УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ТОМОГРАФИИ

А. В. Гончарский[1], С. Ю. Романов[1]

Работа посвящена решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений. Рассмотрен метод, основанный на возможности прямого вычисления градиента функционала невязки через решение сопряженной задачи для уравнения в частных производных. Приведены результаты модельных расчетов, показавшие высокую эффективность метода. Полученные результаты позволят продвинуться в создании 3D ультразвуковых томографов высокого разрешения.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, волновое уравнение, уравнение Гельмгольца, численное моделирование, томография, параллельные вычисления.

1. Введение. Предлагаемая работа связана с одной из актуальных проблем современной России — проблемой снижения смертности населения. По данным медицинской статистики смертность женщин от рака молочной железы стоит на втором месте после смертности от болезней системы кровообращения. Более 40 тысяч женщин ежегодно заболевают раком молочной железы, при этом доля лиц с поздними стадиями заболевания (III–IV) среди первичных больных недопустимо высока и составляет более 40%. Как показывают зарубежные исследования, периодические рентгенографические исследования реально снижают уровень смертности от онкологических заболеваний, однако регулярное использование для обследования рентгенографии и X-ray томографии само по себе опасно для здоровья пациента.

Актуальной проблемой развития современных диагностических технологий в медицинской практике является сокращение использования устройств с ионизирующим излучением, в частности рентгеновской компьютерной томографии и традиционной рентгенографии.

Альтернативой рентгенологическим методам исследования могут стать 3D ультразвуковые томографы, разработкой которых интенсивно занимаются в США и Германии. Это направление с точки зрения медицинских приложений, таких как диагностика рака молочной железы, является чрезвычайно перспективным.

В настоящее время не существует профессионального оборудования для 3D ультразвуковых томографических исследований в медицине. Хотя ультразвуковые исследования широко используются в медицине, они построены не по томографическим принципам и имеют невысокое разрешение.

Разработаны макеты ультразвуковых томографических комплексов: фирмы TechniScan Medical Systems с разработкой Warm Bath Ultrasound (WBU™) Imaging System (США), макет установки Karmanos Cancer Institute (США), разработки Institute for Data Processing and Electronics (Германия). Продемонстрирована возможность высокого разрешения. Таким образом, рассматриваемая проблема является актуальной и может быть успешно разрешена.

Настоящая статья связана с разработкой алгоритмов и программного обеспечения для 3D ультразвуковых томографов в медицине. В отличие от X-ray томографии, в которой трехмерная задача диагностики разбивается на последовательность двумерных задач, ультразвуковые исследования требуют трехмерных представлений.

В качестве базовой модели распространения ультразвуковых волн в среде предлагается использовать уравнение в частных производных второго порядка (волновое уравнение). В этом случае обратная задача диагностики неоднородностей в исследуемой среде представляет собой коэффициентную обратную задачу для уравнения в частных производных. Обратная задача является нелинейной. В статье предлагается использовать итерационные процессы непосредственно для решения нелинейных коэффициентных задач для волнового уравнения.

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим волновое уравнение, которое в скалярном приближении описывает акустическое или электромагнитное поле $u(r,t)$ в трехмерной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностью S, в течение времени $[0,T]$, с точечным источником, располагающимся в

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, 119991, Москва; А. В. Гончарский, зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru; С. Ю. Романов, ст. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

точке r_0:

$$c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r-r_0)f(t), \quad u(r,t=0) = u_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n u\big|_{ST} = p(r,t). \tag{1}$$

Здесь $c^{-0.5}(r)$ — скорость волны в среде, $r \in \mathbb{R}^3$ — положение точки в пространстве, Δ — оператор Лапласа по переменной r, генерируемый источником импульс описывается функцией $f(t)$, $\partial_n u\big|_{ST}$ — производная вдоль нормали к поверхности S в области $S \times T$, $p(r,t)$ — некоторая известная функция. Будем предполагать, что неоднородность среды вызвана только изменениями скорости, а вне области неоднородности, для простоты, скорость $c(r) = c_0 = \text{const}$, где постоянная c_0 известна.

Обратная задача состоит в нахождении функции $c(r)$, которая описывает неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны $U(s,t)$ на границе S области за время $(0;T)$ при различных положениях r_0 источника.

3. Методы решения. Как известно, задача (1) задает $u(r,t)$ как неявную функцию от $c(r)$. Поставим обратную задачу как задачу минимизации квадратичного функционала

$$\Phi\big(u(c),c\big) = \frac{1}{2}\left\|u|_{ST} - U\right\|^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_S \big(u(s,t) - U(s,t)\big)^2\,ds\,dt. \tag{2}$$

Здесь $\|\cdot\|^2$ — квадрат нормы в пространстве $L_2(S \times t)$, $U(s,t)$ — экспериментальные данные измерения волны на границе S области за время $(0;T)$.

Для минимизации функционала будем использовать градиентные итерационные методы [5]. Выпишем математическую задачу, позволяющую вычислить градиент функционала (2). Можно показать [1–4], что линейная относительно произвольной вариации dc часть приращения функционала (2) имеет вид

$$d\Phi'\big(u(c),c\big) = \int\limits_{ST}(u-U)(u_c\,dc)\,ds\,dt = \int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)\,dt\right]dc(r)\,dr.$$

Здесь u_c — производная по Фреше.

Выделяя линейную часть по вариации dc, для градиента функционала $\Phi\big(u(c),c\big)$ получим

$$\Phi'_c\big(u(c),c\big) = \int\limits_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)\,dt. \tag{3}$$

Здесь $u(r,t)$ — решение основной задачи (1), а $w(r,t)$ — решение следующей, “сопряженной” задачи (4) при заданном $c(r)$:

$$c(r)w_{tt}(r,t) - \Delta w(r,t) = 0, \quad w(r,t=T) = w_t(r,t=T) = 0, \quad \partial_n w\big|_{ST} = u\big|_{ST} - U, \tag{4}$$

где u — решение основной задачи (1).

Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и “сопряженную” задачи.

Зная Φ'_c из (3), можно построить различные итеративные схемы для минимизации функционала невязки (2) [5].

Рассмотренный подход имеет ряд существенных преимуществ и, прежде всего, в объемах вычислений по сравнению с интегральными методами [6–12].

4. Численный эксперимент. В работе проведены модельные расчеты по решению прямой и обратной задач указанным выше методом. Основная задача состояла в проверке принципиальных возможностей метода, поэтому расчеты проводились в двумерном случае на небольшой сетке размера 83×83 на персональном компьютере. Длина волны излучаемого импульса равна примерно 10 шагам сетки, 4 источника расположены в серединах сторон квадрата области расчетов, 320 приемников излучения расположены по периметру области расчетов. Расчеты проводились методом минимизации невязки (2) с выбором направления минимизации вдоль градиента (3). Шаг сетки равен $dx = 3c_0\,dt$, где dt — шаг по времени, количество шагов по времени равно 300.

На рис. 1 приведена схема модельного эксперимента по зондированию неоднородности ультразвуковым импульсом. Цифрой 1 помечены источники, цифрой 2 — набор приемников.

На рис. 2 приведена исходная модельная неоднородность с вариацией скорости около 10–20% по сравнению с фоновым значением.

Результаты реконструкции после 80 итераций приведены на рис. 3. Время расчетов составило несколько минут.

Как видно из рисунка, качество реконструкции очень высокое, удается уверенно различить объекты размером 0.5 длины волны. Кроме того, удается восстанавливать не только очертания объектов, но и абсолютное значение скорости волны внутри объектов.

Безусловно, используемой сетки расчетов недостаточно для решения реальных задач ультразвуковой томографии. Для сеток размером несколько тысяч отсчетов необходимо проводить вычисления на суперкомпьютерах. Это является темой дальнейших исследований.

5. Заключение. В рассмотренном в статье методе решения задач волновой томографии обратная задача рассматривается как решение нелинейной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения. Подход основан на возможности прямого вычисления градиента функционала невязки через решение сопряженной задачи для уравнения в частных производных.

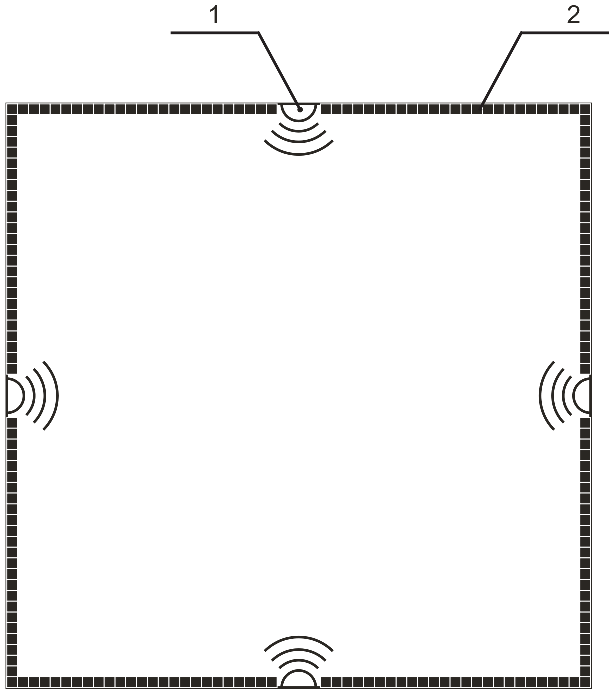

Рис. 1. Схема эксперимента

Проведенные предварительные исследования показали высокую перспективность дифференциального метода. Рассмотренный метод имеет ряд существенных преимуществ и, прежде всего, в объемах вычислений по сравнению с интегральными подходами. Открывается возможность для проведения расчетов на мелких сетках, для использования полного набора данных, включающего в себя полный сигнал по времени со всех направлений зондирования, что позволяет получать не только границы, но и значения параметров неоднородностей.

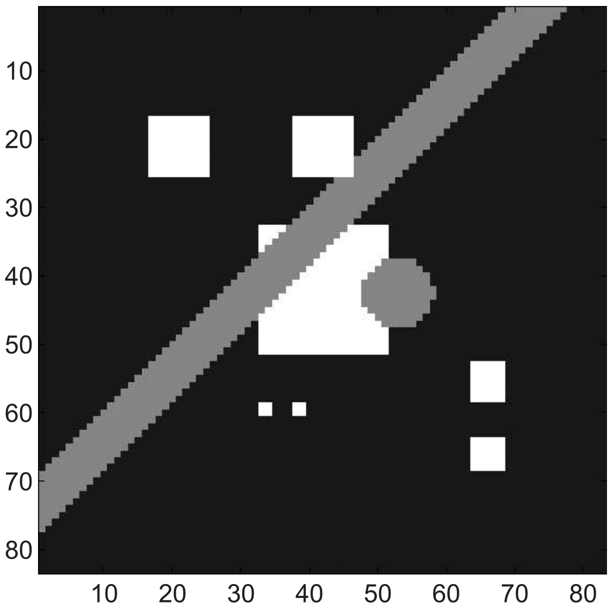

Рис. 2. Модельная неоднородность

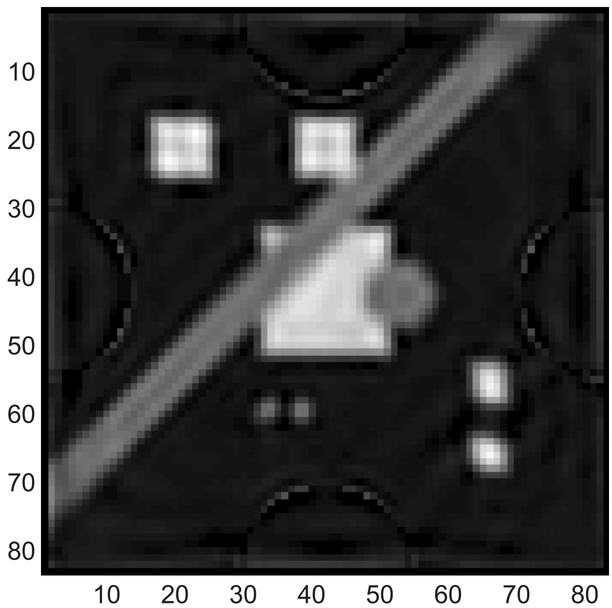

Рис. 3. Восстановленное изображение

Тем не менее, проведение расчетов реальных задач не только в трехмерном, но даже в двумерном случае представляется вычислительно трудоемкой задачей и может выполняться только с использованием суперкомпьютеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chavent G.* Deux resultats sur le probleme inverse dans les equations aux derivees partielles du deuxieme ordre en t et sur l'unicite de la solution du probleme inverse de la diffusion // C. R. Acad. Sci. Paris. 1970. N 270. 25–28.
2. *Natterer F., Wubbeling F.* A propagation-backpropagation method for uzltrasound tomography // Inverse Problems. 1995. **11**, N 6. 1225–1232.
3. *Beilina L., Klibanov M.V., Kokurin M.Yu.* Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem. Chalmers Preprint Series. Preprint 2009:47. Gothenburg: University of Gothenburg, 2009.
4. *Романов С.Ю.* Интегральный и дифференциальный подходы в задачах волновой томографии // Тр. XIII Международной суперкомпьютерной конференции "Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее". 19–24 сентября 2011 г., Новороссийск. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011.
5. *Тыртышников Е.Е.* Методы численного анализа. М.: Академия, 2007.
6. *Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V.* Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrect: Kluwer Academic Publ., 1994.
7. *Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В.* Об одной обратной задаче сейсмики // Вестн. МГУ. Сер. 15. Выч. мат. и киб. 1994. № 4. 16–21.
8. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной задаче компьютерной томографии в волновом приближении // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 1. 40–44.
9. *Агаян Г.М., Виноградов Н.С., Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Диагностика трехмерных сред методами синтезированной апертуры // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 2. 5–10.
10. *Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 2. 152–159.
11. *Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Решение задачи волновой диагностики дорог на суперкомпьютере // Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 224–229.
12. *Goncharskii A.V., Ovchinnikov S.L., Romanov S.Yu.* On the one problem of wave diagnostic // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2010. **34**, № 1. 1–7.

Поступила в редакцию
15.08.2011