УДК 517.957; 519.633; 532.516.5

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОКЕАНА И ОБОСНОВАНИИ СХЕМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

В. Б. Сухов[1]

Рассматриваются новые априорные оценки для решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана, дополняющие результаты, полученные Г. М. Кобельковым при доказательстве теоремы существования и единственности решения задачи. На основании полученных оценок доказана сходимость решений, вычисленных в результате применения приближенных методов, в том числе схем расщепления, к точному решению дифференциальной задачи. Приведены применяемые на практике схемы, ранее в теоретических работах не рассматривавшиеся. Представленные результаты дополняют и развивают ранее опубликованные исследования автора.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, уравнения динамики океана, примитивные уравнения, уравнения Навье–Стокса, методы расщепления, геофизическая гидродинамика.

1. Введение. Одной из наиболее крупных и важных задач математического моделирования геофизических процессов является задача моделирования крупномасштабной динамики мирового океана. Наряду с моделями динамики атмосферы, модели динамики океана играют важнейшую роль в решении задач долгосрочного прогноза изменения климата, краткосрочного прогноза погоды, а также моделирования развития катастроф, в том числе техногенного характера. В настоящее время общепринятой основой моделирования крупномасштабных океанических явлений служит широко известная система уравнений крупномасштабной динамики океана [6, 24]. На основе последней во многих мировых научных центрах созданы модели [2, 20], включающие большие программные комплексы, результаты вычислений по которым служат основой для выработки рекомендаций правительствам государств в связи с угрозой глобальных климатических изменений.

Система уравнений динамики океана вызывает интерес как с точки зрения прикладного моделирования геофизических процессов, так и с точки зрения теоретического математического анализа [11, 15, 18]. Одним из последних наиболее важных результатов по этой тематике служит приведенное в [16] доказательство корректности постановки начально-краевой задачи для системы уравнений динамики океана (теорема существования и единственности) в наиболее общих предположениях.

При численном решении начально-краевой задачи для системы уравнений крупномасштабной динамики океана используются как явные [8, 12], так и неявные схемы по времени [19]. В последнем случае перед исследователями встает задача решения сложной по структуре системы эволюционных уравнений в частных производных с большим количеством неизвестных, что в совокупности со сложной геометрией расчетной области приводит после дискретизации задачи к системе нелинейных (в случае использования линеаризованных схем — линейных) уравнений с огромным (порядка сотен миллионов) количеством неизвестных на каждом шаге по времени. Прямое решение такой системы известными на данный момент методами практически невозможно даже с использованием новейшей вычислительной техники и современных программных комплексов. Более того, разработка специальных алгоритмов, позволяющих получить решение всей системы уравнений, также представляется затруднительной. В этой ситуации в основу алгоритма решения задачи в модели, разрабатываемой в Институте вычислительной математики РАН [1, 3, 19], была положена техника методов расщепления [5]. Идея методов расщепления заключается в разбиении оператора задачи на аддитивные составляющие и в последовательном обращении более простых операторов с использованием дробных шагов по времени.

Для параболических систем эволюционных уравнений с линейным оператором (зависящим или не зависящим от времени) достаточно давно была построена общая теория методов расщепления, иначе

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; аспирант, e-mail: V_Sukhov@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

называемых аддитивными схемами (см., например, работы [5, 7]). Для систем уравнений, не являющихся системами типа Коши–Ковалевской, и для систем с нелинейным дифференциальным оператором исследование применимости таких методов носит индивидуальный характер. Для системы уравнений Навье–Стокса применение схем расщепления (наиболее известной из которых является схема Чорина) было обосновано в работах [10, 21–23]. Однако до настоящего времени аналогичных исследований схем расщепления для уравнений динамики океана проведено не было. Система уравнений крупномасштабной динамики океана имеет ряд существенных отличий от системы уравнений Навье–Стокса (иная структура неизвестных функций, отличающаяся структура нелинейных членов, присутствие членов, обусловленных наличием силы Кориолиса), которые делают полученные для системы уравнений Навье–Стокса результаты не переносимыми непосредственно на рассматриваемую задачу и требуют проведения дополнительных исследований.

Настоящая статья представляет собой развитие исследований автора в данном направлении, опубликованных в работах [9, 17]. В частности, доказаны априорные оценки решения задачи, придающие завершенность некоторым доказанным в упомянутых работах утверждениям, а также рассмотрены и обоснованы новые варианты схем расщепления, в том числе имеющие важное практическое значение. Приводятся формулировки полученных результатов. Полные доказательства будут опубликованы в последующих работах.

В работе наряду с общепринятыми обозначениями для дифференциальных операторов, функциональных пространств и норм в этих пространствах будут использованы вслед за [16] некоторые обозначения, удобные для исследования уравнений динамики океана. Через x, y, z обозначим декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Обозначим $\nabla' = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\operatorname{div}' v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y}$ для $v = (v_1, v_2)$, $\triangle' = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Кроме того, введем оператор, соответствующий действию силы Кориолиса: $\ell v = \bigl(-kv_2, kv_1\bigr)$ для $v = (v_1, v_2)$, где $k = \mathrm{const} > 0$ (при этом условие $k = \mathrm{const} > 0$ не существенно и введено лишь для сокращения обозначений, все приводимые утверждения справедливы и для случая $k = k(x, y)$, $|k| < k^* < \infty$). Для векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ обозначим $a \times b = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Под n и $\dfrac{\partial}{\partial n}$, как обычно, будем понимать внешнюю нормаль к рассматриваемой области и производную по направлению нормали. Основными интересующими нас функциональными пространствами будут выступать пространства L_2, W_2^1, L_4, W_2^{-1} и W_2^2 для областей двух и трех пространственных переменных; соответствующие нормы будут обозначаться как $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_4$, $\|\cdot\|_{-1}$ и $\|\cdot\|_{W_2^2}$. Нормы в каких-либо других пространствах обозначаются с указанием этого пространства в качестве индекса. Под $\|\varphi_{xx}\|$ будем понимать, как обычно, $\left(\displaystyle\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx\, dy\, dz\right)^{1/2}$, где $x_1 = x$, $x_2 = y$ и $x_3 = z$. Пространства векторных и скалярных функций будут обозначены одними и теми же символами, поскольку из контекста всегда понятно, о скаляре или векторе идет речь, к путанице это приводить не будет. Через $(\cdot, \cdot)$ будет обозначено скалярное произведение в L_2.

2. Новые априорные оценки решения задачи крупномасштабной динамики океана. Следуя [16], рассмотрим систему уравнений крупномасштабной динамики океана в упрощенной постановке:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \triangle u + \ell u + \nabla' p + u \cdot \nabla' u + u_3 \partial_z u = 0, \\
&\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho, \\
&\operatorname{div}' u + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} - \mu \triangle \rho + u \cdot \nabla' \rho + u_3 \partial_z \rho = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2)$, коэффициенты ν и μ предполагаются произвольными положительными постоянными. Система уравнений рассматривается в области $\Omega = \Omega' \times [0, 1]$ — цилиндр в $\mathbb{R}^3$, где Ω' — область в плоскости переменных x, y, регулярность которой будет оговорена особо; в общем случае предполагаем, по крайней мере, границу области Ω' состоящей из конечного числа гладких кривых, пересекающихся под ненулевым углом [16]. Границу области Ω представим в виде $\partial\Omega = S \cup S_1$, где $S = \partial\Omega' \times [0, 1]$ и

$S_1 = \partial\Omega/S$. Система уравнений (1) дополняется следующими начальными и граничными условиями:

$$u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n} \times n = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad u_3 = 0 \text{ на } S_1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{2}$$
$$u(0,x,y,z) = u_0(x,y,z), \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' u(0,x,y,z)\, dz = 0, \quad \rho(0,x,y,z) = \rho_0(x,y,z).$$

Условие $\int\limits_0^1 \operatorname{div}' u(0,x,y,z)\,dz = 0$ представляет собой условие корректности задания начальных условий задачи. Относительно начальных данных задачи будем предполагать, что $u_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$. Задача рассматривается на конечном временно́м интервале $[0,T]$.

Представленная задача крупномасштабной динамики океана отличается от полной физической постановки прежде всего отсутствием метрических коэффициентов (т.е. соответствует многообразию, для которого все метрические коэффициенты тождественно равны единице). Другим существенным отличием является использование наряду с приближением твердой крышки приближения плоского дна, отраженное в цилиндричности области Ω. Кроме того, произведен ряд других, менее существенных упрощений: коэффициенты k силы Кориолиса и коэффициенты ν и μ вязкости и диффузии считаются постоянными. Следует отметить, что в целях упрощения записи в уравнениях не фигурирует нормирующий множитель ρ_*, вместо его использования можно просто считать, что коэффициент g имеет размерность не $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а $\frac{\text{м}^4}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$, при этом размерность величины p считается измененной соответствующим образом: $[p] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$. Данная упрощенная постановка задачи традиционно используется для теоретических исследований [5, 11, 15, 16].

Вслед за [16] мы будем представлять p в виде

$$p = p_1 + p_2: \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad p_2(t,x,y,z) = \int\limits_0^z g\rho(t,x,y,\xi)\, d\xi - \int\limits_0^1 \int\limits_0^z g\rho(t,x,y,\xi)\, d\xi\, dz.$$

Под исходными данными задачи будет пониматься набор чисел, состоящий из констант, ограничивающих нормы $\|u_0\|_{W_2^2}$ и $\|\rho_0\|_{W_2^2}$, а также из констант, участвующих в используемых теоремах вложения и в классических неравенствах и зависящих от геометрии области Ω', величины временно́го интервала T, коэффициентов диффузии и вязкости μ и ν, величины коэффициента силы Кориолиса k и коэффициента g. Под символом c будем понимать величины, ограниченные некоторой функцией от исходных данных задачи (с конечным значением для любого фиксированного набора исходных данных). Под этим символом могут также пониматься различные величины даже в рамках одной цепи равенств или неравенств.

Теорема существования и единственности решения задачи (1), (2) в достаточно общих предположениях впервые доказана в работе [16], в которой, в частности, показана ограниченность константой, зависящей только от исходных данных задачи, следующих величин:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left(\|u\|_1 + \|\partial_z u\|_4 + \|u_3\| + \|\rho\|_1 + \|u_t\| + \|\rho_t\| \right), \quad \int\limits_0^T \left(\|u_t\|_1^2 + \|\rho_t\|_1^2 + \|\partial_z \rho\|_1^2 \right) dt.$$

Однако для безусловного обоснования сходимости численных методов решения задачи этих оценок недостаточно.

Сформулируем основное предположение относительно области Ω'.

Предположение 1. *Область Ω' такова, что существует постоянная c, такая, что для произвольного $f = (f_1, f_2) \in L_2(\Omega)$ для решения задачи (аналога задачи Стокса для системы уравнений крупномасштабной динамики океана)*

$$-\nu \triangle u + \nabla' p = f, \quad u = (u_1, u_2),$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' u\, dz = 0, \quad u \cdot n = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \times n = 0 \;\text{ на }\; S, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \;\text{ на }\; S_1$$

выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_2^2} + \|\nabla' p\| \leqslant c\|f\|. \qquad (3)$$

Априорная оценка (3) хорошо известна для решения классической задачи Стокса с однородным граничным условием Дирихле в областях с дважды непрерывно дифференцируемой границей [4, 10]. Подробное исследование выполнения сформулированного выше свойства для широкого класса областей представляется отдельной задачей, однако, используя разложение решения в ряд Фурье по переменной z и переход к векторному потенциалу для функции u, нетрудно доказать следующее

Утверждение 1. *Пусть Ω' является прямоугольником. Тогда выполнено предположение* 1.

В рамках сформулированного предположения с использованием техники получения оценок, развитой в работах [13, 16, 23], и сформулированных выше известных результатов об ограниченности различных норм решения можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1. *Пусть $u_0 \in W_2^2(\Omega)$ и $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$. Тогда для произвольного $t \in [0,T]$ решение задачи* (1), (2) *удовлетворяет следующим соотношениям: $\|u\|_{W_2^2} \leqslant c$, $\|u_3\|_1 \leqslant c$, $\|\nabla p\| \leqslant c$, $\|\nabla' p_1\| \leqslant c$, $\|\rho\|_{W_2^2} \leqslant c$, $\int\limits_0^T \|u_{tt}\|_{-1}^2\,dt \leqslant c$ и $\int\limits_0^T \|\rho_{tt}\|_{-1}^2\,dt \leqslant c$, где константа c зависит только от исходных данных задачи.*

3. Схемы расщепления для уравнений динамики океана. Для исследования схем численного решения задачи (1), (2) рассмотрим вначале сокращенную систему уравнений крупномасштабной динамики океана

$$u_t - \nu\triangle u + \nabla' p + \ell u + u\cdot\nabla' u - \int\limits_0^z \operatorname{div}' u\,dz\,\partial_z u = f, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' u\,dz = 0, \qquad (4)$$

дополненную граничными и начальными условиями (2). Система (4) получается из системы (1) после произведения следующих сокращений: неизвестная функция ρ условно считается известной, компонента p_2 в разложении $p = p_1 + p_2$ определяется из второго уравнения (1) и неизвестной остается только компонента p_1, переобозначенная через p, компонента u_3 выражается через u_1 и u_2 из третьего уравнения (1), а граничные условия для u_3 представляются в виде последнего уравнения в (4).

Система (4) представляет собой так называемый гидродинамический блок системы уравнений крупномасштабной динамики океана и является наиболее сложной частью полной системы (1) при исследованиях схем дискретизации по времени, в частности схем расщепления. Полученные для системы (4) результаты легко переносятся на случай полной системы.

Для нелинейных конвективных членов и соответствующих им трилинейных форм удобно ввести следующие обозначения: $B_1(u,v) = u\cdot\nabla' v$, $B_2(u,v) = \int\limits_0^z \operatorname{div}' P_J u\,dz\,\partial_z v$, $B(u,v) = B_1(u,v) - B_2(u,v)$, $b_1(u,v,w) = \big(B_1(u,v),w\big)$, $b_2(u,v,w) = \big(B_2(u,v),w\big)$, $b(u,v,w) = \big(B(u,v),w\big)$.

С использованием классических теорем вложения и их следствий [4] нетрудно показать справедливость следующего утверждения:

Утверждение 2. *Существует такая константа c, зависящая только от геометрии области Ω, что для произвольных u, v, $w \in W_2^1(\Omega)$ справедливы неравенства* $\big|b_1(u,v,w)\big| \leqslant c\|u\|_4\,\|v\|_1\,\|w\|_4$,

$$\begin{aligned}
&\big|b_1(u,v,w)\big| \leqslant c\|u\|_1\,\|v\|_1\,\|w\|_4, \quad &&\big|b_1(u,v,w)\big| \leqslant c\|u\|_4\,\|v\|_1\,\|w\|_1, \quad &&\big|b_1(u,v,w)\big| \leqslant c\|u\|_1\,\|v\|_1\,\|w\|_1,\\
&\big|b_2(u,v,w)\big| \leqslant c\|u\|_1\,\|\partial_z v\|_4\,\|w\|_4, \quad &&\big|b_2(u,v,w)\big| \leqslant c\|u\|_1\|\,\partial_z v\|_4\,\|w\|_1, \quad &&\big|b_2(u,v,w)\big| \leqslant c\|u\|_{W_2^2}\,\|v\|_1\,\|w\|_1.
\end{aligned}$$

Сформулированные неравенства служат основой для получения оценок при исследовании дискретных схем численного счета. При доказательстве сходимости методов используется следующее известное утверждение.

Лемма 1 (дискретная лемма Гронуолла). *Пусть τ, B, a_n, b_n, c_n, γ_n — неотрицательные числа для всех $n \geqslant 0$, такие, что для любого $0 \leqslant m \leqslant N$ выполнено неравенство*

$$a_m + \tau\sum_{n=0}^m b_n \leqslant \tau\sum_{n=0}^m \gamma_n a_n + \tau\sum_{n=0}^m c_n + B.$$

Пусть $\tau\gamma_n \leqslant 1$ *для всех* $0 \leqslant n \leqslant N$. *Обозначим* $\sigma_n = (1-\tau\gamma_n)^{-1}$. *Тогда для всех* $0 \leqslant m \leqslant N$ *выполнено неравенство* $a_m + \tau\sum\limits_{n=0}^{m} b_n \leqslant \exp\left(\tau\sum\limits_{n=0}^{m}\sigma_n\gamma_n\right)\left(\tau\sum\limits_{n=0}^{m} c_n + B\right)$.

Доказательство леммы в такой формулировке можно найти в [14].

Как обычно, полагаем $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$, $f^n = f(t_n)$ и $u^0 = u_0$. Тогда для системы уравнений (4) можно рассмотреть схемы дискретизации по времени, представленные в таблице.

А. Двухэтапная схема расщепления с учетом действия силы Кориолиса на первом этапе	**I.** $\dfrac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} - \nu\triangle u^{n+1/2} + \ell u^{n+1/2} + B(u^n, u^{n+1/2}) = f^{n+1}$, **II.** $\dfrac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} + \nabla' p^{n+1} = 0, \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' u^{n+1}\,dz = 0.$
Б. Двухэтапная схема расщепления с учетом действия силы Кориолиса на втором этапе	**I.** $\dfrac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} - \nu\triangle u^{n+1/2} + B(u^n, u^{n+1/2}) = f^{n+1}$, **II.** $\dfrac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} + \ell u^{n+1} + \nabla' p^{n+1} = 0, \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' u^{n+1}\,dz = 0.$
В. Трехэтапная схема расщепления	**I.** $\dfrac{u^{n+1/3}-u^n}{\tau} - \nu\triangle u^{n+1/3} + B(u^{n-1/3}, u^{n+1/3}) = f^{n+1}$, **II.** $\dfrac{u^{n+2/3}-u^{n+1/3}}{\tau} + \nabla' p^{n+1} = 0, \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' u^{n+2/3}\,dz = 0,$ **III.** $\dfrac{u^{n+1}-u^{n+2/3}}{\tau} + \ell u^{n+1} = 0.$

Для перечисленных схем автором получен следующий основной результат.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда для решений разностных схем* А–В *для произвольного* n, *такого, что* $1 \leqslant n \leqslant N$, *при достаточно малом* τ *справедливы следующие оценки близости к точному решению задачи* (4):

$$
\begin{array}{llll}
\left\|u(t_n) - u^{n-1/2}\right\| \leqslant c\sqrt{\tau}, & \left\|u(t_n) - u^n\right\| \leqslant c\sqrt{\tau} & & (\text{для схем А, Б}),\\
\left\|u(t_n) - u^{n-2/3}\right\| \leqslant c\sqrt{\tau}, & \left\|u(t_n) - u^{n-1/3}\right\| \leqslant c\sqrt{\tau}, & \left\|u(t_n) - u^n\right\| \leqslant c\sqrt{\tau} & (\text{для схемы В}),
\end{array}
$$

где константа c *зависит только от исходных данных задачи* (4).

Развитую при исследовании сокращенной системы уравнений технику можно применить при изучении схем расщепления для полной системы уравнений:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\triangle u + \ell u + \nabla' p + u\cdot\nabla' u + u_3\partial_z u = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{1}{\rho_*} g\rho,\\
\operatorname{div}' u + \dfrac{\partial u_3}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} - \mu_T\triangle\mathcal{T} + u\cdot\nabla'\mathcal{T} + u_3\partial_z\mathcal{T} = 0,\\
\dfrac{\partial S}{\partial t} - \mu_S\triangle S + u\cdot\nabla' S + u_3\partial_z S = 0, & \rho(\mathcal{T}, S) = \alpha_T(\mathcal{T}-\mathcal{T}_*) + \alpha_S(S - S_*) + \rho_*,
\end{array}
\tag{5}
$$

$$
\begin{array}{l}
u\cdot n = \dfrac{\partial u}{\partial n}\times n = 0 \ \text{ на } \ S, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \ u_3 = 0 \ \text{ на } \ S_1, \quad \dfrac{\partial T}{\partial n} = 0, \ \dfrac{\partial S}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega,\\
u(0,x,y,z) = u_0(x,y,z), \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' u(0,x,y,z)\,dz = 0,\\
\mathcal{T}(0,x,y,z) = \mathcal{T}_0(x,y,z), \quad S(0,x,y,z) = S_0(x,y,z).
\end{array}
\tag{6}
$$

Здесь введены в рассмотрение дополнительные неизвестные $\mathcal{T}$ и S, что более соответствует реальной физической постановке задачи.

Рассмотрим, например, такую схему численного счета (реально применяющуюся на практике):

$$\frac{\mathcal{T}^{n+1}-\mathcal{T}^{n}}{\tau}-\mu_T\triangle\mathcal{T}^{n+1}+u^n\cdot\nabla'\mathcal{T}^{n+1}+u_3^n\partial_z\mathcal{T}^{n+1}=0, \tag{7}$$

$$\frac{S^{n+1}-S^{n}}{\tau}-\mu_S\triangle S^{n+1}+u^n\cdot\nabla' S^{n+1}+u_3^n\partial_z S^{n+1}=0, \tag{8}$$

$$\rho^{n+1}=\rho\big(\mathcal{T}^{n+1},S^{n+1}\big), \tag{9}$$

$$p_2^{n+1}(t,x,y,z)=\frac{g}{\rho_*}\left(\int\limits_0^z\rho^{n+1}(t,x,y,\xi)\,d\xi-\int\limits_0^1\int\limits_0^z\rho^{n+1}(t,x,y,\xi)\,d\xi\,dz\right), \tag{10}$$

$$\frac{u^{n+1/2}-u^{n}}{\tau}-\nu\triangle u^{n+1/2}+u^n\cdot\nabla' u^{n+1/2}+u_3^n\partial_z u^{n+1/2}=-\nabla' p_2^{n+1}, \tag{11}$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau}+\ell u^{n+1}+\nabla' p_1^{n+1}=0, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^1\operatorname{div}' u^{n+1}\,dz=0, \tag{13}$$

$$u_3^{n+1}=-\int\limits_0^z\operatorname{div}' u^{n+1}\,dz, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\mathcal{T}^{n+1}}{\partial n}=0,\quad \frac{\partial S^{n+1}}{\partial n}=0\ \text{ на }\ \partial\Omega, \tag{15}$$

$$u^{n+1/2}\cdot n=0,\quad \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial n}\times n=0\ \text{ на }\ S,\quad \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial n}=0\ \text{ на }\ S_1, \tag{16}$$

$$u^{n+1}\cdot n=0, \tag{17}$$

$$u^0=u_0,\quad \mathcal{T}^0=\mathcal{T}_0,\quad S^0=S_0. \tag{18}$$

Справедлива следующая основная теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда существует такое* $\tau^*>0$, *что для всех* τ, *таких, что* $0<\tau<\tau^*$, *для решений уравнений* (5), (6) *и* (7)–(18) *для всех* n, *таких, что* $1\leqslant n\leqslant N$, *выполнено неравенство*

$$\big\|u(t_n)-u^n\big\|+\big\|u(t_n)-u^{n-1/2}\big\|+\big\|\mathcal{T}(t_n)-\mathcal{T}^n\big\|+\big\|S(t_n)-S^n\big\|\leqslant c\sqrt{\tau},$$

где константа c *зависит только от исходных данных задачи* (5), (6) *и не зависит от* τ *и* n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дианский Н.А., Володин Е.М.* Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. **38**, № 6. 824–840.
2. *Дианский Н.А., Багно А.В., Залесный В.Б.* Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2002. **38**, № 4. 537–556.
3. *Дианский Н.А., Залесный В.Б., Мошонкин С.Н., Русаков А.С.* Моделирование муссоннной циркуляции океана с высоким пространственным разрешением // Океанология. 2006. **46**, № 4. 421–442.
4. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
5. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
6. *Марчук Г.И., Саркисян А.С.* Математическое моделирование циркуляции океана. М.: Наука, 1988.
7. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 2001.
8. *Саркисян А.С., Демин Ю.Л. и др.* Методы и результаты расчета вод Мирового океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
9. *Сухов В.Б.* О схемах расщепления для уравнений динамики океана // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 1. 29–33.
10. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса: теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

11. *Cao Ch., Titi E.S.* Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics // arXiv:math.AP/0503028. Nov. 2005. Vol. 2, N 16.
12. *Haidvogel D.B., Malanotte-Rizzoli P., Young R.E.* Initialization and data assimilation experiments with a primitive equation model // Dyn. Atmos. and Oceans. 1989. **13**. 349–378.
13. *Heywood J.G., Rannacher R.* Finite-element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. I. Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization // SIAM J. Numer. Anal. 1982. **19**, N 2. 275–311.
14. *Heywood J.G., Rannacher R.* Finite-element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. Part IV: error analysis for second-order time discretization // SIAM J. Numer. Anal. 1990. **27**, N 2. 353–384.
15. *Hu Ch., Temam R., Ziane M.* The primitive equations on the large scale ocean under the small depth hypothesis // Discrete and continuous dynamical systems. 2003. **9**, N 1. 97–131.
16. *Kobelkov G.M.* Existence of a solution "in the large" for ocean dynamics equations // J. Math. Fluid Mech. 2007. N 9. 588–610.
17. *Kobelkov G.M., Sukhov V.B.* Justification of splitting scheme for ocean dynamics equations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. **23**, N 4. 389–406.
18. *Lions J.L., Temam R., Wang S.* On the equations of the large-scale ocean // Nonlinearity. 1992. N 5. 1007–1053.
19. *Marchuk G.I., Rusakov A.S., Zalesny V.B., Diansky N.A.* Splitting numerical technique with application to the high resolution simulation of the Indian ocean circulation // Pure Appl. Geophys. 2005. N 162. 1407–1429.
20. *Madec G., Delecluse P., Imbard M., Levy C.* OPA 8.1. Ocean General Circulation Model. Reference Manual. Institute Pierre Simon Laplace, December 1998.
21. *Prohl A.* Projection and quasi-compressibility methods for solving the incompressible Navier–Stokes equations. B.G. Teubner: Stuttgart, 1997.
22. *Rannacher R.* On Chorin's projection method for the incompressible Navier–Stokes equations // Navier-Stokes Equations II. Theory and Numerical Methods. Lecture Notes in Math. N 1530. Berlin: Springer, 1992. 167–183.
23. *Shen J.* On error estimates of projection methods for Navier-Stokes equations: first order schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1992. **29**, N 1. 57–77.
24. *Temam R., Miranville A.* Mathematical modeling in continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

Поступила в редакцию
12.01.2009