УДК 517.988

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ УСЛОВИЙ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ В ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ю. Кокурин[1]

Установлена связь задачи об алгоритмической реализуемости условий истокопредставимости в итерационных методах решения нерегулярных нелинейных уравнений и проблемы “$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?”. На этой основе оцениваются возможности алгоритмического удовлетворения указанным условиям в полиномиальное время. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09–01–00273а) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (темплан МарГУ, № 1.2.09).

Ключевые слова: нерегулярное уравнение, итерационный метод, условие истокопредставимости, трудоемкость, полиномиальный алгоритм.

1. Введение. Объектом исследования в работе являются методы решения нерегулярных операторных уравнений вида

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F : H_1 \to H_2$ — нелинейный в общем случае оператор, H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Предполагается, что F — дифференцируемый по Фреше оператор, причем

$$\|F'(x)\| \leqslant N_1, \quad \|F'(x) - F'(y)\| \leqslant N_2\|x - y\| \quad \forall x, y \in H_1. \tag{2}$$

Здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначается норма соответствующего пространства.

Нерегулярность уравнения (1) означает, что непрерывная обратимость оператора $F'(x)$ либо оператора $F'^*(x)F'(x)$ для точек x из окрестности искомого решения x^* не предполагается. В качестве примера отметим распространенные в приложениях нелинейные интегральные операторы типа Урысона. В этих условиях классические методы решения уравнения (1) (такие как метод Ньютона–Канторовича, метод Гаусса–Ньютона, градиентные и вариационные процедуры) оказываются нереализуемыми либо не гарантируют получения последовательности, сходящейся к решению. В этой связи значительное внимание в последнее время привлекают методы решения нерегулярных уравнений (1), теоретически обеспечивающие сильную сходимость вырабатываемых приближений к решению без наложения на исследуемое уравнение дополнительных структурных условий помимо стандартных ограничений (2). В связи с этим наибольшее распространение получили итерационные процессы, основанные на регуляризации схемы Гаусса–Ньютона и градиентного метода [1, 2]. Упомянутые процессы имеют соответственно вид

$$x_{n+1} = \xi - \Theta\bigl(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\bigr)F'^*(x_n)\bigl[F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi)\bigr], \tag{3}$$

$$x_{n+1} = x_n - \mu_n\bigl(F'^*(x_n)F(x_n) + \alpha_n(x_n - \xi)\bigr), \tag{4}$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\mu_n\}$ — положительные параметры, удовлетворяющие следующим основным условиям:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0; \quad 1 \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \leqslant r < \infty, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{5}$$

Функция $\Theta(\lambda, \alpha)$, называемая порождающей функцией группы итерационных процессов (3), подчинена требованиям

$$\sup_{\lambda\in[0,N_1^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}}, \tag{6}$$

$$\sup_{\lambda\in[0,N_1^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\lambda^p \leqslant C_2\alpha^p, \quad p \in [0, p_0], \quad p_0 > \frac{1}{2} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{7}$$

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, просп. Ленина, д. 1, 424001, г. Йошкар-Ола; профессор, e-mail: kokurinm@yandex.ru

В частности, допустимой является функция $\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda+\alpha)^{-1}$, для которой условие (7) выполняется при $p_0 = 1$. Элемент $\xi \in H_1$ в (3), (4) наряду с начальным приближением x_0 играет роль управляющего параметра, удачный выбор которого обеспечивает попадание итерационных точек x_n с подходящими номерами n в окрестность искомого решения x^*. Не останавливаясь на подробных формулировках теорем о локальной сходимости итераций (3) и (4) (см. [1, 2]), отметим, что ключевую роль в этих утверждениях играют соотношения (5)–(7) и условия истокопредставимости, налагаемые на управляющий элемент ξ. Простейшей формой этих условий является равенство

$$\xi = x^* + F'^*(x^*)v, \quad v \in H_2, \tag{8}$$

которое должно выполняться при ограничении $\|v\| \leqslant d$ с надлежащей константой $d = d(N_1, N_2)$. Обозначим $S_r = \bigl\{x \in H_1 : \|x\| \leqslant r\bigr\}$ и представим условие (8) в виде

$$\xi \in E_d(x^*) = x^* + F'^*(x^*)S_d. \tag{9}$$

Множество $E_d(x^*)$ представляет собой замкнутый эллипсоид с центром в точке x^*. При выполнении (8) в предположении достаточной близости начального приближения x_0 к решению x^* для процессов (3), (4) имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ и оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leqslant C_3\sqrt{\alpha_n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{10}$$

Неоднократно отмечалось [1,3], что условия вида (8) носят отчетливо выраженный неконструктивный характер, поскольку в типичных для приложений случаях оператор $F'^*(x^*)$ является вполне непрерывным, а эллипсоид $E_d(x^*)$ представляет собой компактное множество в H_1 с неизвестным центром x^*, $\operatorname{int} E_d(x^*) = \emptyset$. Таким образом, проблема отыскания элемента $\xi \in E_d(x^*)$ фактически не намного проще исходной задачи (1). Эти соображения стимулировали изучение процессов (3), (4) при ослабленных по сравнению с (8)–(9) требованиях к выбору управляющего элемента ξ. Выделим два основных направления таких исследований.

Во-первых, процессы (3), (4) исследовались при замене (8) условием

$$\xi = x^* + F'^*(x^*)v + w; \quad v \in H_2, \quad w \in H_1, \quad \|v\| \leqslant d, \quad \|w\| \leqslant \Delta, \tag{11}$$

где $\Delta > 0$. Требование (11) предполагает выбор элемента ξ из Δ-окрестности эллипсоида $E_d(x^*)$, которая в отличие от самого $E_d(x^*)$ является уже множеством с непустой внутренностью в H_1. Хотя при $n \to \infty$ процессы (3), (4) в этом случае, вообще говоря, расходятся, можно указать [1–3] конструктивные способы определения момента останова $N = N(\Delta)$, обеспечивающие вместо (10) оценку

$$\|x_{N(\Delta)} - x^*\| \leqslant C_4\Delta, \quad C_4 = C_4(N_1, N_2). \tag{12}$$

В отличие от $\|v\|$, на величину Δ верхние ограничения не налагаются.

Во-вторых, наряду с (3) изучался [4] класс итерационных процессов

$$x_{n+1} = \xi_n - \Theta\bigl(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\bigr)F'^*(x_n)\bigl[F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi_n)\bigr] \tag{13}$$

с адаптивным выбором управляющего элемента ξ_n из условия

$$\xi_n = x^* + F'^*(x_n)v_n, \quad \|v_n\| \leqslant d = d(N_1, N_2). \tag{14}$$

Для более общих схем (13) с условием

$$\xi_n = x^* + F'^*(x_n)v_n + w_n, \quad \|v_n\| \leqslant d, \quad \|w_n\| \leqslant \Delta \tag{15}$$

имеет место аналогичная (12) оценка.

Проведенные исследования оставляют открытым вопрос об алгоритмических методах отыскания элемента ξ либо ξ_n из условий (11), (14), (15). Основная трудность здесь заключается в том, что центр x^* эллипсоидов $E_d(x^*)$ и $E_d(x_n) \equiv x^* + F'^*(x_n)S_d$ неизвестен. В дальнейшем для единообразия будем говорить о задаче отыскания элемента ξ из условия

$$\xi = x^* + F'^*(z)v + w, \quad \|v\| \leqslant d, \quad \|w\| \leqslant \Delta, \tag{16}$$

где $z \in H_1$ — фиксированный или произвольный элемент, величины d и Δ заданы. Ниже проанализируем возможности алгоритмического отыскания элемента ξ из условия (16) в различных предположениях относительно точки z и значений d, Δ.

2. Конечномерная задача. Ограничимся случаем конечномерных пространств $H_1 = \mathbb{R}^n$, $H_2 = \mathbb{R}^m$ и примем, что искомое решение, если оно существует, априори принадлежит выпуклому замкнутому ограниченному множеству $Q \subset H_1$. Без существенной потери в общности можно положить $Q = [0,1]^n$. Отметим, что интересующие нас процедуры (3), (4), (13) допускают простую модификацию, позволяющую явно учесть априорную информацию вида $x^* \in Q$, где Q — произвольное выпуклое замкнутое подмножество пространства H_1. Например, для (13) такая модификация имеет вид

$$x_{n+1} = P_Q\bigl\{\xi_n - \Theta\bigl(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n\bigr)F'^*(x_n)\bigl[F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi_n)\bigr]\bigr\}, \tag{17}$$

где P_Q — оператор метрического проектирования из H_1 на множество Q. Непосредственно проверяется, что все перечисленные выше утверждения относительно процессов (3), (4), (13) имеют место и для их проекционных модификаций, при этом условие (2) достаточно требовать лишь для точек $x, y \in Q$. Поскольку генерируемые согласно (17) итерационные точки x_n принадлежат Q, при изучении условия (16) можно ограничиться лишь случаем $z \in Q$.

Следующее наше ограничение связано со структурой оператора задачи (1). Будем рассматривать квадратичные операторы F вида

$$\begin{aligned} &F(x) = \bigl(F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x)\bigr)^T, \\ &F_j(x) = (A_j x, x) + (a_j, x) + b_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{18}$$

где $A_j = (A_j^{k,l}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_j = (a_j^k) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$. Уточним теперь постановку вопроса. Пусть вначале z в (16) — заданный элемент из $Q = [0,1]^n$. В применении к схеме (15), (17), имеем $z = x_n$. Пусть также заданы d, $\Delta > 0$. Обозначим через $Q^* \subset Q$ множество решений уравнения (1), (18), быть может пустое, а через K — класс всех операторов вида (18). Определим отображение $\mathcal{F} : K \times Q \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(F; z, d, \Delta) = \begin{cases} \xi \in x^* + F'^*(z)S_d + S_\Delta, \quad x^* \in Q^*, & Q^* \neq \emptyset; \\ \xi_0, & Q^* = \emptyset, \end{cases} \tag{19}$$

где $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ — некоторый заранее неизвестный элемент. Отображение $\mathcal{F}$ удобно рассматривать в качестве оракула, завершающего работу за конечное время и при входе $(F; z, d, \Delta)$ выдающего элемент ξ, удовлетворяющий (16) с некоторыми $x^* \in Q^*$, $v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, если $Q^* \neq \emptyset$. При этом выдача самих векторов x^*, v, w не предполагается. Нас интересует вопрос о потенциальной трудоемкости вычисления $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$.

Следуя [5, гл. 2], будем понимать трудоемкость как число операций, выполняемых на классической детерминированной машине Тьюринга над записью в конечном алфавите, кодирующей набор $(F; z, d, \Delta)$. Начиная с этого места удобно считать все элементы массивов A_j, a_j, z, ξ, ξ_0, а также константы b_j, d, Δ $(j = 1, 2, \dots, m)$ двоично-рациональными числами; в этом случае можно иметь в виду обычное двоичное кодирование. Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F; z, d, \Delta)$ величину, оценивающую по порядку длину кода $(F; z, d, \Delta)$. В случае неотрицательных целых элементов массивов можно принять

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\sum_{j=1}^{m}\Bigl(\sum_{k,l=1}^{n}\log\bigl(A_j^{k,l}+1\bigr) + \sum_{k=1}^{n}\log\bigl(a_j^k+1\bigr) + \log\bigl(b_j+1\bigr)\Bigr) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\log\bigl(z^k+1\bigr) + \log(d+1) + \log(\Delta+1), \end{aligned} \tag{20}$$

где log — логарифм по основанию 2. Для кодирования двоично-рациональных массивов необходимый объем памяти составляет порядка $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + mn^2 + (n+1)m$ битов, где $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ определяются аналогично (20) и отвечают целой и дробной части соответствующих величин, остальные слагаемые учитывают коды знаков элементов массивов.

При оценке трудоемкости алгоритмической реализации отображения (19) будем использовать традиционную шкалу [5]. Согласно этой шкале, простейшими считаются задачи, допускающие полиномиальные алгоритмы, т.е. алгоритмы, гарантированно генерирующие ответ за время, оцениваемое полиномом от длины входной записи. Прочие задачи относятся к труднорешаемым. Про такие задачи можно сказать, что они в своей общей формулировке “практически неразрешимы” на современной и перспективной вычислительной технике, если размеры входных массивов достаточно велики. В настоящее время не известно ни одного примера трудноршаемой в этом смысле задачи, т.е. задачи, отсутствие полиномиальных алгоритмов решения которой было бы строго доказано. В то же время подавляющее большинство специалистов убеждено, что такие задачи существуют. Это задачи, многолетний опыт решения которых, несмотря на значительные усилия, привел лишь к построению алгоритмов с экспоненциальной трудоемкостью относительно длины входной записи. Среди этих задач, в свою очередь, выделяются такие, для которых построение полиномиального алгоритма означало бы автоматическую полиномиальную разрешимость всех вычислительных проблем, допускающих формализацию в терминах недетерминированной машины Тьюринга (проблем класса $\mathcal{NP}$). Обширный список подобных задач, называемых $\mathcal{NP}$-полными, приведен в [5]. Априори выполняется $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$. Известная проблема "$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?" как раз и сводится к построению полиномиального алгоритма хотя бы для одной $\mathcal{NP}$-полной задачи либо к доказательству отсутствия полиномиальных алгоритмов хотя бы для одной задачи класса $\mathcal{NP}$.

3. Истокопредставимость в задаче о рюкзаке. Для дальнейшего существенно, что к числу $\mathcal{NP}$-полных задач относится бинарная задача о рюкзаке в следующей постановке [5, с. 283]. Задан вектор $a \in \mathbb{N}^n$ и число $b \in \mathbb{N}$. Требуется установить, разрешимо ли уравнение

$$(a, x) = b, \quad x \in \{0, 1\}^n. \tag{21}$$

Как отмечено выше, построение алгоритма решения задачи (21), полиномиального по битовой длине входа $(a, b) \in \mathbb{N}^{n+1}$, влечет равенство $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, противоречащее имеющемуся обширному опыту теоретического и численного исследования алгоритмов дискретного анализа. Следовательно, если в предположении полиномиальной вычислимости $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ удастся построить полиномиальный алгоритм для задачи (21), то можно будет заключить, что создание алгоритма, полиномиально вычисляющего $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ при соответствующих значениях аргументов, крайне маловероятно.

Перепишем задачу (21) в виде (18):

$$F(x) = 0; \quad F(x) = \big((x^1)^2 - x^1, \dots, (x^n)^2 - x^n, (a, x) - b\big)^T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{22}$$

Напомним, что решения уравнения (22) разыскиваются в кубе $Q = [0, 1]^n$, при этом $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Длину входной записи, кодирующей данные задачи (22), можно оценить по порядку величиной $\mathcal{L} = \sum\limits_{k=1}^{n} \log(a^k + 1) + \log(b + 1) + n$. Пусть вначале $Q^* \neq \emptyset$. Из (22) получаем, что равенство (16) эквивалентно соотношению

$$\xi^k = (x^*)^k + v^k(2z^k - 1) + v^{n+1}a^k + w^k, \quad k = 1, \dots, n; \quad x^* \in Q^*. \tag{23}$$

Полагая в (23) $z^k = 1/2$, $k = 1, \dots, n$, находим

$$\xi = x^* + v^{n+1}a + w. \tag{24}$$

Обозначим через M гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = b\}$. Оператор метрического проектирования из $\mathbb{R}^n$ на M имеет вид

$$P_M(x) = x - \frac{(a, x) - b}{\|a\|^2}\, a, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{25}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Из (24) и (25) следует

$$\eta \equiv P_M(\xi) = x^* + w - \frac{(a, w)}{\|a\|^2}\, a,$$

поэтому

$$\|\eta - x^*\|^2 = \|w\|^2 - \frac{(a, w)^2}{\|a\|^2} \leqslant \|w\|^2.$$

Мы заключаем, что если выполняется условие $\Delta < 1/2$, т.е.

$$\|w\| < \frac{1}{2},$$

то для вектора η справедливо

$$\|\eta - x^*\| < \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Как видно из (25), вычисление компонент вектора $\eta = P_M(\xi)$ при заданном двоично-рациональном векторе ξ требует $O(\mathcal{L})$ арифметических операций. Поэтому в предположении полиномиальной вычислимости $\xi = \mathcal{F}(F; z_0, d, \Delta)$ с $z_0 = (1/2, \ldots, 1/2)$, $\Delta < 1/2$, вектор η также полиномиально вычислим. Поскольку компонентами любого решения x^* являются 0 и 1, только один вектор $x^* \in Q^*$ может удовлетворять (26). Кроме того, в силу (26) имеем $|\eta^k - (x^*)^k| < 1/2$ для всех $k = 1, \ldots, n$, поэтому для вычисления компонент $(x^*)^k$ вектора x^* достаточно произвести округление соответствующих значений η^k до ближайшего целого значения. Эта операция требует полиномиального по $\mathcal{L}$ числа операций. Остается рассмотреть случай $Q^* = \emptyset$, когда результатом работы оракула $\mathcal{F}$ является произвольный элемент ξ_0. Производя все указанные выше действия с этим элементом и вычисляя с помощью округления соответствующий вектор x_0^*, подстановкой в уравнение (21) в результате полиномиального числа арифметических операций убеждаемся, что x_0^* ему не удовлетворяет. Это позволяет заключить, что $Q^* = \emptyset$. Подытожим сказанное.

Теорема 1. *Предположим, что отображение $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ полиномиально вычислимо на классе операторов F вида* (18) *при всех произвольно задаваемых $z \in Q$ с некоторыми априори неизвестными $d > 0$, $\Delta < 1/2$. Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

Из теоремы 1 следует, что при ее условиях, по-видимому, не существует алгоритма эффективного вычисления $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$, относящегося сразу ко всем точкам $z \in Q$, если $\Delta < 1/2$. Этот вывод справедлив при любом, сколь угодно большом значении d. Таким образом, ослабление требований на величину d в (11), (15) не упрощает проблему алгоритмического поиска соответствующего элемента ξ либо ξ_n. Рассмотрим некоторые другие варианты ослабления условий задачи вычисления $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$.

4. Ослабленные варианты условия истокопредставимости. Доказательство теоремы 1 существенно использовало специальный выбор точки $z \in Q$. Требование полиномиальной вычислимости $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ для любого заданного $z \in Q$ было мотивировано достаточно произвольным изменением текущей итерационной точки x_n в (15) в пределах множества Q. В то же время, в условиях истокопредставимости (8), (11) точка $z = x^*$ фиксирована. Проанализируем в этой связи возможности полиномиального вычисления вектора $\xi \in \mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ для некоторого, заранее неизвестного элемента $z \in Q$. С этой целью зафиксируем $\varepsilon > 0$ и вместо (22) рассмотрим оператор

$$F(x) = \big(\varepsilon((x^1)^2 - x^1), \ldots, \varepsilon((x^n)^2 - x^n), (a, x) - b\big)^T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{27}$$

Ясно, что задача (21) эквивалентна уравнению $F(x) = 0$ с оператором F, определенным в (27). В рассматриваемом случае представление (23) принимает вид

$$\xi = x^* + v^{n+1} a + \widetilde{w}, \quad \widetilde{w}^k = \varepsilon v^k (2z^k - 1) + w^k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Поскольку $z^k \in [0, 1]$, имеем $|2z^k - 1| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$, и поэтому

$$\|\widetilde{w}\| \leqslant \varepsilon \|v\| + \|w\| \leqslant d\varepsilon + \Delta. \tag{28}$$

Повторяя теперь предыдущие рассуждения с заменой w на $\widetilde{w}$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Предположим, что отображение $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ полиномиально вычислимо на классе операторов F вида* (18) *с некоторыми априори неизвестными $z \in Q$ и $d > 0$, Δ, такими, что для выбранного $\varepsilon > 0$ выполняется $d\varepsilon + \Delta < 1/2$. Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

Следствие 1. *Пусть существует такая константа d_0, что отображение $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ полиномиально вычислимо на классе операторов F вида* (18) *с некоторыми априори неизвестными $z \in Q$ и d, Δ, такими, что $0 < d \leqslant d_0$, $\Delta < 1/2$. Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

Для получения следствия достаточно в теореме 2 выбрать $0 < \varepsilon < d_0^{-1}(1/2 - \Delta)$.

Следствие 1 показывает, что даже предельное ослабление требований к выполнению условий истокопредставимости (11), (15), включающее в себя замену фиксированных аргументов x^*, $x_n \in Q$ оператора F'^* заранее не известной точкой $z \in Q$ с произвольным назначением верхних границ для норм v, v_n, не делает задачу вычисления ξ, ξ_n алгоритмически разрешимой в приемлемое время. Само требование $z \in Q$, согласно которому элемент z должен выбираться в пределах того множества Q, которому априори принадлежит решение, также не является существенным. Действительно, зафиксируем произвольно $c_0 > 1/2$ и положим $Q_{c_0} = [1/2 - c_0, 1/2 + c_0]^n$, при этом $Q_{c_0} \supset Q = Q_{1/2}$. Заменяя в доказательстве теоремы 2 включение $z \in Q$ на $z \in Q_{c_0}$, вместо (28) получаем $\|\widetilde{w}\| \leqslant 2c_0 d\varepsilon + \Delta$. Выбирая затем $\varepsilon < (2c_0 d_0)^{-1}(1/2 - \Delta)$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. *Пусть существуют такие константы c_0, d_0, что отображение $\mathcal{F}(F; z, d, \Delta)$ полиномиально вычислимо на классе операторов F вида* (18) *с некоторыми априори неизвестными $z \in Q_{c_0}$ и d, Δ, такими, что $0 < d \leqslant d_0$, $\Delta < 1/2$. Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

В заключение проанализируем в рамках нашей модели возможности алгоритмического выбора начального приближения x_0, близкого к решению x^*. Аналогично (19) введем отображение

$$\mathcal{G}(F; \delta) = \begin{cases} x_0 \in x^* + S_\delta, \quad x^* \in Q^*, & Q^* \neq \emptyset; \\ x_{01}, & Q^* = \emptyset \end{cases}$$

с произвольным $x_{01} \in \mathbb{R}^n$. Считаем, что векторы x_0, x_{01} имеют двоично-рациональные компоненты. Рассуждения, проведенные выше после (26), приводят к следующему утверждению.

Предложение 1. *Предположим, что отображение $\mathcal{G}(F; \delta)$ полиномиально вычислимо на классе операторов F вида* (18) *с некоторым $\delta < 1/2$. Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

5. Заключение. Как показывает предложение 1, алгоритмическое обеспечение достаточной близости начального приближения к решению столь же проблематично, как и отыскание управляющего элемента ξ из условий истокопредставимости (11), (15). Имея в виду оценку (12), можно утверждать, что формально-алгоритмическое получение достаточно хороших приближений к решению (1) с использованием процессов (3), (4), (13) маловероятно даже на классе конечномерных квадратичных задач. Этот вывод является дополнительным стимулом к изучению стохастических и эвристических процедур выбора управляющих параметров рассматриваемых итерационных схем. Следствие 1 указывает также на целесообразность разработки подобных процедур в применении к условиям истокопредставимости вида

$$\xi_n = x^* + \big(F'^*(x_n)F'(x_n)\big)^p v_n + w_n, \quad \|v_n\| \leqslant d_n, \quad \|w_n\| \leqslant \Delta; \quad p > 1/2,$$

допускающим неограниченный рост величины d_n при $n \to \infty$ (см. [4, 6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал УРСС, 2002.
2. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu.* Iterative methods for approximate solution of inverse problems. Dordrecht: Springer, 2004.
3. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения нерегулярных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2006.
4. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы с нечеткой обратной связью для решения нерегулярных операторных уравнений // Докл. РАН. 2009. **428**, № 5. 583–585.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. *Bakushinsky A., Smirnova A.* Irregular operator equations by iterative methods with undetermined reverse connection // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010. **18**, N 2. 147–165.

Поступила в редакцию
15.02.2011