УДК 519.652.3

# ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАЛЬДЕРОНА. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЭЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

**Я. М. Жилейкин**[1]

Дается обобщение теоремы Кальдерона на множество периодических функций из пространства $L^2\big([0,1)\big)$. На основе дискретного преобразования Фурье осуществляется дискретизация прямого и обратного вэйвлет-преобразований, что позволяет получить эффективные вычислительные алгоритмы. В качестве примера рассматривается вэйвлет "мексиканская шляпа".
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08–01–00285).

**Ключевые слова:** вэйвлеты, преобразование Фурье, оператор свертки.

**1. Введение.** Рассматриваются вещественные функции $f(t)$, $\psi(t)\in L^2(R)$, $(R:=-\infty<t<\infty)$, для которых дается доказательство теоремы Кальдерона. Пусть $\widehat{f}(\omega)$ — интегральное преобразование Фурье функции $f(t)$:

$$\widehat{f}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Если $f(t)$ определена на $[0,1)$ и периодически продолжается на всю ось $R$, т.е. $f(t)\in L^2\big([0,1)\big)$, то она раскладывается в ряд Фурье: $f(t)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}c_m(f)e^{2\pi imt}$, где $c_m(f)=\int\limits_0^1 f(t)e^{-2\pi imt}\,dt$, $m\in Z$, $\big\{c_m(f)\big\}\in l^2(Z)$, $Z$ — множество целых чисел.

Пусть $f_k=f(k/N)$, $k\in Z_N$, $Z_N$ — множество целых чисел от 0 до $N-1$, $f_k\in l^2(Z_N)$. Вводится дискретное преобразование Фурье вектора $\{f_k\}_{k\in Z_N}$:

$$c^g_m(f_k)=\frac{1}{N}\sum_{k\in Z_N}f_k e^{-(2\pi imk)/N},\quad f_k=\sum_{m\in Z_N}c^g_m(f_k)e^{(2\pi imk)/N},\quad m,k\in Z_N.$$

Важной операцией, связанной с преобразованием Фурье, является операция свертки двух функций $f(t)$, $g(t)$ и векторов $f_k$, $g_k$ :

1) $f*g(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\,g(t-u)\,du,\quad u,t\in R,$

2) $f*g(t)=\int\limits_0^1 f(u)\,g(t-u)\,du,\quad u,t\in[0,1)$, функции $f(t)$, $g(t)$ периодически продолжаются на $R$.

3) $f_k*g_k(\nu)=\frac{1}{N}\sum\limits_{k\in Z_N}f_k\,g_{\nu-k},\quad \nu\in Z_N;$ $\nu$ и $k$ продолжаются периодически с периодом $N$ на множество $Z$.

Основными свойствами операций свертки являются равенства:

1. $(\widehat{f*g})(\omega)=\widehat{f}(\omega)\,\widehat{g}(\omega),\quad \omega\in R,$

2. $c_m(f*g)=c_m(f)\,c_m(g),\quad m\in Z,$

3. $c^g_m(f_k*g_k)=c^g_m(f_k)\,c^g_m(g_k),\quad k,m\in Z_N.$

Подробно свойства операции свертки даются в работах [1–4].

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, Москва; зав. лабораторией, e-mail: jam@srcc.msu.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова

Введем непрерывное вэйвлет-преобразование функции $f(t)$:

$$Wf(u,s) = s^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt. \tag{1}$$

Здесь $0 \leqslant s \leqslant \infty$ — вещественный параметр, называемый масштабным параметром, и $\psi(t)$ — непрерывный вэйвлет.

Справедлива

**Теорема 1 (Кальдерон)** [1]. Пусть вещественная функция $\psi(t) \in L^2(R)$ и $c_\psi = \int\limits_0^\infty \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega}\, d\omega < +\infty$, тогда любая вещественная функция $f(t) \in L^2(R)$ удовлетворяет равенствам

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} Wf(u,s)\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \right) \frac{ds}{s^2}\,, \tag{2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{c_\psi} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|Wf(u,s)\right|^2 du\, \frac{ds}{s^2}\,. \tag{3}$$

Условие ограниченности константы $c_\psi$ обычно называют *условием допустимости*. Из него вытекает, в частности, необходимость условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0$.

Равенство (1) имеет смысл прямого вэйвлет-преобразования: одномерной функции $f(t)$ ставится в соответствие двумерная функция $Wf(u,s)$, ее вэйвлет-преобразование. Равенство (2) — обратное вэйвлет-преобразование, которое восстанавливает по $Wf(u,s)$ функцию $f(t)$. Равенство (3) — аналог равенства Парсеваля для интегрального вэйвлет-преобразования.

Для того чтобы в формуле (2) пределы интегрирования по $s$ были конечными, вводится масштабирующая функция $\phi(t)$, квадрат модуля преобразования Фурье которой имеет вид

$$\left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2 = \int\limits_1^\infty \left|\widehat{\psi}(s\omega)\right|^2 \frac{ds}{s} = \int\limits_\omega^\infty \frac{\left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2}{\xi}\, d\xi.$$

Здесь последний интеграл получен в результате замены переменной $\xi = s\omega$. Определим оператор $Lf(u,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \phi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$. Тогда для произвольного $s_0 > 0$ справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \left[ \int\limits_0^{s_0} \left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} Wf(u,s)\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \right) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{s_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Lf(u,s_0)\, \frac{1}{\sqrt{s_0}}\, \phi\left(\frac{t-u}{s_0}\right) du \right], \tag{4}$$

которое удобно использовать для восстановления $f(t)$. Второе слагаемое в формуле (4) выделяет низкочастотную составляющую функции $f(t)$.

Так как $f(t)$ — функция одного переменного, а $Wf(u,s)$ — функция двух переменных, то вэйвлет-преобразование несет избыточную информацию о функции $f(t)$. Поэтому численное восстановление $f(t)$ по $Wf(u,s)$ в общем случае является неустойчивым. Представляет интерес дискретизация непрерывного прямого и обратного вэйвлет-преобразований, а также обоснование устойчивости вычислительного алгоритма.

**Пример.** Рассмотрим частный случай непрерывного вэйвлета "мексиканская шляпа":

$$\psi(t) = c(t^2-1)\exp(-t^2/2), \quad c = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\widehat{\psi}(\omega) = c_1\omega^2\exp(-\omega^2/2)$, $\widehat{\phi}(\omega) = c_2\sqrt{1+\omega^2}\exp(-\omega^2/2)$, где $c_1 = -2\sqrt{2/3}\,\pi^{1/4}$, $c_2 = \dfrac{2\pi^{1/4}}{\sqrt{3}}$, причем $c_\psi = c_1^2/2 = 4/3\,\pi^{1/2}$.

Свойства вэйвлет-преобразований с помощью "мексиканской шляпы" рассматривались в работе [4]. Важными свойствами $\psi(t)$, $\widehat{\psi}(\omega)$, $\phi(t)$ и $\widehat{\phi}(\omega)$ является то, что это вещественные четные функции, экспоненциально затухающие на бесконечности (так же, как и функция Гаусса).

**2. Доказательство теоремы Кальдерона. Обобщение на периодические функции.** Доказательство теоремы Кальдерона проводится методом Фурье с использованием свойств свертки.

Пусть $\varphi(t) \in L^2(R)$. Рассмотрим функцию $\overline{\varphi}(t) = \varphi^*(-t)$, где $*$ в верхней части формулы — знак комплексного сопряжения, тогда $\widehat{\overline{\varphi}}(\omega) = \big(\widehat{\varphi}(\omega)\big)^*$. Если $\varphi(t)$ — вещественная функция, то, кроме того, $\big(\widehat{\varphi}(\omega)\big)^* = \widehat{\varphi}(-\omega)$. Если $\varphi(t)$ — вещественная и четная функция, то $\widehat{\varphi}(\omega)$ также вещественная и четная и $\widehat{\overline{\varphi}}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega)$.

Применим к $\varphi(t)$ процедуру масштабирования, рассматривая функцию $\dfrac{1}{\sqrt{s}}\,\varphi(t/s)$, где $0 < s < \infty$. Тогда преобразование Фурье этой функции имеет форму $\left[\dfrac{1}{\sqrt{s}}\,\varphi(t/s)\right]^{\widehat{}}(\omega) = \sqrt{s}\,\widehat{\varphi}(\omega s)$. В качестве функции $\varphi(t)$ возьмем вэйвлет $\psi(t)$, тогда образ Фурье вэйвлет-преобразования $Wf(u,s)$ имеет вид

$$\widehat{W}f(\omega,s) = \left(f * \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\,\overline{\psi}(t/s)\right)\right)^{\widehat{}}(\omega) = \sqrt{s}\,\widehat{f}(\omega)\big(\widehat{\psi}(\omega s)\big)^*. \tag{5}$$

Если $\psi(t)$ — вещественная, то $\widehat{W}f(-\omega,s) = \sqrt{s}\,\widehat{f}(-\omega)\,\widehat{\psi}(-\omega s) = \sqrt{s}\,\widehat{f}^*(\omega)\,\widehat{\psi}^*(\omega s)$.

Если $\psi(t)$ — вещественная и четная, то $\widehat{W}f(-\omega,s) = \sqrt{s}\,\widehat{f}(-\omega)\,\widehat{\psi}(\omega s) = \sqrt{s}\,\widehat{f}^*(\omega)\,\widehat{\psi}\big(|\omega| s\big)$.

Правую часть формулы (2) можно переписать в виде $\dfrac{1}{c_\psi}\displaystyle\int_0^\infty \big(Wf(\cdot,s)*\psi(\cdot,s)\big)(t)\,\frac{ds}{s^2}$, где точка означает переменные, по которым осуществляется свертка.

Если мы вычислим образ Фурье этой функции, то получим

$$\frac{1}{c_\psi}\int_0^\infty \widehat{W}f(\omega,s)\sqrt{s}\,\widehat{\psi}(\omega s)\,\frac{ds}{s^2} = \frac{1}{c_\psi}\int_0^\infty \widehat{f}(\omega)\,\frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds = \frac{1}{c_\psi}\,\widehat{f}(\omega)\int_0^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds.$$

При рассмотрении $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds$ будем учитывать следующие моменты.

1. Отметим, что достаточно рассмотреть $\omega \geqslant 0$, так как $\big|\widehat{\psi}(-\omega s)\big| = \big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|$.

2. В силу условия допустимости $\widehat{\psi}(\omega)\big|_{\omega=0} = 0$.

3. Возьмем $\omega \geqslant \varepsilon$ и будем рассматривать $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds$ как $\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds$. Совершая замену переменных $\omega s = \xi$, получим $\displaystyle\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds = \lim_{\delta\to 0}\int_{\omega\delta}^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\xi)\big|^2}{\xi}\,d\xi = \int_0^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\xi)\big|^2}{\xi}\,d\xi$ для всех $\omega > 0$. В случае $\omega = 0$ справедливо равенство $\displaystyle\left[\int_0^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds\right]_{\omega=0} = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_\delta^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(\omega s)\big|^2}{s}\,ds\right]_{\omega=0} = 0$.

Отсюда следует, что образ Фурье правой части формулы (2) во всех точках, кроме точки $\omega = 0$, равняется $\widehat{f}(\omega)$ и нулю в этой точке. Так как мы рассматриваем задачу в пространстве $L^2(R)$, то обратное преобразование Фурье дает функцию $f(t) \in L^2(R)$. Формула (2) доказана. Формула (3) доказывается с помощью равенства Парсеваля для $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \big|Wf(u,s)\big|^2\,du$ (с использованием формулы (5)), последующей заменой порядка интегрирования по $\omega$ и $s$ и снова с помощью равенства Парсеваля.

Перейдем к обобщению теоремы Кальдерона на множество периодических функций. Пусть функции $f(t) \in L^2\big([0,1)\big)$, $\psi(t)$ — вещественные функции. Будем требовать также, чтобы $\psi(t)$ и $\widehat{\psi}(\omega)$ были непрерывными функциями, убывающими достаточно быстро на бесконечности, примерно как $\sim \dfrac{C}{1+|t|^\alpha}$,

$\alpha > 1$. Продолжим периодически $f(t)$ на $R$ и обозначим эту функцию $f^{\text{п}}(t)$. Чтобы применить теорему Кальдерона, рассмотрим усеченную функцию $f_N^{\text{п}}(t) = \begin{cases} f^{\text{п}}(t), & |t| < N, \\ 0, & |t| \geqslant N. \end{cases}$

Это дает нам возможность перейти к пределу при $N \to \infty$ в норме $L^2(R)$ при любом $s > 0$. Использование периодической функции $f^{\text{п}}(t)$ приводит к периодической функции $\Psi(t, s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}} \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} \psi\left(\dfrac{t+\nu}{s}\right)$, где $0 \leqslant t < 1$.

Для вэйвлет-преобразования $W(u, s)$, определенного в области $0 \leqslant u < 1$, $s > 0$, справедливо равенство

$$W(u, s) = \big(f * \overline{\Psi}(\cdot, s)\big)(u), \tag{6}$$

где $f(t) \in L^2\big([0, 1)\big)$ и $\overline{\Psi}(t) \in L^2\big([0, 1)\big)$.

Разложим функции $f(t)$, $\overline{\Psi}(t, s)$ и $W(u, s)$ в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(f) e^{2\pi imt}, \quad \overline{\Psi}(t, s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(\overline{\Psi}, s) e^{2\pi imt}, \quad W(u, s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(W, s) e^{2\pi imu}, \quad \text{где}$$

$$c_m(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi imt}\, dt, \quad c_m(\overline{\Psi}, s) = \int_0^1 \overline{\Psi}(t, s) e^{-2\pi imt}\, dt, \quad c_m(W, s) = \int_0^1 W(u, s) e^{-2\pi imu}\, du. \tag{7}$$

Из формул (7) следует, что

$$c_m(\overline{\Psi}, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^1 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi im(t-\nu)}\, \psi^*\left(\frac{-t+\nu}{s}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi imt}\, \psi^*(t/s) = \sqrt{s}\, \widehat{\psi}^*(2\pi ms).$$

Таким образом,

$$c_m(W, s) = c_m(f) \sqrt{s}\, \widehat{\psi}^*(2\pi ms), \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{8}$$

В силу условия допустимости заключаем, что $\widehat{\psi}^*(0) = 0$ и все значения $c_m(W, s)$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, стремятся к нулю при $s \to 0$. Из формулы (8) следует также, что $c_0(W, s) = 0$ не несет информации о функции $f$, поэтому для восстановления $f(t)$ по $W(u, s)$ с помощью формулы (8) необходимо запомнить $c_0(f) = \int\limits_0^1 f(t)\, dt$. Вычисляя обратное преобразование Фурье с коэффициентами $c_m(W, s)$ при $0 < s < \infty$, мы вычисляем $W(u, s)$ при каждом $s$ и $0 \leqslant u < 1$; эта функция имеет средние значения по $u$ равные нулю.

Коэффициенты ряда Фурье функции $f(t)$ определяются формулой, аналогичной формуле (2):

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty c_m(W, s) s^{-3/2}\, \widehat{\psi}(2\pi ms)\, ds = \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty c_m(f)\, \frac{\big|\widehat{\psi}(2\pi ms)\big|^2}{s}\, ds = \\ &= c_m(f) \left(\frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{\big|\widehat{\psi}(2\pi ms)\big|^2}{s}\, ds\right), \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как $\int\limits_0^\infty \dfrac{\big|\widehat{\psi}(2\pi ms)\big|^2}{s}\, ds = \lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_\delta^\infty \dfrac{\big|\widehat{\psi}(2\pi ms)\big|^2}{s}\, ds = \lim\limits_{\delta \to 0} \int\limits_{2\pi m\delta}^\infty \dfrac{\big|\widehat{\psi}(\xi)\big|^2}{\xi}\, d\xi = c_\psi$ при каждом фиксированном $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, то с помощью (9) можно вычислить коэффициенты $c_m(f)$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, и использовать сохраненное значение $c_0(f)$. По этим значениям коэффициентов можно восстановить функцию $f(t)$.

Аналог формулы (3) следует из равенства Парсеваля и формулы (8):

$$\int_0^1 \big|f(t)\big|^2 dt = \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \int_0^1 \big|Wf(u, s)\big|^2 du\, \frac{ds}{s^2} + \big|c_0(f)\big|^2.$$

В результате доказана

**Теорема 2** (аналог теоремы 1). *Пусть* $\psi(t)$, $t \in R$, *удовлетворяет вышеприведенным условиям и* $c_\psi = \int\limits_0^\infty \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega}\, d\omega < +\infty$, *тогда любая* $f(t) \in L^2\big([0,1)\big)$ *удовлетворяет равенствам*

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^1 \big(Wf(u,s)\Psi(t-u,s)\big)\, du \right) \frac{ds}{s^2} + c_0(f), \tag{10}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{c_\psi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 \left|Wf(u,s)\right|^2 du\, \frac{ds}{s^2} + \left|c_0(f)\right|^2. \tag{11}$$

Используя значения масштабирующей функции $\phi(t)$, а точнее $\left|\widehat{\phi}(\omega)\right|^2$, можно вычислить значения коэффициентов Фурье $c_m(f)$, интегрируя по $s$ от 0 до некоторого $s_0$:

$$c_m(f) = \frac{1}{c_\psi} \left[ \int\limits_0^{s_0} \frac{\left|\widehat{\psi}(2\pi m s)\right|^2}{s}\, ds + \left|\widehat{\phi}(2\pi m s_0)\right|^2 \right] c_m(f), \quad c_0(f) = c_m(f)\big|_{m=0}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{12}$$

Равенство (11) вытекает из равенства

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \left[ \int\limits_0^{s_0} \left( \int\limits_0^1 \big(Wf(u,s)\Psi(t-u,s)\big)\, du \right) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{s_0} \int\limits_0^1 Lf(u,s_o)\, \frac{1}{\sqrt{s}_0}\, \Phi\left(\frac{t-u}{s_0}\right) du \right],$$

где $\quad Lf(u,s) = \int\limits_0^1 f(t)\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \Phi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \quad$ и $\quad \Phi(t) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} \phi(t+\nu).$

В качестве примера разложим функцию $f(t)$, $t \in [0,1)$, по вэйвлетам “мексиканская шляпа”. Для этого

1) вычислим коэффициенты Фурье $c_m(f)$, $c_{-m}(f) = c_m^*(f)$, $m = 1, 2, \dots$,

2) сохраним $c_0(f)$ и вычислим для $m = 1, 2, \dots$

$$c_m(W,s) = c_m(f)\sqrt{s}\,\widehat{\psi}(2\pi m s) = c_m(f) c_1 \sqrt{s}\,(2\pi m s)^2 \exp\big(-(2\pi m s)^2/2\big), \quad c_{-m}(f) = c_m^*(f). \tag{13}$$

Введем переменную $\xi = 2\pi s$. Зная $\{c_m(W,\xi)\}$, можно вычислить $W(u,\xi)\sqrt{\frac{2\pi}{\xi}}$ при любом $\xi \geqslant 0$ :

$$W(u,\xi)\sqrt{\frac{2\pi}{\xi}} = c_1 \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} c_m(f)(m\xi)^2\, e^{-(m\xi)^2/2}\, e^{-2\pi i m u}.$$

Возьмем $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Для коэффициентов Фурье функции $f(t)$ получим

$$\begin{aligned} c_m(f) &= \frac{c_1}{c_\psi} \int\limits_0^1 c_m(W,\xi)\, \frac{(m\xi)^2}{\xi}\, e^{-(m\xi)^2/2}\, d\xi + \frac{1}{c_\psi}\, b_m, \\ b_m &= c_2^2\, c_m(f)\big(m^2 \exp(-m^2)\big), \quad c_{-m}(f) = c_m^*(f), \quad m = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{14}$$

Если подставить (12) в интеграл в формуле (14), то этот интеграл примет вид

$$c_m(f)\, \frac{c_1^2}{c_\psi} \int\limits_0^1 m^4 \xi^3 \exp\big(-(m\xi)^2\big)\, d\xi. \tag{15}$$

Поведение подынтегральной функции в формуле (14) может быть использовано для вычисления интегралов по дискретным узлам $\{s_i\}_{i=1,\dots,M}$.

**3. Дискретизация непрерывного вэйвлет-преобразования, основанная на теореме Кальдерона.** Представим функцию $f(t)$, $0 \leqslant t < 1$, в виде дискретного ряда Фурье: $\{f_k\}_{k\in Z_N}$, $\{c_m^g(f_k)\}_{m\in Z_N}$. Рассмотрим периодизацию функции $\dfrac{1}{\sqrt{s}}\overline{\psi}(t/s)$: $\overline{\Psi}(t,s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}\displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\psi^*\left(\frac{t+\nu}{s}\right)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и вычислим ее дискретные коэффициенты Фурье. Из условий, наложенных на функцию $\psi(t)$, следует, что она удовлетворяет формуле Пуассона [2, с. 86]:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\psi^*(t+2\pi a\nu) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}^*\left(\frac{\nu}{a}\right)e^{-i\nu t/a}, \quad (a>0). \tag{16}$$

Положим $t = -\dfrac{1}{Ns}$ и $a = \dfrac{1}{2\pi s}$, тогда для дискретных коэффициентов Фурье функции $\overline{\Psi}\left(\dfrac{k}{N}, s\right)$ выполняются следующие равенства при $0 \leqslant m \leqslant N-1$:

$$c_m^g\left(\overline{\Psi}\left(\frac{k}{N}, s\right)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-2\pi imk/N}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-\frac{k}{Ns}+\frac{\nu}{s}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-2\pi imk/N}\left(\sqrt{s}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}^*(2\pi\nu s)e^{2\pi i\nu k/N}\right) =$$
$$= \sqrt{s}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}^*(2\pi s\nu)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{2\pi i(\nu-m)k/N}\right) = \sqrt{s}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}^*\big(2\pi s(m+pN)\big).$$

Из полученных формул следует, что

$$\widehat{W^g}(2\pi m, s) = c_m^g(f_k)\sqrt{s}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}^*\big(2\pi s(m+pN)\big), \tag{17}$$

где $s \geqslant 0$ — произвольное значение. Если мы хотим вычислить вэйвлет-преобразование дискретной функции $\{f_k\}$ в конкретной точке $s$, то надо выполнить обратное дискретное преобразование Фурье правой части формулы (17).

Обозначим

$$c_{m\psi} = \int_0^{\infty}\frac{1}{s}\left|\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}\big(2\pi s(m+pN)\big)\right|^2 ds, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{18}$$

Тогда

$$c_m^g(f_k) = \frac{1}{c_{m\psi}}\int_0^{\infty}\frac{\widehat{W^g}(2\pi m, s)}{s^{3/2}}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}\big(2\pi s(m+pN)\big)\,ds, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{19}$$

Выполнив обратное дискретное преобразование Фурье, мы получим вектор $\{f_k\}_{k\in Z_N}$, т.е. мы выполнили обратное дискретное вэйвлет-преобразование.

Введем периодизированную масштабирующую функцию $\phi^{\Pi} = \displaystyle\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\phi(t+\nu, s)$. Интеграл по $s$ от 0 до $\infty$ можно заменить интегралом от 0 до $s_0$:

$$c_m^g(f_k) = \frac{1}{c_{m\psi}}\left[\int_0^{s_0}\frac{\widehat{W^g}(2\pi m, s)}{s^{3/2}}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}\big(2\pi s(m+pN)\big)\,ds + \frac{\widehat{L}^g(2\pi m, s_0)}{s_0}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}\big(2\pi s_0(m+pN)\big)\right]. \tag{20}$$

Здесь $\widehat{L}^g(2\pi m, s_0) = \displaystyle\sum_{p=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}^*\big(2\pi s_0(m+pN)\big)c_m^g$. Из формул (17)–(20) следует, что для дискретизации метода обращения вэйвлет-преобразований необходимо дискретизировать интегралы (18)–(20), заменив их квадратурными суммами. Для этого функции $\widehat{W}^g(2\pi m, s)$, $\widehat{\psi}\big(2\pi s(m+pN)\big)$ и $\widehat{\psi}^*\big(2\pi s(m+pN)\big)$ следует вычислять при $s \in \{s_i\}_{i=1}^M$, т.е. множеству дискретных значений переменной $s$.

Следует отметить, что для фиксированного $N$ коэффициенты $c_{m\psi}$, $m \in Z_N$, могут быть вычислены один раз. Если $\{f_k\}$, $k \in Z_N$, — вещественный вектор, то для $m = 0, \dots, N/2$ могут быть вычислены все значения $c_{m\psi}$, $\widehat{\psi}\big(2\pi s(m+pN)\big)$, $\widehat{\psi}^*\big(2\pi s(m+pN)\big)$. Так же, как и в предыдущем случае, можно опустить вычисления при $m = 0$, запомнив значение $c_0^g(f_k) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} f_k$. Так же, как и в предыдущем разделе, целесообразно перейти от переменной $s$ к переменной $\xi = 2\pi s$.

Множество значений массива $\{s_i\}_{i=1}^M$, значения параметров $M$ и $N$, а также значения весов квадратурных формул определяются свойствами вэйвлета $\psi(x)$ и функции $f(x)$.

Вычисления членов в формуле (20), связанных с функциями $\widehat{\phi}(\omega)$ и $\widehat{\phi}^*(\omega)$, гораздо проще, чем вычисления интегралов от функций $\widehat{\psi}(t)$ и $\widehat{\psi}^*(t)$. В дальнейших работах вопрос о численной реализации непрерывного вэйвлет-преобразования в случае вэйвлета "мексиканская шляпа" будет рассмотрен подробно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
2. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.
3. *Фрейзер М.* Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2007.
4. *Жилейкин Я.М., Осипик Ю.И.* О погрешности и алгоритмах численной реализации непрерывных вэйвлет-преобразований // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 12. 2091–2101.

Поступила в редакцию
9.12.2008