

УДК 519.633:517.958

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТИПА СТЕФАНА

Н. А. Окулов¹

Предлагается конечно-разностный метод решения одномерных одно- и двухфазных задач типа Стефана с несколькими границами раздела фаз. Суть метода состоит в том, что задача решается шаг за шагом, по мере перехода с одного временного слоя на другой. На каждом шаге одновременно определяются величина временного шага, пространственная сетка данного временного слоя, соответствующие узловым значениям температуры и положение границ раздела фаз.

Ключевые слова: задача Стефана, разностная схема, численные методы, граница раздела фаз.

1. Введение. Имеются две группы конечно-разностных методов решения задач типа Стефана: методы сквозного счета [1, 2] и методы с выделением границы раздела фаз (фронта). Среди методов, входящих во вторую группу, отметим методы адаптивной сетки [3], выпрямления фронта [4, 6], дробных шагов [5] и ловли фронта в узел сетки [6, 7].

Последний метод имеет два варианта. В первом варианте пространственная сетка задается заранее, а очередной временной шаг подбирается таким образом, чтобы фронт попал в узел сетки. Во втором варианте заранее задается временной шаг, а пространственная сетка подбирается так, чтобы фронт попал в узел. У метода есть два ограничения. Первое — метод можно применять только для решения задач с одним фронтом. Второе — оба варианта существенным образом используют предположение о монотонном характере изменения фронта.

Предлагаемый в настоящей статье численный метод является естественным развитием метода ловли фронта в узел сетки. От первого варианта метода он взял идею подбора временного шага, от второго — идею подбора пространственного шага. Ограничение, связанное с предположением о монотонном характере изменения фронта, преодолевается с помощью специальной алгоритмической процедуры перебора версий. Метод можно применять для случая одного, двух и большего числа фронтов.

2. Постановка задачи. Материальное тело в виде тонкого стержня длины L сделано из материала, теплофизические свойства которого задаются следующими параметрами: λ_s и λ_l — коэффициенты теплопроводности, c_s и c_l — удельные теплоемкости твердой и жидкой фаз, u^* — температура плавления и q — скрытая теплота плавления. Для простоты изложения зависимостью коэффициентов λ_s , λ_l , c_s и c_l от температуры пренебрегаем. Плотность материала ρ считаем постоянной и одинаковой для обеих фаз.

Изложение ведется в безразмерных переменных. В качестве масштабных единиц длины, времени и температуры приняты соответственно L , $\frac{L^2 c_l \rho}{\lambda_l}$ и 1°C .

Ось Ox декартовой системы координат направлена вдоль стержня. Начало координат совмещено с одним из концов стержня. Конец стержня $x = 0$ будем называть нижним, а конец $x = 1$ — верхним.

Стержень $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ в каждый момент времени $t \geq 0$ состоит из нескольких чередующихся твердых и жидких зон. Объединение твердых зон будем обозначать через $\Omega_s(t) = \{x | u(x, t) \leq u^*\}$, а объединение жидких через $\Omega_l(t) = \{x | u(x, t) > u^*\}$.

В одномерном случае фронтами являются точки $x = \xi_j$, $j = 1, \dots, K$, K — количество фронтов. В процессе теплопередачи может меняться как положение фронтов ($\xi_j = \xi_j(t)$), так и их количество ($K = K(t)$). В моменты, когда стержень целиком твердый или целиком жидкий, фронтов нет.

2.1. Режимы и сценарии теплопередачи. Условимся зону помечать буквой L , если она является жидкой, и буквой S , если она твердая. Проходя по зонам снизу вверх, получим набор чередующихся букв, например: $SL, LSL, LSLS, S$. Каждому такому набору букв соответствует определенный режим процесса теплопередачи в стержне. Режим качественно характеризует процесс. Например, указание на то, что в данный момент имеет место режим LSL , означает, что около верхнего и нижнего концов стержня имеются твердые зоны, а между ними располагается жидкая зона; фронтов два.

¹ Филиал Российского государственного социального университета в г. Наро-Фоминске, Киевское шоссе, д. 5, 143302, Московская обл., г. Наро-Фоминск; доцент, e-mail: okulovna@rambler.ru

Упорядоченную во времени последовательность режимов будем называть *сценарием* процесса теплопередачи в стержне. Записывать сценарий удобно в виде последовательности режимов, соединенных стрелками, над которыми указаны моменты времени смены режимов. Например, запись

$$L \xrightarrow{0} LS \xrightarrow{2.54} S \xrightarrow{6.30} SL \xrightarrow{7.62} SLS \xrightarrow{15.55} S$$

означает, что в начальный момент времени был режим L ; при $0 < t \leq 2.54$ имел место режим LS ; при $2.54 < t \leq 6.30$ — режим S ; при $6.30 < t \leq 7.62$ — режим SL ; при $7.62 < t \leq 15.55$ — режим SLS ; далее реализовывался режим S .

2.2. Нумерация фронтов. Каждый фронт имеет момент (дату) зарождения, время жизни и, вообще говоря, момент (дату) исчезновения. В задачах со сложными сценариями теплопередачи могут возникать разнообразные ситуации. В частности, фронт с более поздней датой зарождения может занять позицию как выше, так и ниже позиции фронта с более ранней датой зарождения; фронт с более поздней датой зарождения может прекратить существование как позже, так и раньше момента исчезновения фронта с более ранней датой зарождения. В случае сценариев, включающих в себя режимы с тремя фронтами, число возможных ситуаций значительно больше.

Отмеченное обстоятельство делает вопрос о способе нумерации фронтов важным при решении задач типа Стефана с несколькими фронтами. Было опробовано несколько способов нумерации. Наиболее удачным оказался следующий:

- номер присваивается фронту в момент его зарождения;
- номер является атрибутом фронта (во время жизни фронта его номер не может быть изменен или присвоен другому фронту);
- номер фронта становится свободным в момент исчезновения фронта;
- в момент зарождения фронта ему присваивается наименьший номер из числа свободных;
- в начальный момент времени все номера $(1, 2, \dots)$ считаются свободными; если в этот момент начинают существование сразу несколько фронтов, то нижерасположенному фронту присваивается меньший номер.

Данный способ нумерации использован в примерах, приведенных в конце статьи.

2.3. Уравнения теплопроводности, условия на фронтах, граничные и начальное условия. В твердых зонах распределение температуры описывается уравнением

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha = \frac{c_s \lambda_l}{c_l \lambda_s}, \tag{1}$$

а в жидких — уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

На каждом фронте задаются два условия. Первое из них — это требование непрерывности температуры при переходе через фронт: $\lim_{\substack{x \rightarrow \xi_j \\ x \in \Omega_s}} u(t, x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_j \\ x \in \Omega_l}} u(t, x) = u^*$, $j = 1, \dots, K$. Второе условие — условие

Стефана. Оно отражает закон сохранения энергии при фазовых превращениях:

$$\beta \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_j \\ x \in \Omega_s}} \frac{\partial u}{\partial x} - \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_j \\ x \in \Omega_l}} \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{d\xi}{dt}, \quad \beta = \frac{\lambda_s}{\lambda_l}, \quad \gamma = \frac{q}{c_l}, \quad j = 1, \dots, K. \tag{3}$$

Задается начальное распределение температуры $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

В качестве граничных условий на верхнем и нижнем концах стержня задаются линейные комбинации температуры и ее производной:

$$\begin{aligned} c_0 u(0, t) + \left[\beta + (1 - \beta)H(u(0, t) - u^*) \right] d_0 \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) &= g_0(t), \\ c_1 u(1, t) + \left[\beta + (1 - \beta)H(u(1, t) - u^*) \right] d_1 \frac{\partial}{\partial x} u(1, t) &= g_1(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь c_0, d_0, c_1, d_1 — заданные постоянные, $g_0(t), g_1(t)$ — заданные функции, $H(\cdot)$ — функция Хевисайда. Множитель $\left[\beta + (1 - \beta)H(u(\cdot, t) - u^*) \right]$ учитывает скачкообразное изменение теплофизических характеристик стержня при переходе через точку плавления. Множитель принимает значение 1, если температура на конце стержня $u(\cdot, t)$ больше температуры плавления. В противном случае он равен β .

2.4. Формулировка задачи. Для каждого момента времени требуется определить количество и положение фронтов и распределение температуры в стержне.

3. Разностная схема. Изложение предлагаемого численного метода ведется на примере режима с двумя фронтами *LSL*. Предполагается, что второй фронт располагается ниже первого.

3.1. Сетка. Областью решения задачи является полуполоса $D = \{x, t \mid 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$. Концам стержня соответствуют прямые $x = 0$ и $x = 1$. Графиками $x = \xi_1(t)$ и $x = \xi_2(t)$ в области решения являются некоторые линии, которые будем именовать разделительными. Покрывать область D сеткой будем в процессе решения задачи, переходя с одного временного слоя на следующий. При этом будем требовать, чтобы все узлы сетки располагались на временных слоях $t = t_m, m = 0, 1, \dots$, а концы стержня и разделительные линии проходили через узлы.

В процессе решения задачи на каждом временном слое формируется своя пространственная сетка $x = x_i^m, i = 1, 2, \dots, N$, где N — число узлов на слое. Пространственная нумерация узлов ведется со стороны нижнего конца стержня. Для всех $m \geq 0$ выполняются равенства $x_1^m = 0, x_N^m = 1$.

Формируемая сетка будет существенно неравномерной. В это утверждение вкладывается следующий смысл. Временные шаги $\tau_m = t_m - t_{m-1}$, вообще говоря, непостоянные и могут меняться при переходе от одного слоя к другому. Пространственные шаги $h_i^m = x_i^m - x_{i-1}^m$ не постоянны как в пределах одного временного слоя, так и при переходе с одного временного слоя на другой. По определению примем $h_1^m = 0$.

Разделительные линии на сетке представлены наборами узлов $\xi_1(t) \rightarrow \bigcup(n_1^m, m), \xi_2(t) \rightarrow \bigcup(n_2^m, m)$, где n_1^m и n_2^m — пространственные номера узлов, через которые проходит первая и вторая разделительные линии, на m -м временном слое. Будем называть такие узлы разделительными.

Совокупность пространственных шагов h_i^m на m -м временном слое удобно рассматривать как N -мерный вектор $H^{(m)} = (h_1^m, h_2^m, \dots, h_N^m)$.

3.2. Начальные условия. Аппроксимация уравнений, граничных условий и условий на фронтах. Координаты $x_i^0, 1 \leq i \leq N$, узлов на нулевом временном слое $t_0 = 0$ задаем заранее. В них задаем узловые значения начальной температуры $u_i^0 = \varphi(x_i^0)$.

Каждому внутреннему узлу в жидких зонах ставим в соответствие разностное уравнение

$$\frac{2u_{i+1}^m h_i^m + 2u_{i-1}^m h_{i+1}^m - 2u_i^m (h_i^m + h_{i+1}^m)}{h_i^m h_{i+1}^m (h_i^m + h_{i+1}^m)} = \frac{u_i^m - u_i^{m-1}}{\tau_m}, \quad 1 < i < n_2^m, \quad n_1^m < i < N; \quad (5)$$

каждому внутреннему узлу в твердой зоне — уравнение

$$\frac{2u_{i+1}^m h_i^m + 2u_{i-1}^m h_{i+1}^m - 2u_i^m (h_i^m + h_{i+1}^m)}{h_i^m h_{i+1}^m (h_i^m + h_{i+1}^m)} = \alpha \frac{u_i^m - u_i^{m-1}}{\tau_m}, \quad n_2^m < i < n_1^m. \quad (6)$$

В граничных узлах задаем уравнения

$$c_0 u_1^m + d_0 \frac{u_2^m - u_1^m}{h_2^m} = g_0(t_m); \quad c_1 u_N^m + d_1 \frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_N^m} = g_1(t_m). \quad (7)$$

Каждому разделительному узлу ставим в соответствие два условия сопряжения, которые объединим в две группы:

— первая группа:

$$u_{n_1^m}^m = u^*, \quad u_{n_2^m}^m = u^*; \quad (8)$$

— вторая группа (система условий Стефана — далее СУС):

$$\beta \frac{u^* - u_{n_1^m-1}^m}{h_{n_1^m}^m} - \frac{u_{n_1^m+1}^m - u^*}{h_{n_1^m+1}^m} = \gamma \frac{x_{n_1^m}^m - \xi_1^{m-1}}{\tau_m}, \quad \beta \frac{u_{n_2^m+1}^m - u^*}{h_{n_2^m+1}^m} - \frac{u^* - u_{n_2^m-1}^m}{h_{n_2^m}^m} = \gamma \frac{x_{n_2^m}^m - \xi_2^{m-1}}{\tau_m}. \quad (9)$$

3.3. Формирование системы линейных уравнений. Систему уравнений (5), (6) и первую группу условий сопряжения (8) запишем в виде единой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $A^{(m)}U^{(m)} = B^{(m)}$, где $U^{(m)} = (u_1^m, \dots, u_N^m)^T$ — вектор узловых значений температуры в узлах m -го временного слоя.

Матрица $A^{(m)} = (a_{ij})$ является трехдиагональной. Ее элементы и элементы столбца правых частей $B^{(m)} = (b_i)$ находятся по следующим правилам:

1) если $i = 1$ (x_i^m — точка на нижнем конце стержня), то

$$a_{ii} = c_0 - \frac{d_0}{h_{i+1}^m}, \quad a_{i,i+1} = \frac{d_0}{h_{i+1}^m}, \quad b_i = g_0(t_m);$$

2) если $1 < i < n_2^m$ или $n_1^m < i < N$ (x_i^m — внутренняя точка одной из жидких зон), то

$$a_{i i-1} = \frac{2}{h_i^m(h_i^m + h_{i+1}^m)}, \quad a_{i i} = -\frac{2}{h_i^m h_{i+1}^m} - \frac{1}{\tau_m}, \quad a_{i i+1} = \frac{2}{h_{i+1}^m(h_i^m + h_{i+1}^m)}, \quad b_i = -\frac{u_i^{m-1}}{\tau_m};$$

3) если $i = n_1^m$ или $i = n_2^m$ (x_i^m — координата границы раздела фаз), то $a_{i i} = 1, b_i = u^*$;

4) если $n_2^m < i < n_1^m$ (x_i^m — внутренняя точка твердой зоны), то

$$a_{i i-1} = \frac{2}{h_i^m(h_i^m + h_{i+1}^m)}, \quad a_{i i} = -\frac{2}{h_i^m h_{i+1}^m} - \frac{\alpha}{\tau_m}, \quad a_{i i+1} = \frac{2}{h_{i+1}^m(h_i^m + h_{i+1}^m)}, \quad b_i = -\frac{\alpha u_i^{m-1}}{\tau_m};$$

5) если $i = N$ (x_i^m — точка на верхнем конце стержня), то

$$a_{i i} = c_1 + \frac{d_0}{h_i^m}, \quad a_{i i-1} = -\frac{d_0}{h_i^m}, \quad b_i = g_1(t_m).$$

Остальные элементы матрицы $A^{(m)}$ равны нулю.

4. Метод численного решения.

4.1. Понятие версии. *Версия* — это высказывание о предполагаемых пространственных номерах n_1^m и n_2^m разделительных узлов рассматриваемого временного слоя. Выдвинуть версию — значит указать на конкретные пространственные номера разделительных узлов. Рассматриваются только те версии, которые входят в *множество допустимых версий*. Версия допустима, если номера n_1^m и n_2^m входят в наборы $\{n_1^{m-1} + 1, n_1^{m-1}, n_1^{m-1} - 1\}$ и $\{n_2^{m-1} + 1, n_2^{m-1}, n_2^{m-1} - 1\}$ соответственно.

Каждой допустимой версии ставится в соответствие $H_{\text{доп}}^m$ — *множество допустимых векторов пространственных шагов*. Это множество состоит из векторов $H^{(m)}$, компоненты которых, т.е. пространственные шаги, удовлетворяют следующим требованиям:

$$\begin{aligned} h_{\min} < h_{n_j^m}^m &\leq h_{n_j^m}^{m-1} + h_{\min}, && \text{если } n_j^m = n_j^{m-1} - 1, \\ h_{\min} < h_{n_j^m}^m &\leq h_{n_j^m}^{m-1} + h_{n_j^m+1}^{m-1} - h_{\min}, && \text{если } n_j^m = n_j^{m-1}, \\ h_{n_j^m}^{m-1} - h_{\min} < h_{n_j^m}^m &\leq h_{n_j^m}^{m-1} + h_{n_j^m+1}^{m-1} - h_{\min}, && \text{если } n_j^m = n_j^{m-1} + 1, \\ h_{n_j^m+1}^m = h_{n_j^m+1}^{m-1} + h_{n_j^m}^{m-1} - h_{n_j^m}^m; & \quad h_i^m = h_i^{m-1}, \quad i \neq n_j^m - 1, n_j^m, n_j^m + 1; && j = 1, 2. \end{aligned} \tag{10}$$

Рис. 1 иллюстрирует принципы формирования $H_{\text{доп}}^m$. Области возможных позиций разделительных узлов при различных версиях показаны прямоугольниками.

Отметим, что для шагов с номерами n_1^m и n_2^m заданы интервалы возможных значений. Шаги с номерами $n_1^m + 1$ и $n_2^m + 1$ линейно выражаются через шаги с номерами n_1^m и n_2^m и, следовательно, также имеют интервалы возможных значений. Все остальные шаги имеют конкретные значения, а именно те, которые имели шаги с этими номерами на предыдущем временном слое. В приведенных выше формулах h_{\min} — минимально допустимая величина пространственных шагов. Значение этого параметра выбирается из соображений точности аппроксимации дифференциальных уравнений (1), (2), условий Стефана (3) и краевых условий (4) соответствующими конечно-разностными уравнениями (6), (5), (9) и (7).

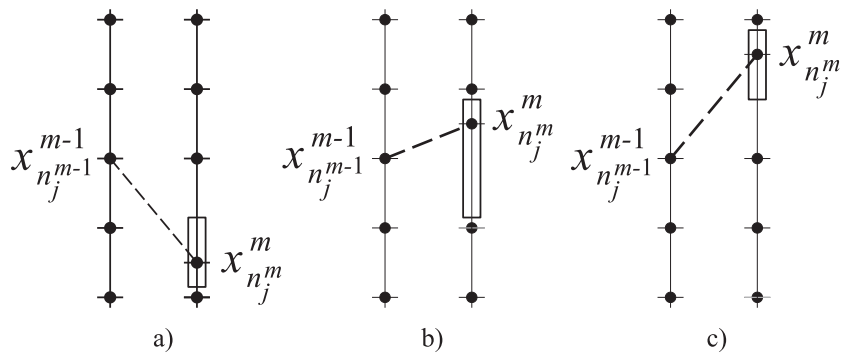


Рис. 1. Версия $n_j^m = n_j^{m-1} - 1$ (а), версия $n_j^m = n_j^{m-1}$ (б), версия $n_j^m = n_j^{m-1} + 1$ (с)

В приведенных выше формулах h_{\min} — минимально допустимая величина пространственных шагов. Значение этого параметра выбирается из соображений точности аппроксимации дифференциальных уравнений (1), (2), условий Стефана (3) и краевых условий (4) соответствующими конечно-разностными уравнениями (6), (5), (9) и (7).

4.2. Алгоритм. Суть предлагаемого численного метода заключена в следующей алгоритмической процедуре.

0. Задаем τ_m .
1. Выдвигаем одну из версий.
2. Формируем соответствующее множество $H_{\text{доп}}^m$.

3. Рассматривая U^m , $h_{n_1^m}^m$ и $h_{n_2^m}^m$ как неизвестные, подлежащие определению, решаем задачу

$$\text{СЛАУ; СУС; } H^m \in H_{\text{доп}}^m. \tag{11}$$

4. Если она не имеет решения, выдвигаем следующую версию, переходим к пункту 2. Если набор версий исчерпан, то корректируем τ_m в сторону уменьшения, переходим к пункту 1.

5. Если задача (11) имеет решение, то рассматриваемую версию объявляем истинной. Соответствующие ей номера n_1^m и n_2^m принимаем за номера разделительных узлов на m -м временном слое. Само решение $(U^m; h_{n_1^m}^m, h_{n_2^m}^m)$ принимаем за вектор узловых значений температуры и пространственные шаги $h_{n_1^m}^m, h_{n_2^m}^m$ на этом слое. Полагаем $\xi_1^m = x_{n_1^m}^m, \xi_2^m = x_{n_2^m}^m$. Переходим на следующий временной слой.

Примечание. Автор использовал следующую процедуру решения задачи (11). Обозначим $h_{n_1^m}^m$ и $h_{n_2^m}^m$ через y и z . По формулам (10) найдем допустимые диапазоны этих переменных $y_{\min} < y \leq y_{\max}, z_{\min} < z \leq z_{\max}$. Шаги $h_{n_1^m+1}^m$ и $h_{n_2^m+1}^m$ выразим через y и z по формулам (10). Остальные шаги возьмем с предыдущего временного слоя. Соответствующий вектор шагов обозначим через $H^m(y, z)$.

В рамках выдвинутой версии элементы матрицы $A^{(m)}$ и столбца $B^{(m)}$ выражаются через некоторые известные величины (пространственные шаги сетки и узловое значения температуры на предыдущем временном слое) и рациональным образом — через неизвестные пространственные шаги, обозначенные как y и z . Популярные системы символьной математики (MAPLE, Mathematica) позволяют получить решение линейной системы в аналитическом виде, что дает возможность выразить это решение как функцию переменных $U^{(m)} = U^{(m)}(y, z)$. В частности, получим функции

$$u_{n_2^m-1}^m = u_{n_2^m-1}^m(y, z), \quad u_{n_2^m+1}^m = u_{n_2^m+1}^m(y, z); \quad u_{n_1^m-1}^m = u_{n_1^m-1}^m(y, z), \quad u_{n_1^m+1}^m = u_{n_1^m+1}^m(y, z). \tag{12}$$

Подставив правые части соотношений (12) в условия Стефана (9), получим следующую систему из двух нелинейных уравнений относительно y и z :

$$\begin{aligned} \beta \frac{u^* - u_{n_1^m-1}^m(y, z)}{y} - \frac{u_{n_1^m+1}^m(y, z) - u^*}{h_{n_1^m-1}^{m-1} + h_{n_1^m}^{m-1} - y} &= \gamma \frac{x_{n_1^m-1}^{m-1} + y - \xi_1^{m-1}}{\tau_m}, \\ \beta \frac{u_{n_2^m+1}^m(y, z) - u^*}{h_{n_2^m-1}^{m-1} + h_{n_2^m}^{m-1} - z} - \frac{u^* - u_{n_2^m-1}^m(y, z)}{z} &= \gamma \frac{x_{n_2^m-1}^{m-1} + z - \xi_2^{m-1}}{\tau_m}. \end{aligned}$$

Решаем ее численно на прямоугольнике $\{y, z \mid y_{\min} < y \leq y_{\max}, z_{\min} < z \leq z_{\max}\}$. Возможны два исхода: либо система имеет решение $y = \hat{y}, z = \hat{z}$, либо его нет. В первом случае задача (11) имеет решение $U^{(m)} = U^{(m)}(\hat{y}, \hat{z}), h_{n_1^m}^m = \hat{y}, h_{n_2^m}^m = \hat{z}$. Во втором — эта задача решения не имеет.

5. Несколько примеров численного моделирования.

5.1. Тестовый пример. Классическая задача Стефана о промерзании воды, занимающей полупространство $x > 0$, ставится следующим образом. Требуется найти распределение температуры $u(x, t)$ и закон изменения границы раздела фаз $\xi = \xi(t)$, если в начальный момент все полупространство занято водой, имеющей нулевую температуру: $u(x, 0) = 0$, а в последующие моменты времени на границе полупространства поддерживается постоянная отрицательная температура: $u(0, t) = c, c < 0$.

Эта задача имеет следующее аналитическое решение [8]:

$$u(x, t) = \begin{cases} c \left(1 - \frac{\text{erf}(x\sqrt{\alpha}/\sqrt{4t})}{\text{erf}(k\sqrt{\alpha}/2)} \right), & x \leq \xi(t); \\ 0, & x > \xi(t), \end{cases} \quad \xi(t) = k\sqrt{t}, \tag{13}$$

где коэффициент k является решением уравнения

$$\frac{\exp(-k^2\alpha/4)}{\text{erf}(k\sqrt{\alpha}/2)} + \frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2c\beta} k = 0.$$

При $t < 1/k^2$ решение (13) можно интерпретировать как решение задачи о распространении тепла в стержне единичной длины, на верхнем конце которого поддерживается нулевая температура, а условие на нижнем конце и начальное условие такие же, как в классической задаче Стефана. Воспользуемся этим аналитическим решением для тестирования предлагаемого численного метода.

Теплофизическим характеристикам воды вблизи точки замерзания при нормальном давлении соответствуют значения параметров моделирования: $\alpha = 0.125$, $\beta = 4.000$, $\gamma = 75.909$. Взяв $c = -5$, получим $k = 0.722$. На рис. 2 представлены результаты численных расчетов зависимости толщины слоя льда от времени (сплошная линия) и соответствующая теоретическая кривая (пунктирная линия). Наблюдается высокая степень близости результатов — графики визуально не различимы. На этом же рисунке приведен график относительной ошибки расчетов $\varepsilon(t)$ (в процентах). При малых t относительная ошибка превышает 1%. Это естественно, так как имеется нестыковка начальных и граничных условий. По мере роста t относительная ошибка уменьшается. В момент, когда толщина льда достигает значения единица, относительная ошибка равна 0.078%.

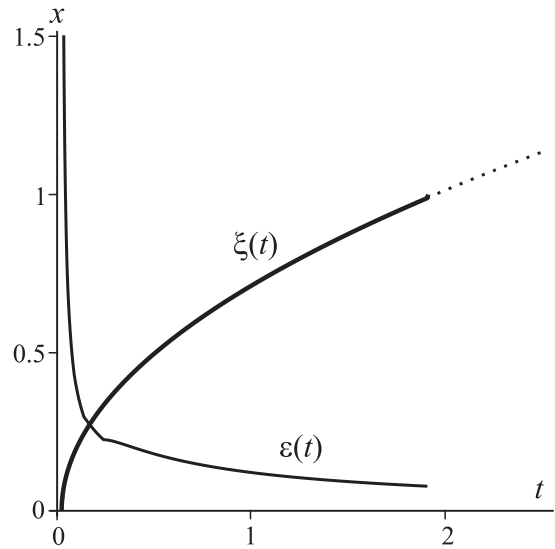


Рис. 2

Расчеты тестового и всех других примеров в данной статье проводились при $N = 100$.

5.2. Пример задачи с одним фронтом. Параметры моделирования: $u^* = 1083$, $\alpha = 0.449$, $\beta = 2.019$, $\gamma = 435.028$ (соответствуют теплофизическим параметрам меди вблизи точки плавления при нормальном давлении).

Граничные условия: $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = -\frac{200}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)}$, $\sigma = 0.05$, $a = 0.02$; $\frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = 0$.

Начальное условие: $u(x, 0) = 20$.

Данная задача моделирует процесс распространения тепла в медном стержне, когда верхний конец теплоизолированный, а на нижнем конце осуществляется подача тепла в виде кратковременного импульса высокой интенсивности.

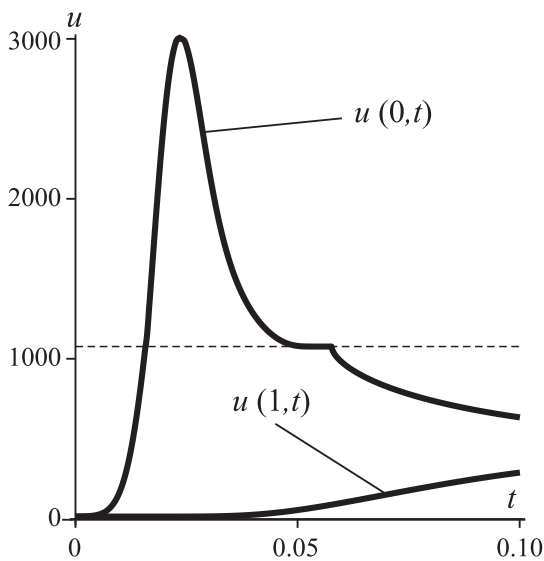


Рис. 3

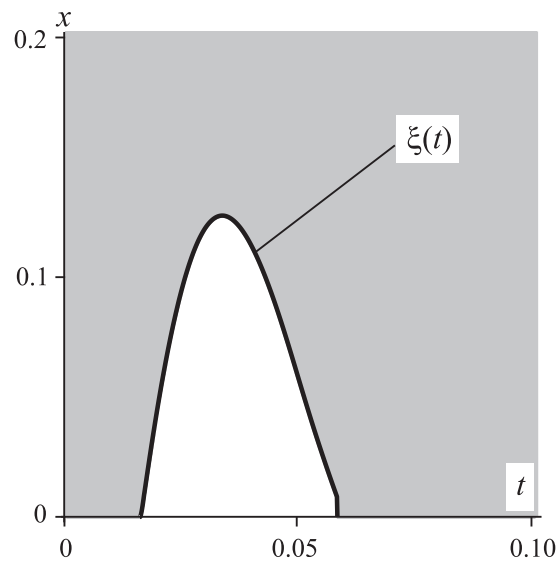


Рис. 4

Результаты расчетов. Процесс распространения тепла проходит по сценарию $S \xrightarrow{0.016} LS \xrightarrow{0.058} S$. Динамика изменения расчетных значений температуры на концах стержня представлена на рис. 3. График зависимости положения фронта от времени изображен на рис. 4 (здесь и далее серым цветом на рисунках обозначены твердые зоны).

Хронология процесса теплопередачи следующая. До момента $t = 0.016$ стержень находится в твердом состоянии, происходит интенсивный нагрев нижнего конца стержня, его температура быстро повышается от начальной до температуры плавления. В момент $t = 0.016$ температура нижнего конца достигает температуры плавления, зарождается граница раздела жидкой и твердой фаз (фронт). На временном интервале $0.016 < t < 0.058$ температура нижнего конца выше точки плавления, фронт $x = \xi(t)$ делит

стержень на две части. Нижняя часть стержня $0 \leq x < \xi(t)$ находится в жидком состоянии, верхняя часть $\xi(t) \leq x \leq 1$ — в твердом.

В момент $t = 0.058$ температура нижнего конца снижается до температуры кристаллизации. Весь стержень переходит в твердое состояние. Фронт прекращает существование. Далее происходит медленное выравнивание температуры в твердом стержне.

5.3. Пример задачи с двумя фронтами. Параметры моделирования — см. тестовый пример.

Граничные условия: $u(0, t) = 5 \sin t$; $\frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = 0$.

Начальное условие: $u(x, 0) = 0$ (вода).

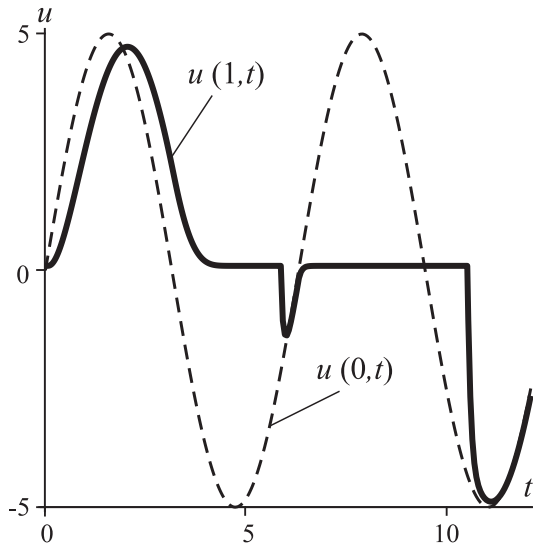


Рис. 5

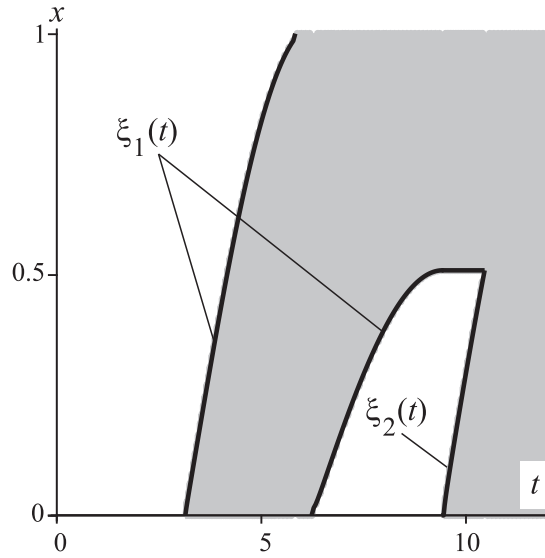


Рис. 6

Результаты расчетов. Процесс распространения тепла осуществляется по сценарию

$$L \xrightarrow{0} L \xrightarrow{3.16} SL \xrightarrow{5.84} S \xrightarrow{6.30} LS \xrightarrow{9.47} SLS \xrightarrow{10.50} S \rightarrow \dots$$

График задаваемой температуры на нижнем конце стержня и график расчетной температуры на верхнем конце стержня представлены на рис. 5. Графики зависимости положения фронтов от времени представлены на рис. 6.

До $t = 3.16$ стержень остается жидким. В момент $t = 3.16$ на нижнем конце стержня зарождается первый фронт, отделяющий твердую зону $0 \leq x \leq \xi_1(t)$ в нижней части стержня от жидкой зоны $\xi_1(t) < x \leq 1$ в его верхней части. В момент $t = 5.84$ фронт достигает верхнего конца стержня и прекращает существование. В период $5.84 < t < 6.30$ стержень находится в твердом состоянии; фронтов нет. В момент $t = 6.30$ на нижнем конце стержня зарождается новый фронт, которому снова присваивается первый номер. Данный фронт отделяет жидкую зону $0 \leq x < \xi_1(t)$ в нижней части стержня от твердой $\xi_1(t) \leq x \leq 1$ в верхней части. В момент $t = 9.47$ зарождается еще один фронт, которому присваивается второй номер. Эти два фронта делят стержень на две твердые зоны $0 \leq x \leq \xi_2(t)$ и $\xi_1(t) \leq x \leq 1$, расположенные у концов стержня, и жидкую зону $\xi_2(t) < x < \xi_1(t)$ между ними. В момент $t = 10.50$ оба фронта соединятся и прекращают существование. Далее до конца расчетного периода весь стержень находится в твердой фазе; фронтов нет.

5.4. Пример задачи с тремя фронтами. Параметры моделирования — см. тестовый пример.

Граничные условия: $u(0, t) = 5 \sin t$; $u(1, t) + \left[\beta + (1 - \beta)H(u(1, t)) \right] \frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = t$.

Начальное условие: $u(x, 0) = 0$ (вода).

Результаты расчетов. Процесс распространения тепла осуществляется по сценарию

$$L \xrightarrow{0} L \xrightarrow{3.17} SL \xrightarrow{6.32} LSL \xrightarrow{9.47} SLSL \xrightarrow{10.47} SL \xrightarrow{12.57} \rightarrow LSL \xrightarrow{15.14} L \xrightarrow{15.71} SL \xrightarrow{18.85} LSL \xrightarrow{20.61} L \rightarrow \dots$$

График задаваемой температуры на нижнем конце стержня и график расчетной температуры на верхнем конце представлены на рис. 7. Графики зависимости положения фронтов от времени представлены на рис. 8.

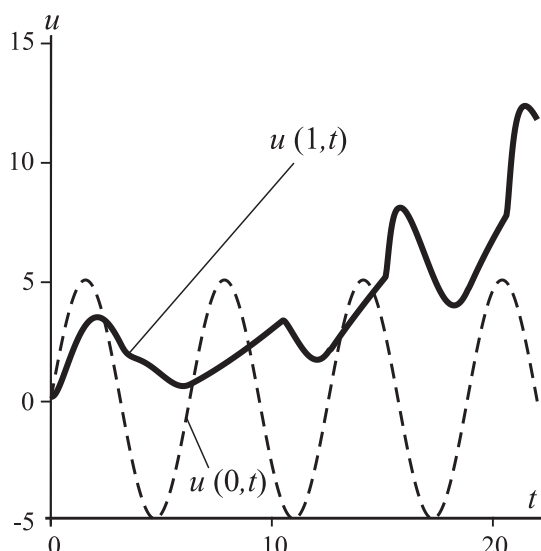


Рис. 7

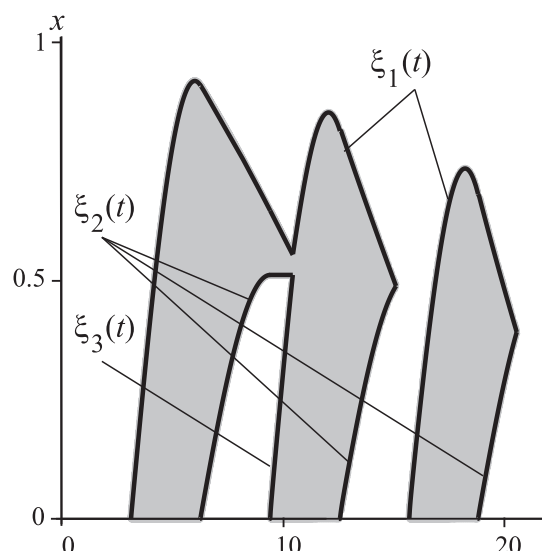


Рис. 8

Начальное состояние стержня — жидкое. Стержень остается в жидком состоянии до $t = 3.17$. В этот момент зарождается первый фронт. В момент $t = 6.32$ зарождается новый фронт, которому присваивается второй номер (поскольку первый фронт продолжает существовать). В момент $t = 9.47$ зарождается еще один фронт, которому присваивается третий номер (поскольку первый и второй фронты продолжают существовать). В момент $t = 10.47$ второй и третий фронты соединяются и прекращают существование, но первый продолжает существовать. В момент $t = 12.57$ зарождается новый фронт, ему присваивается второй номер (поскольку в этот момент продолжает существовать только первый фронт). В момент $t = 15.14$ первый и второй фронты соединяются и прекращают существование. В период $15.14 < t < 15.71$ стержень находится в жидком состоянии. В момент $t = 15.71$ зарождается очередной новый фронт, ему присваивается первый номер. В момент $t = 18.85$ зарождается еще один фронт, которому присваивается второй номер (поскольку первый фронт продолжает существовать). В момент $t = 20.61$ первый и второй фронты соединяются и прекращают существование. Далее до конца расчетного периода стержень находится в жидком состоянии.

Наиболее интересным промежутком времени является промежуток $9.47 < t < 10.47$. На нем одновременно существуют три фронта, которые делят стержень на четыре зоны. Две из них жесткие, а две другие — жидкие.

6. Решение однофазных задач. Когда тепловое поле одной из фаз известно (равно температуре фазового перехода), вопрос о распределении температуры в этой фазе теряет смысл. В этих случаях задача сводится к определению теплового поля другой фазы и закона изменения границы раздела фаз. Такую задачу называют однофазной.

Однофазная задача является частным случаем двухфазной. Для того чтобы решить однофазную задачу изложенным выше методом версий, достаточно задать на соответствующем конце стержня граничное условие $u(\cdot, t) = u^*$.

Примером решения однофазной задачи является рассмотренный ранее тестовый пример.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будаг Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. **5**, № 5. 828–840.
2. Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Схемы сквозного счета численного решения краевых задач с неизвестными границами для одномерных уравнений параболического типа // Методы решения краевых и обратных задач теплопроводности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 3–23.
3. Дарьин Н.А., Мажжукин В.И. Математическое моделирование задачи Стефана на адаптивной сетке // Дифференц. уравнения. 1987. **23**, № 7. 1154–1160.
4. Будаг Б.М., Гольдман Н.А., Успенский А.Б. Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтных задач типа Стефана // Докл. АН СССР. 1966. **167**, № 4. 735–738.
5. Голубева А.А. Стандартная программа численного решения краевой задачи Стефана для одномерных параболических уравнений разностным методом с “дробными шагами по x и t ” // Методы решения краевых и

- обратных задач теплопроводности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 39–51.
6. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Вычислительная теплотехника. М.: Едиториал УРСС, 2003.
 7. Будаг Б.М., Васильев Ф.П., Успенский А.Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике. Сб. работ ВЦ МГУ. Вып. IV. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 139–183.
 8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.

Поступила в редакцию
13.04.2011
