substack{i:d\in a_i,\\ |i|=k}} \mathrm{I}(e_i) + \sum\limits_{\substack{j:d\notin a_j,\\ |j|=n-k}} \mathrm{T}s_j(e_j)$, где $\prod$ — декартово произведение k единичных отрезков, коллинеарных e_i для i букв с признаком интервала, а $\sum \mathrm{T}$ — трансляция на s_j вдоль e_j для j букв, не содержащих признака интервала (т.е. содержащих целое число). Графическая интерпретация для случая $n=2$ и $r=3$ представлена на рис. 1.

Все n-разрядные слова с буквами из $(4r+1)$-ичного алфавита биективны всем граням размерностей от 0 (целые точки) до n (n-мерный единичный куб) в области $\prod\limits_{i=1}^{n} 2r\mathrm{I}(e_i)$, где $\prod$ — декартово произведение и $2r\mathrm{I}(e_i)$ — интервал $[-r;r]$ вдоль e_i. Отсюда непосредственно следует, что общее число граней для кубической n-окрестности радиуса r равно $F(n,r) = (4r+1)^n$, а число граней размерности k равно $F(n,r,k) = \mathrm{C}(n,k)(2r)^k(2r+1)^{n-k}$. Для случая $r=1$ предложенная конструкция совпадает с единичной кубической n-окрестностью, а n-разрядные слова соответствуют алфавитам, введенным в [10, 12] для *кубантов* и *кросс-кубантов*. Поскольку в данном случае рассматривается обобщение, то целесообразно в дальнейшем ограничиться для рассматриваемого множества слов общим названием *кубанты*. Кубант для $\mathbb{R}^n_c$ — это слово из n букв из конечного алфавита (при рассмотрении компьютерных реализаций можно говорить не о “букве”, а о “разряде”, разумеется не двоичном, код которого представляет букву). Поскольку излагаемые вопросы находятся на стыке формальных языков, кодирования и компьютерных реализаций, оправдано некоторое терминологическое смешение. Так, буква алфавита и символ, номер буквы в слове и номер разряда в слове.

По аналогии с [10] вводится операция умножения. Ниже приведена табл. 1 (в связи с коммутативностью показана ее половина) *поразрядного* умножения ($\otimes$) для кубической окрестности радиуса 3, которая по сути представляет собой фрагмент интервальной арифметики.

Перечислим основные свойства произведения двух кубантов A и B:

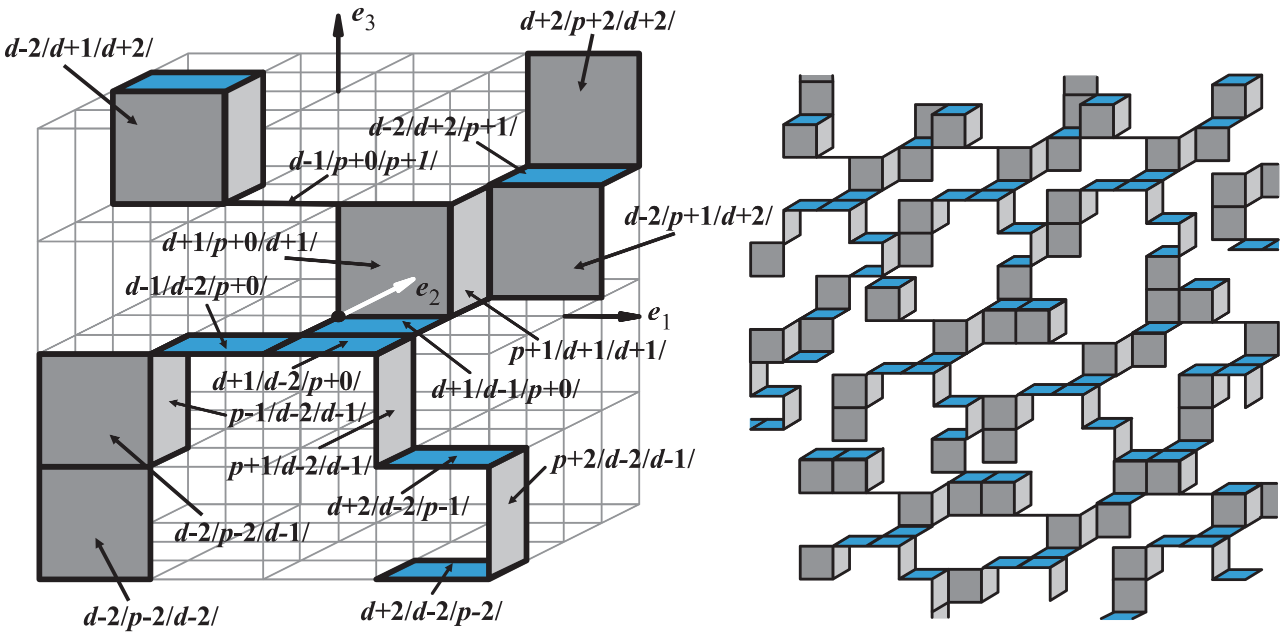
Таблица 1

Поразрядное умножение ($\otimes$) для кубической окрестности радиуса 3

	$p-3$	$d-3$	$p-2$	$d-2$	$p-1$	$d-1$	$p0$	$d+1$	$p+1$	$d+2$	$p+2$	$d+3$	$p+3$
$p-3$	$p-3$	$p-3$	$m1$	$m1$	$m2$	$m2$	$m3$	$m3$	$m4$	$m4$	$m5$	$m5$	$m6$
$d-3$		$d-3$	$p-2$	$p-2$	$m1$	$m1$	$m2$	$m2$	$m3$	$m3$	$m4$	$m4$	$m5$
$p-2$			$p-2$	$p-2$	$m1$	$m1$	$m2$	$m2$	$m3$	$m3$	$m4$	$m4$	m5
$d-2$				$d-2$	$p-1$	$p-1$	$m1$	$m1$	$m2$	$m2$	$m3$	$m3$	m4
$p-1$					$p-1$	$p-1$	$m1$	$m1$	$m2$	$m2$	$m3$	$m3$	m4
$d-1$						$d-1$	$p0$	$p0$	$m1$	$m1$	$m2$	$m2$	$m3$
$p0$							$p0$	$p0$	$m1$	$m1$	$m2$	$m2$	m3
$d+1$			симметрия					$d+1$	$p+1$	$p+1$	$m1$	$m1$	m2
$p+1$									$p+1$	$p+1$	$m1$	$m1$	$m2$
$d+2$										$d+2$	$p+2$	$p+2$	$m1$
$p+2$											$p+2$	$p+2$	$m1$
$d+3$												$d+3$	$d+3$
$p+3$													$p+3$

1) если грани, соответствующие A и B, имеют общую грань, то $A\otimes B$ равно кубанту C и соответствует общей грани;

2) если нет общей грани, то C содержит буквы с признаком m; сумма чисел в буквах с признаком m равна длине минимального пути (по ребрам) $\mathrm{L}_{\min}(A;B)$ между гранями, соответствующими кубантам A и B.



а) б)

Рис. 2. 3-комплекс (грань $d-2/d+1/d+2/$ — трехмерна) в 3-окрестности $r=2$ (а); склейка окрестностей с комплексами (б)

В дальнейшем комплекс из кубантов в n-окрестности радиуса r будем обозначать $Q(n,r)$. Размерность комплекса будем считать равной максимальной размерности грани (кубанта), включенного в комплекс. Так, комплекс $Q(3;2)=\{A_1,A_2,\dots A_{17}\}$ есть 3-комплекс в 3-окрестности радиуса 2 (рис. 2а). Для этого комплекса имеем

$A_1 = d+2/p+2/d+2/;\quad A_2 = d+2/d+2/p+1/;\quad \ldots;\quad A_{17} = d-2/p-2/d-2/;$

$A_1 \otimes A_2 = d+2/p+2/p+1/;$ (общая грань — ребро); $\quad A_1 \otimes A_{17} = m2/m4/m2/;\quad \to \mathrm{L}_{\min}(A_1; A_{17}) = 8.$

3. Вычисление хаусдорфовой–хэмминговой (НН) метрики. Обобщая алгоритмы вычисления $\rho_{\text{НН}}$, изложенные в [11, 12], рассмотрим произведение двух произвольных кубантов A и B и поразрядные действия для вычисления $\rho_{\text{НН}}$. Итак, рассматриваются $A \otimes B^*$ и $A^* \otimes B$, где $*$ означает, что в разрядах помеченного кубанта перед самим действием умножения могут происходить изменения в зависимости от значений соответствующих разрядов другого кубанта. Пусть x и y — положительные целые, $x < r$; $y < r$. Тогда эти изменения в разрядах (для $A \otimes B^*$) проводятся по следующим правилам:

1. $a_i = p+x;\ b_i = d+y;\ x \geqslant y;\quad \to\quad a_i^* = p+(y-1);\ x<y;\quad \to\quad a_i^* = p+y;$
2. $a_i = d+x;\ b_i = d+y;\ x > y;\quad \to\quad a_i^* = p+(y-1);\ x<y;\quad \to\quad a_i^* = p+y;$
3. $a_i = p+x;\ b_i = d-y;\quad \to\quad a_i^* = p-y;$
4. $a_i = p-x;\ b_i = d-y;\ x > y;\quad \to\quad a_i^* = p-(y-1);\ x<y;\quad \to\quad a_i^* = p-y;$
5. $a_i = p-x;\ b_i = d+y;\quad \to\quad a_i^* = p+y;$
6. $a_i = d-x;\ b_i = d-y;\ x > y;\quad \to\quad a_i^* = p-(y-1);\ x<y;\quad \to\quad a_i^* = p-y.$

В остальных случаях изменений не происходит.

Затем следует операция $A \otimes B^*$ и вычисляется $\mathrm{L}_{\min}\big(A \otimes B^*\big)$. Аналогично вычисляется $\mathrm{L}_{\min}\big(A^* \otimes B\big)$ и окончательно: $\rho_{\text{НН}}(A,B) = \max\{\mathrm{L}_{min}(A \otimes B^*), \mathrm{L}_{min}(A^* \otimes B)\}$. Следуя этим правилам для кубантов из вышеприведенного примера, получим $\rho_{\text{НН}}(A_1, A_2) = 1$; $\rho_{\text{НН}}(A_1, A_{17}) = 10$; $\rho_{\text{НН}}(A_2, A_{17}) = 9$. Отметим, что комплексу Q соответствует частично упорядоченное множество $\rho_{\text{НН}}$ для всех пар $\{A_i, A_j \in Q\}$, которое инвариантно относительно движений, сохраняющих структуру Q в $\mathbb{R}^n_c$.

Вычисление $\rho_{\text{НН}}(Q_1, Q_2)$ между комплексами реализуется через вычисления $\rho_{\text{НН}}(A_{1i}, A_{2j})$, $A_{1i} \in Q_1$, $A_{2j} \in Q_2$ и последующими действиями в соответствии с определением хаусдорфовой метрики:

$$\rho_{\text{НН}}(Q_1, Q_2) = \max\left\{\max_{Q_2}\Big\{\mathrm{L}_{\min}\big(A^*_{1i}, A_{2j}\big)\Big\},\ \max_{Q_1}\Big\{\mathrm{L}_{\min}\big(A_{1i}, A^*_{2j}\big)\Big\}\right\}.$$

4. О направлениях развития вычислений на кубантах. Одним из направлений развития в предлагаемой тематике является общий конструктивный подход к генерации многообразий на основе кубических структур, который можно представить в последовательности следующих этапов.

1. Выбор размерности и радиуса кубической окрестности для конструирования исходного кубического комплекса, в котором атлас карт строящегося многообразия будет соответствовать исходным требованиям. Отсюда однозначно следует размер алфавита и кодирование граней.

2. Формальное (языковое) описание кубического комплекса (как множества кубантов) на k-мерных гранях с использованием метрико-топологических зависимостей НН-метрики.

3. Применение к комплексу оператора границы и получение кубического многообразия (кубильяжа) с атласом карт заданного типа.

4. Проецирование кубического многообразия на гладкие тела, заданные аналитическими выражениями или кусочно-гладкими представлениями (составляющими). Представление псевдокубических граней многообразия.

5. Проведение дополнительной дискретизации составляющих многообразия. Такой подход изложен в [12] на примере построения многообразия трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$ единичного радиуса. В табл. 2 приведена сравнительная “анатомия” кубической 4-окрестности и созданной на ее основе такой сферы.

Таблица 2

	Вершины	Ребра	2-грани	3-грани	4-грани
Кубическая 4-окрестность	81	216	216	96	16
3-мерная сфера	80	208	192	64	0

Матрица смежностей вершин такой сферы приведена на рис. 3. По этой матрице легко восстанавливаются все k-грани и, следовательно, атлас карт.

Другим направлением развития может стать отображение целых чисел на кубические n-окрестности радиуса r. Для пояснения рассмотрим 3-окрестность радиуса $r = 1$. Все грани такой окрестности однозначно кодируются 3-разрядными пятеричными числами. В предложенной нотации алфавит имеет вид $\{p-1, d-1, p0, d+1, p+1\}$. Поставим этому алфавиту в однозначное соответствие алфавит $\{0; 1; 2; 3; 4\}$, т.е. значения разрядов в обычной пятеричной системе представления чисел. Тогда каждому кубанту (грани)

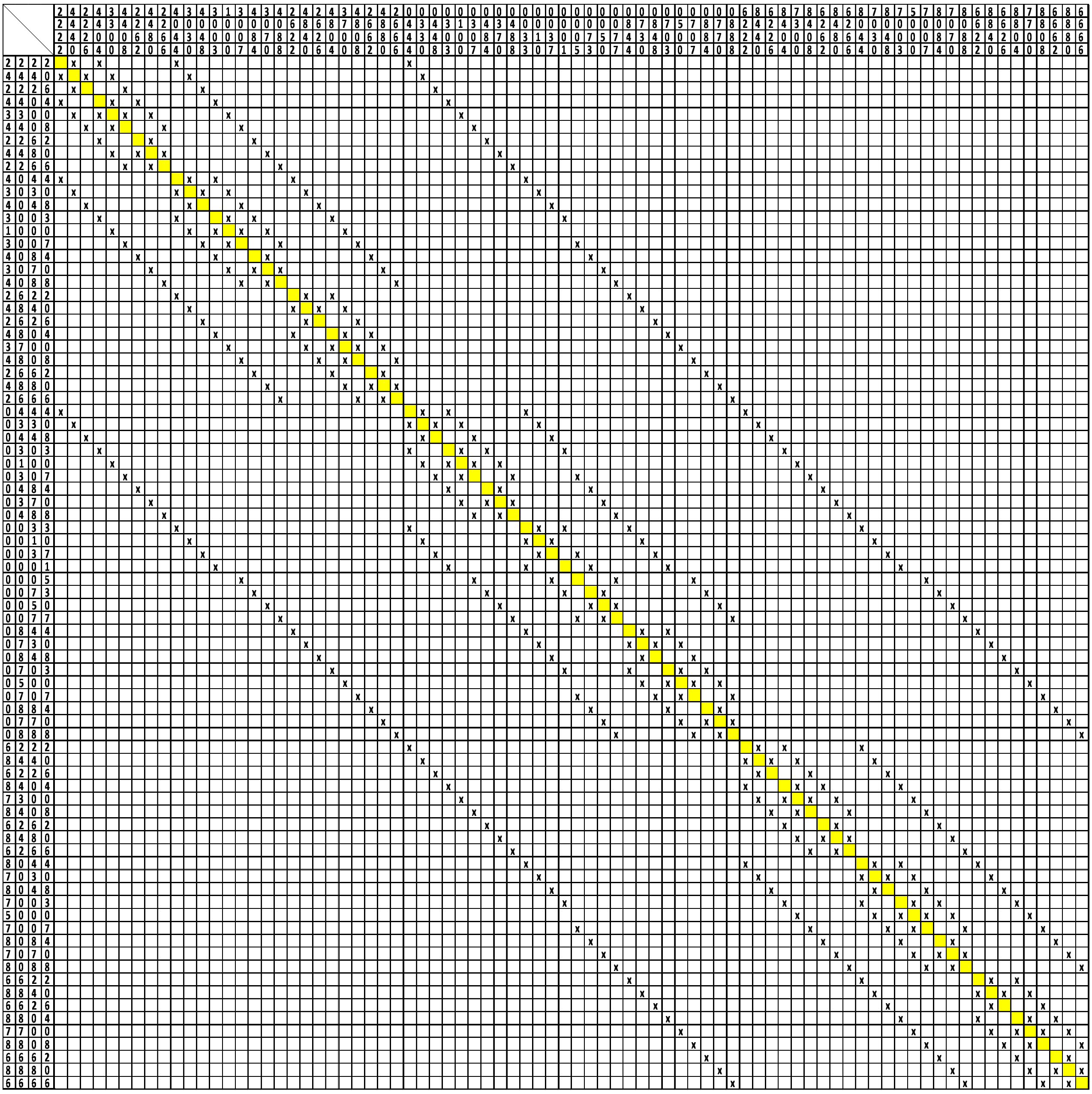


Рис. 3. Матрица смежностей 80 вершин на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ единичного радиуса с указанием их декартовых координат; для компактности представления применена следующая перекодировка координат: $0 \to 0$; $1 \to 1$; $1/2 \to 2$; $1/\sqrt{2} \to 3$; $1/\sqrt{3} \to 4$; $-1 \to 5$; $-1/2 \to 6$; $-1/\sqrt{2} \to 7$; $-1/\sqrt{3} \to 8$

будет однозначно соответствовать целое число из интервала $\left[0; 5^3 - 1\right]$, т.е. числа от 0 до 124. Значительная часть такого отображения показана на рис. 4а и 4б. Поскольку на гранях определена НН-метрика, то ее можно отнести к соответствующим этим граням целым числам и рассматривать эти целые числа как номера граней. Так, на рис. 4в показан лист Мебиуса на квадратных гранях, для которого этот комплекс закодирован как множество чисел в десятичной записи $\{44; 38; 32; 56; 80; 90; 116; 118; 94\}$. При десятичной записи обратный перевод осуществим через запись числа в пятеричном виде. Разумеется, что такое отображение возможно для произвольных n и r.

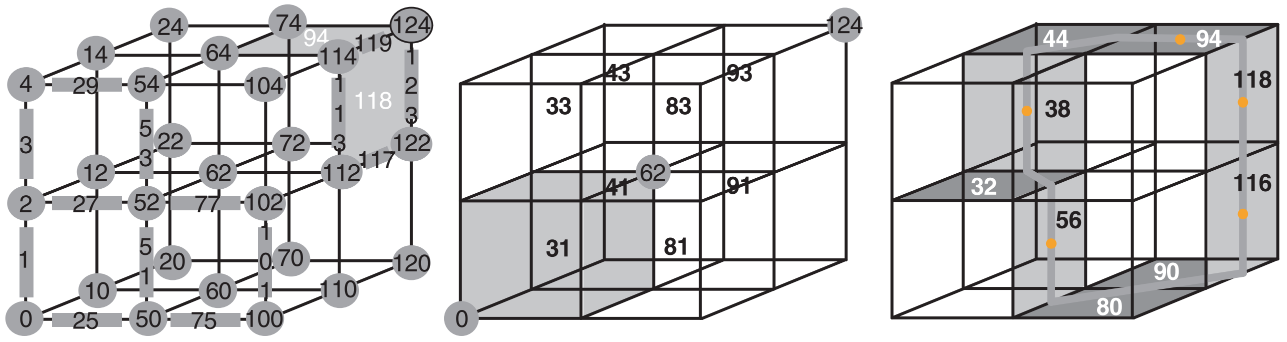
Ниже сформулированы несколько элементарных свойств таких отображений при любых n и r.

1. Четные числа соответствуют граням четной размерности (включая 0), нечетные числа — граням нечетной размерности.

2. Число, соответствующее k-грани, равно полусумме чисел параллельных любых двух $(k-1)$-граней на границе этой грани. Отсюда сумма чисел всех граней границы, деленная на число граней в границе,

также равна числу этой k-грани.

3. При заданном r обозначим множества чисел, относящихся к интервалам $\left[0; (4r+1)^n - 1\right]$ при значениях $n = 1, 2 \dots N$ и однозначно отображаемых в n-окрестности через $\mathrm{Z}_n(r)$. Тогда справедливы включения $\mathrm{Z}_1(r) \subset \mathrm{Z}_2(r) \subset \dots \mathrm{Z}_{n-1}(r) \subset \mathrm{Z}_n(r) \subset \dots$, т.е. НН-метрика на отображенных числах инвариантна относительно размерности n; или, грубо говоря, при увеличении диапазона чисел и переходе к отображению в следующую размерность отображение в предшествующую размерность сохраняется.



а) б) в)

Рис. 4. Отображение множества натуральных чисел $[0; 124]$ на k-грани 3-окрестности радиуса $r = 1$ (а, б); лист Мебиуса на квадратных гранях с отображенными числами (в)

5. О компьютерной реализации. Вычисления на кубантах можно отнести к разряду символьных, которые обладают следующими свойствами.

1. При увеличении размерности пространства кубических структур алфавит остается без изменений.

2. Увеличение объема алфавита связано только с увеличением радиуса кубической n-окрестности.

3. Введение составных букв (признак + целое число) позволяет не ограничивать объем алфавита и иметь точные числа при перечислении граней любой размерности при произвольном r для кубической n-окрестности ($(4r+1)$-ичное кодирование).

4. Основная операция умножения является посимвольной и поэтому имеет сложность $O(n)$, где n — число символов (букв) в кубанте.

5. Алгоритм вычисления НН-метрики для кубантов (граней) в основе своей также имеет посимвольные операции и поэтому имеет сложность $O(n)$.

6. Для машинного представления букв кубантов может быть выбран вариант чисел, отображенных на грани n-окрестности радиуса r в $(4r+1)$-ичном виде.

Следует подчеркнуть, что посимвольный характер операций дает возможность использовать групповые операции над множеством символов одновременно при хранении кубантов в памяти в виде байтовых стрингов. При этом каждый такой стринг может иметь кольцевой сдвиговый (на целое число байтов) механизм, который позволит производить вычисление произведений всех пар кубантов, принадлежащих двум разным комплексам, следующим образом.

Пусть $Q_1 = \{A_1, A_2, \dots A_s\}$, $Q_2 = \{B_1, B_2, \dots B_s\}$ и пусть необходимо вычислить матрицу

$$Q_1 \otimes Q_2 = \begin{pmatrix} A_1 \otimes B_1 \; A_2 \otimes B_2 \dots A_{s-1} \otimes B_{s-1} & A_s \otimes B_s \\ A_1 \otimes B_2 \; A_2 \otimes B_3 \dots \; A_{s-1} \otimes B_s & A_s \otimes B_1 \\ \dots & \\ A_1 \otimes B_s \; A_2 \otimes B_1 \dots A_{s-1} \otimes B_{s-2} & A_s \otimes B_{s-1} \end{pmatrix}.$$

Каждая строка матрицы вычисляется как одна посимвольная операция умножения двух стрингов. Затем — сдвиг на число байтов, соответствующих одному кубанту, и новое умножение. Таким образом, матрица вычисляется за $2s$ операций. Число кубантов в матрице (без букв, соответствующих m из табл. 1) — это множество общих граней у комплексов Q_1 и Q_2. Если это множество пусто, то минимальное положительное число (не может быть 0, так как тогда пересечение не пусто) есть $\mathrm{L}_{\min}(Q_1, Q_2)$.

Для определения $\rho_{\text{НН}}(Q_1, Q_2)$ вычисляются аналогичным образом две матрицы $Q_1^* \otimes Q_2$ с элементами $A_i^* \otimes B_j$ и $Q_1 \otimes Q_2^*$ с элементами $A_i \otimes B_j^*$. В этом случае каждая строка вычисляется за три операции и вся матрица за $3s$ операций. Из каждой матрицы выбирается наибольший элемент из $2s$ элементов и затем наибольший из этих двух. Если иметь операцию определения максимального элемента в строке, то общее число операций составит $2(3s+s)=8s$. Эти оценки позволяют сделать вывод об эффективности вычислений, в которых посимвольная обработка практически реализует параллельные вычисления над множествами кубических структур без разложения их до множеств точек. Так, с ростом размерности пространства сложность операций растет линейно, в то время как число элементов в рассматриваемых структурах растет экспоненциально. Это открывает путь к решению прикладных комбинаторных задач большой размерности. С применением таких методов посимвольной обработки на суперкомпьютере МГУ "Чебышев" рассчитаны матрицы всех парных НН-расстояний для граней кубических окрестностей для размерностей $n = 2 \div 10$. Более детальная графическая интерпретация рассматриваемых методов приведена на сайте http://www.vizcom.srcc.msu.ru/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долбилин Н.П., Штанько М.А., Штогрин М.И.* Кубические многообразия в решетках // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. **58**, вып. 2. 93–107.
2. *Деза М.А., Штогрин М.И.* Вложение графов в гиперкубы и кубические решетки // Успехи матем. наук. 1997. **52**, № 6. 155–156.
3. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
4. *Stanley R.* Combinatoric and commutative algebra. Boston: Birkhäuser, 1996.
5. *Kontchakov R., Pratt-Hartmann J., Wolter F., Zakharyaschev M.* Spatial logics and connectedness predicates // Log. Methods in Comp. Science. 2010. **6**. 1–43.
6. *Marshall J., Adcroft A., Campin J-M., Hill C.* Atmosphere-ocean modeling exploiting fluid isomorphisms // Monthly Weather Review. 2004. **132**, N 12. 2882–2894.
7. *Manin Yu.I.* Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm. March 1999 (arXiv: quant-ph/9903008v1).
8. *Gaifullin A.A.* Construction of combinatorial manifolds with the prescribed sets of links of vertices. January 2008 (arXiv: 0801.4741v1 [math.GT]).
9. *Melikhov S.A.* Uniform polyhedra. June 2011 (arXiv: 1106.3249v1 [math.GT]).
10. *Рябов Г.Г.* О четверичном кодировании кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 2. 154–161.
11. *Рябов Г.Г.* Хаусдорфова метрика на гранях n-мерного куба // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. **16**, № 1. 151–155.
12. *Рябов Г.Г., Серов В.А.* О метрико-топологических вычислениях в конструктивном мире кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 2. 146–155.

Поступила в редакцию
21.09.2011