

УДК 532.529

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА НА ПОДВИЖНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

К. Н. Волков¹

Обсуждаются подходы к дискретизации уравнений Навье–Стокса на подвижных неструктурированных сетках, методы перестроения сеток на каждом шаге по времени, а также разностные схемы, удовлетворяющие условию геометрической консервативности. Проводится численное моделирование обтекания прямой решетки профилей, совершающих малые гармонические колебания, потоком невязкого сжимаемого газа. Результаты численных расчетов сравниваются с имеющимися расчетными и экспериментальными данными.

1. Введение. Подход, в котором координатные линии структурированной сетки или объем и форма ячеек неструктурированной сетки остаются неизменными в процессе расчета, используется при описании стационарных течений при отсутствии линий раздела и движения жестких границ. В случае моделирования течений с учетом движения жестких границ или течений со свободными границами сеточные линии или форма ячеек сетки не являются фиксированными и подстраиваются под положения границ, меняющихся во времени, что приводит к использованию подвижных (лагранжевых) сеток.

Построение новой сетки на каждом шаге по времени представляется достаточно дорогостоящей процедурой, поэтому сетка строится один раз, а затем ее узлы на каждом шаге по времени перемещаются по некоторому закону.

Распределение узлов сетки внутри расчетной области обычно контролируется распределением узлов на ее границе, а перемещение узлов — решением уравнения Лапласа или линейного уравнения упругости. Движение границы определяется либо внешними факторами, либо является частью самого решения (как, например, при моделировании течений со свободными границами).

Для структурированных (в том числе криволинейных) сеток широкое распространение получили метод трансфинитной интерполяции [1] (transfinite interpolation) и метод изопараметрического отображения [2] (isoparametric mapping).

Основная трудность реализации вычислительных алгоритмов на подвижных неструктурированных сетках состоит в сохранении качества деформированной сетки внутри области [3–15].

Для контроля качества сетки используются топологические и геометрические критерии. Проверка топологических критериев (появление узла на каждой грани и грани в каждой ячейке не более одного раза, две ячейки разделяют не более одной грани, топологическая замкнутость внутренних и граничных ячеек) не требует знания координат узловых точек (для их проверки используется матрица связности). Контроль геометрических критериев (положительность площадей и объемов, замкнутость ячеек и границ, выпуклость и ориентация) проводится с учетом координат узловых точек сетки. Геометрические параметры ячеек сложной формы (площадь грани, объем ячейки, нормали, центр контрольного объема) обычно рассчитываются при помощи декомпозиции ячейки на треугольники или тетраэдры. При деформации сетки ее топологические характеристики остаются неизменными, а изменение претерпевают лишь координаты узловых точек.

Методы дискретизации уравнений Навье–Стокса также должны удовлетворять некоторым условиям, в частности условию геометрической консервативности [16–25].

Для явных схем шаг интегрирования по времени определяется условием устойчивости и зависит от наименьшего пространственного шага сетки. При построении неструктурированных сеток достаточно трудно контролировать размер и форму ячеек. Появление скошенных ячеек даже в малом количестве приводит к существенным ограничениям временного шага и его падению до значений, меньших тех, которые требуются для получения точного решения.

Другой путь состоит в применении неявных разностных схем, что ставит задачу построения эффективного метода решения системы разностных уравнений на каждом шаге по времени [26].

¹ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; e-mail: dsci@mail.ru

В данной работе обсуждаются подходы к дискретизации уравнений Навье–Стокса на подвижных неструктурированных сетках и методы смещения узлов сетки на каждом шаге по времени. Проводится численное моделирование обтекания прямой решетки профилей, совершающих малые гармонические колебания, потоком невязкого сжимаемого газа. Исследуется влияние частотных и фазовых характеристик на распределение давления по поверхности профиля и величину коэффициента подъемной силы.

2. Метод конечного объема. В консервативных переменных уравнение, описывающее нестационарное течение вязкого сжимаемого газа, записывается в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot [F(Q) + G(Q)] = 0, \tag{1}$$

где Q , $F(Q)$ и $G(Q)$ — вектор консервативных переменных в точке \mathbf{x} в момент времени t , вектор невязких потоков и вектор вязких потоков соответственно.

Интегрируя уравнение (1) по контрольному объему $V(t)$ с границей $\partial V(t)$, ориентация которой задается внешней единичной нормалью \mathbf{n} , и применяя теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\int_{V(t)} \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial V(t)} F(Q) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\partial V(t)} G(Q) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \tag{2}$$

Интеграл от производной по времени в уравнении (2) представляется в виде разности

$$\int_{V(t)} \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} Q d\Omega - \int_{\partial V(t)} Q (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma,$$

где $\dot{\mathbf{x}}$ — скорость перемещения границы $\partial V(t)$ контрольного объема $V(t)$. После подстановки уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} Q d\Omega + \int_{\partial V(t)} [F(Q) - \dot{\mathbf{x}}Q] \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\partial V(t)} G(Q) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \tag{3}$$

Применяя теорему о среднем, запишем уравнение (3) в эйлерово-лагранжевом дискретном виде (Arbitrary Eulerian–Lagrangian, ALE)

$$\frac{\partial}{\partial t} (VQ) + P[Q, \mathbf{n}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] + S[Q, \mathbf{n}(t), \mathbf{x}(t)] = 0. \tag{4}$$

Здесь $P[Q, \mathbf{n}(t), \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] = \int_{\partial V(t)} [F(Q) - \dot{\mathbf{x}}Q] \cdot \mathbf{n} d\Gamma$ и $S[Q, \mathbf{n}(t), \mathbf{x}(t)] = \int_{\partial V(t)} G(Q) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$.

По сравнению с уравнением для статических сеток, уравнение (4) включает в себя скорость изменения контрольного объема и скорость перемещения его границы. В чисто эйлеровой формулировке $\dot{\mathbf{x}} = 0$, и для дискретизации уравнения (4) используется подход [26].

На подвижной границе расчетной области для вязкой жидкости выставляются граничные условия прилипания и непротекания: $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, $(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} = 0$, где $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{n} — касательная и нормаль к поверхности.

3. Условие геометрической консервативности. При использовании подвижных сеток погрешность, вносимая дискретизацией производных по времени и потоков, зависящих от скорости перемещения границы контрольного объема и его геометрии, приводит к нарушению формального порядка точности разностной схемы [16, 24].

Для получения как минимум 1-го порядка точности по времени требуется выполнение условия геометрической консервативности [16] (Geometric Conservation Law, GCL). Результаты работы [20] показывают, что выполнение условия GCL является достаточным условием для достижения 1-го порядка точности по времени, но не является необходимым [19]. В [25] подчеркивается, что связи между выполнением условия GCL и порядком точности разностной схемы по времени нет, а его роль сводится лишь к получению консервативной разностной схемы. Вместе с тем, условие GCL является необходимым и достаточным для предотвращения нелинейной неустойчивости вычислительной процедуры [21].

Согласно трактовке, введенной в работе [16] для структурированных сеток, разностная схема удовлетворяет условию GCL, если вектор $Q = \text{const}$ (однородный поток) является точным решением уравнения (4).

При $Q = \text{const}$ выполняется равенство $S(Q, \mathbf{n}) = 0$, поскольку вязкие потоки зависят от градиентов компонент вектора Q . Учитывая, что интеграл от вектора невязких потоков по любому замкнутому контуру равняется нулю для $Q = \text{const}$ (при условии, что разностная схема является консервативной по пространству), получим

$$\int_{\partial V(t)} [F(Q) - \dot{\mathbf{x}}Q] \cdot \mathbf{n} d\Gamma = R(Q, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -QR^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}),$$

где $R^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ определяет вклад слагаемого, зависящего от скорости перемещения границы контрольного объема. Запишем условие GCL в полудискретном виде (Discrete GCL, DGCL)

$$\frac{\partial V}{\partial t} - R^*[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] = 0. \quad (5)$$

Имеются различные подходы к построению разностных схем, для которых выполняется условие GCL, описываемое соотношением (5). В подходе [19] в правую часть уравнения (4) добавляется источниковый член, вид которого дает соотношение (5). Это гарантирует, что $Q = \text{const}$ при решении уравнения (4), даже если условие (5) не выполняется. Другой подход состоит в раскрытии производной по времени от произведения вектора консервативных переменных и контрольного объема с последующей оценкой производной по времени от контрольного объема, фигурирующей в соотношении (5). Однако такой подход не является полностью консервативным [25].

4. Дискретизация по времени. Разностные схемы 1-го и 2-го порядка точности по времени, удовлетворяющие условию GCL, обсуждаются в работах [17, 18], а схема 3-го порядка — в [24]. Неявная схема Рунге–Кутты 4-го порядка построена в работе [22].

4.1. Схема Эйлера. Дискретизируя уравнение (5), получим $\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} = \sum_f (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}) \Delta S_f$. Суммирование проводится по всем граням контрольного объема. Учитывая, что имеет место соотношение $V_i^{n+1} - V_i^n = \sum_f \Delta V_f$ [23], найдем скорости узлов сетки, удовлетворяющие условию GCL: $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\Delta V_f}{\Delta t \Delta S_f}$.

4.2. Трехслойная схема. Для невязких течений трехслойная разностная схема по времени для уравнения (4) имеет вид [17] (Backward Difference Scheme, BDS)

$$\frac{3}{2} VQ^{n+1} - 2VQ^n + \frac{1}{2} VQ^{n-1} = -\Delta t \sum_{k=1}^K \alpha_k R(Q^{n+1}, \mathbf{x}^k, \dot{\mathbf{x}}^k),$$

где $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$. Условие GCL требует, чтобы

$$\frac{3}{2} VQ^{n+1} - 2VQ^n + \frac{1}{2} VQ^{n-1} = \Delta t \sum_{k=1}^K \alpha_k R^*(Q^{n+1}, \mathbf{x}^k, \dot{\mathbf{x}}^k).$$

Приведенное соотношение позволяет найти координаты узлов сетки \mathbf{x}^k и их скорости $\dot{\mathbf{x}}^k$, удовлетворяющие условию GCL. Менее дорогостоящий подход, с вычислительной точки зрения, состоит в использовании средних сеточных параметров, что дает [18]

$$\frac{3}{2} VQ^{n+1} - 2VQ^n + \frac{1}{2} VQ^{n-1} = -\Delta t R(Q^{n+1}, \mathbf{n}^*, \dot{\mathbf{n}}^*),$$

где $\mathbf{n}^* = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbf{n}(\mathbf{x}^k)$ и $\dot{\mathbf{n}}^* = \sum_{k=1}^K \alpha_k \dot{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^k, \dot{\mathbf{x}}^k)$. Величины \mathbf{n} и $\dot{\mathbf{n}}$ являются функциями координат узлов сетки.

Процедура нахождения конкретных значений коэффициентов α_k , удовлетворяющих 2-му порядку точности по времени и условию GCL, рассматривается в [24].

4.3. Многослойная схема. Используя k слоев по времени, разностную схему для уравнения (4) запишем в следующем виде

$$(VQ)^{n+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i (VQ)^{n-i} = \Delta t \beta_k Q [(VQ)^{n+1}, t^{n+1}]. \quad (6)$$

Координаты узлов сетки и их скорости требуют расчета только на слое $n + 1$ по времени. Для схемы 2-го порядка точности ($k = 2$) по времени имеем $\alpha_0 = -\frac{4}{3}$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\beta_2 = \frac{2}{3}$.

Используя (6) и полагая $Q = \text{const}$, в дискретной форме получим [25]

$$V^{n+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i V^{n-i} = \Delta t \beta_k \sum_{m=1}^{N_f} \dot{\mathbf{n}}_m^{n+1},$$

где суммирование проводится по всем граням. Скорость изменения нормали к грани контрольного объема представляется в виде

$$\dot{\mathbf{n}}_m^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta V_m^i, \tag{7}$$

где $\Delta V_m^i = V_m^{i+1} - V_m^i$ — изменение контрольного объема между слоями i и $i + 1$ по времени, обусловленное движением грани m . Коэффициенты γ_i находятся из условия

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta V_m^i = \frac{1}{\beta_k} \left(V^{n+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i V^{n-i} \right).$$

Для схемы 2-го порядка получим, что $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{3}{2}$.

В одномерном случае использование формулы (7) сводится к выполнению тривиальных действий, поскольку контрольный объем представляет собой линейный сегмент. Смещение контрольного объема за время Δt равняется смещению конечных точек этого сегмента.

В двумерном случае, считая скорость перемещения сеточных узлов постоянной (либо по величине, либо по направлению), контрольный объем, сформированный положением грани в моменты времени t^n и t^{n+1} , равняется площади четырехугольника, показанного на рис. 1 а.

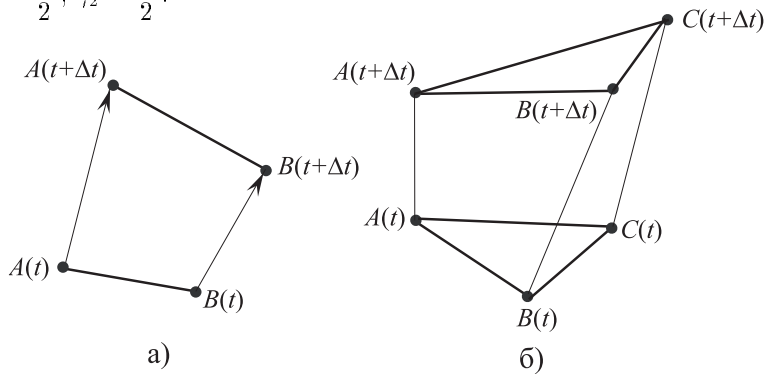


Рис. 1. Изменение контрольного объема во времени в двумерном (а) и трехмерном (б) случаях

Расчет контрольного объема, образованного смещением его грани, также проводится в предположении о постоянстве скорости узлов сетки. Контрольный объем, сформированный положениями грани в момент времени t^n и t^{n+1} , равняется объему многогранника, показанного на рис. 1 б.

4.4. Схема Рунге–Кутта. В полудискретном виде получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_i Q_i) + R_i(Q) = 0, \tag{8}$$

где $R_i(Q) = \sum_f [F(Q) - Q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) + G(Q)]_f \Delta S_f$. Для решения уравнения (8) вводится псевдовремя τ , а Q принимается в качестве приближения Q^{n+1} решения на слое $n + 1$ по времени и рассматривается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (V_i Q) + R_i^*(Q) = 0, \tag{9}$$

где $R_i^*(Q) = \frac{Q_i V_i^{n+1} - Q_i^n V_i^n}{\Delta t} + R_i(Q^n)$. Внутренние итерации по псевдовремени проводятся до достижения сходимости решения. Такой подход (dual time method) оказывается более эффективным, чем явный маршевый метод. На внутренних итерациях для дискретизации по времени используется схема

Рунге–Кутта 3-го порядка:

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^n; \\ Q_i^{(k)} &= Q_i^{(0)} - \alpha_k \frac{\Delta t}{V_i^{n+1}} R_i^*(Q^{k-1}); \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^{(m)}. \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_k = \frac{1}{m-k+1}$. Индекс n относится к слою по времени, индекс m указывает на порядок разностной схемы, а k — индекс суммирования.

5. Перемещение узлов сетки. Представим сетку в виде дискретной псевдомеханической системы с фиктивной массой, а также фиктивными коэффициентами демпфирования и жесткости. Движение системы описывается уравнением динамического равновесия

$$M\ddot{\mathbf{u}} + D\dot{\mathbf{u}} + \Lambda\mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

где M , D и Λ — матрицы массы, демпфирования и жесткости соответственно.

Координаты внутренних узлов сетки рассчитываются путем решения уравнения (10). Смещения узлов сетки $\mathbf{u} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)$ на границе области считаются известными, полагая $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(t)$ при $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Предполагая систему непрерывной, получим уравнение упругих колебаний $\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \sigma = 0$, где ρ — плотность фиктивного материала системы, σ — тензор напряжений, связанный с тензором перемещений. Частным случаем приведенного уравнения является $\Delta \mathbf{u} = 0$ — уравнение Лапласа.

При использовании дискретного подхода матрицы массы, демпфирования и жесткости формируются при помощи присваивания каждому узлу сетки некоторой фиктивной массы, а каждой грани — некоторых демпфирующих и упругих свойств.

Уравнение (10) интегрируется по времени до тех пор, пока не достигается статическое равновесие системы. Матрицы массы и демпфирования обычно выражаются через матрицу жесткости системы $M = a\Lambda$, $D = b\Lambda$, где a и b — некоторые скалярные множители, значения которых выбираются из вычислительных соображений.

В большинстве случаев рассматривается уравнение статического равновесия $\Lambda\mathbf{u} = 0$ (перемещения узлов сетки на каждом шаге по времени являются достаточно малыми).

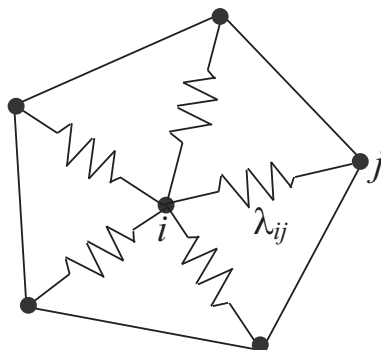


Рис. 2. Введение пружин растяжения/сжатия, связанных с ребрами

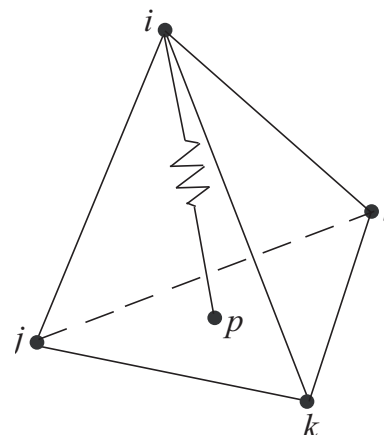


Рис. 3. Введение дополнительной пружины растяжения/сжатия в трехмерном случае

6. Построение деформированной сетки. В основе подходов к смещению узлов сетки лежат вариационные принципы, основанные на минимизации потенциальной энергии системы. Ребро, соединяющее узлы i и j , обозначим через (i, j) , а грань сетки, образованную узлами i, j и k , — через (i, j, k) .

6.1. Пружинная аналогия растяжения/сжатия. Метод пружинной аналогии (tension/compression spring analogy) относится к одному из наиболее простых и распространенных подходов к перемещению узлов сетки [3].

На каждом шаге интегрирования по времени положения узлов сетки, характеризуемые вектором $\mathbf{u}^n = \mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}$, находятся из решения уравнения статического равновесия

$$\Lambda \mathbf{u}^n = 0, \tag{11}$$

где Λ — матрица жесткости, связанная с системой. Перемещения узлов сетки на границе области $\partial\Omega$ считаются заданными и используются в качестве граничных условий.

С каждым ребром сетки, соединяющим узлы i и j , связывается пружина (рис. 2), коэффициент жесткости (stiffness spring) которой обратно пропорционален длине ребра в некоторой степени: $\lambda_{ij} = \frac{1}{l_{ij}^p}$,

$l_{ij}^2 = \sum_{k=1}^3 [(x_i)_k - (x_j)_k]^2$. Такой выбор λ_{ij} мотивируется тем, что при сближении узлов i и j пружина становится более жесткой, предотвращая ребро грани от схлопывания. Сила, действующая на ребро (i, j) , представляется в виде $\mathbf{f}_{ij}^n = \lambda_{ij}^n (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n)$.

При $p = 1$ система уравнений (11) является линейной. Смещения узлов в различных координатных направлениях являются независимыми и находятся из соотношения $\mathbf{u}_i = \frac{\sum_j^{N_i} \lambda_{ij} \mathbf{u}_j}{\sum_j^{N_i} \lambda_{ij}}$, где N_i — число ребер, связанных с узлом i .

При этом допускается возможность схлопывания ребра, соединяющего узлы i и j , за счет того, что вычисления проводятся с конечной степенью точности. Кроме того, линейная пружина (linear spring) не гарантирует отсутствия пересечения ребер или граней деформированной сетки [15].

Использование других значений, например $p = 2$ [4] или экспоненциальной зависимости [15] (такой подход находит применение в расчетах течений со свободной поверхностью), обеспечивает стремление силы к бесконечности при сближении узлов i и j . Однако задача становится нелинейной, и для ее решения используются итерационные методы. Линеаризация системы обычно проводится при помощи метода замороженных коэффициентов.

При использовании метода верхней релаксации соотношение для расчета смещений узлов сетки на итерации $k + 1$ имеет вид $\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{u}_i^k + \omega \left(\frac{\sum_j^{N_i} \lambda_{ij} \mathbf{u}_j}{\sum_j^{N_i} \lambda_{ij}} - \mathbf{u}_i^k \right)$. Коэффициент релаксации подбирается эмпирическим путем (обычно $\omega \sim 1.4$). Итерации прекращаются, когда выполняется условие $\max_{i=1, \dots, N} |\mathbf{x}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-6}$. Координаты узлов находятся из соотношения $\mathbf{x}_i^n = \mathbf{x}_i^{n-1} + \mathbf{u}_i^n$.

В общем случае условие статического равновесия приводит к уравнению $\nabla(\lambda \nabla \mathbf{u}) = 0$ [24]. В работе [9] используется уравнение $\nabla[(1 + \gamma) \nabla] \mathbf{u} = 0$, где $\gamma = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A}$, что предотвращает исчезновение мелких ячеек (под A понимается площадь ячейки). Выполнение принципа максимума для уравнений эллиптического типа гарантирует, что возмущения, вносимые движением границы, не распространяются глубоко внутрь расчетной области. Лапласиан также остается ограниченным при произвольном изменении λ .

В некоторых случаях, например при использовании сеток со скошенными ячейками в пограничном слое, рассматриваемый подход приводит к сеткам с нулевыми или отрицательными контрольными объемами (происходит схлопывание ячейки). Поскольку для уравнения Лапласа выполняется принцип максимума, при таком подходе вращение твердого тела не воспроизводится даже при использовании больших значений коэффициента упругости (например, при моделировании восходящего или нисходящего движения крылового профиля это требует больших смещений узлов сетки вдали от поверхности профиля).

Обобщение подхода на трехмерный случай предполагает введение дополнительной линейной пружины (рис. 3), присоединенной к линии, образованной узлом и точкой, лежащей на противоположной грани и соответствующей точке пересечения медиан треугольника [12] (ball-vertex spring analogy). Подходящий выбор коэффициента жесткости предотвращает сближение узла и грани. Условие статического равновесия записывается с учетом дополнительной пружины, а смещение дополнительной точки вычисляется при помощи линейной интерполяционной формулы.

Координаты точки, представляющей собой проекцию узла i на противоположную грань, находятся из соотношения $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i - [(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — единичная нормаль к грани (j, k, l) , содержащей точку p .

6.2. Пружинная аналогия кручения. Для устранения недостатков метода пружинной аналогии, основанного на использовании пружин растяжения/сжатия, присоединенных к каждому ребру, вводятся дополнительные пружины кручения, присоединенные к каждому узлу сетки [11] (torsion spring analogy).

Коэффициент жесткости пружины кручения (рис. 4), присоединенной к узлу i , определяется соотношением $\lambda_i^{ijk} = \frac{1}{\sin^2 \theta_i^{ijk}} = \frac{l_{ij}^2 l_{ik}^2}{4A_{ijk}^2}$, где θ_i^{ijk} — угол между гранями (i, j) и (i, k) , l_{ij} — длина грани (i, j) , A_{ijk} — площадь ячейки (i, j, k) . Для расчетов используются соотношения

$$\lambda_l^{ijk} = \frac{1}{l_{il}^2 l_{jl}^2 (a_{il} b_{jl} - a_{jl} b_{il})^2}, \quad \lambda_k^{ijk} = \frac{1}{l_{ik}^2 l_{jk}^2 (a_{ik} b_{jk} - a_{jk} b_{ik})^2}.$$

Здесь $a_{ij} = \frac{x_j - x_i}{l_{ij}^2}$ и $b_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}^2}$, при этом $a_{ij} = -a_{ji}$ и $b_{ij} = -b_{ji}$.

Увеличение коэффициента жесткости ($\lambda_i \rightarrow \infty$ при $\theta_i \rightarrow 0$ или $\theta_i \rightarrow \pi$) предотвращает пересечение граней ячеек при деформации сетки, а также появление нулевых или отрицательных площадей и объемов.

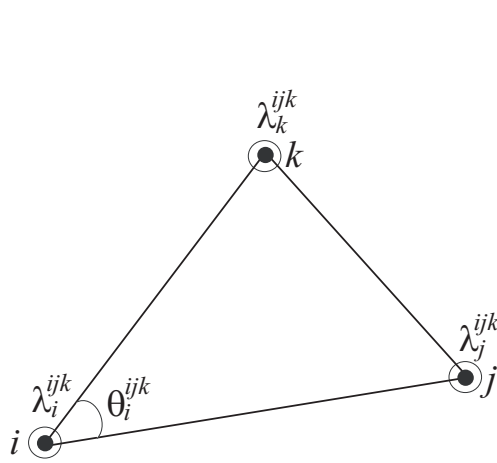


Рис. 4. Введение пружин кручения, связанных с узлами

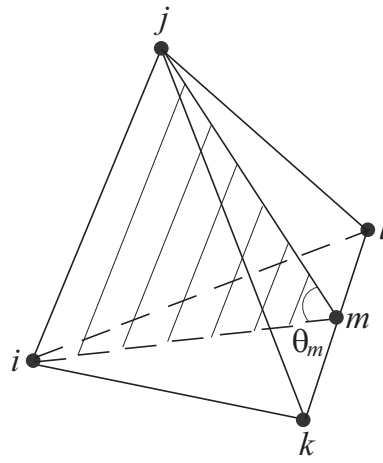


Рис. 5. Обобщение подхода на трехмерный случай

Демпфирующие моменты определяются коэффициентами жесткости и угловыми перемещениями узлов $\mathbf{l}_{ijk} = \Lambda_{ijk} \Delta \boldsymbol{\theta}_{ijk}$, где $\boldsymbol{\theta}_{ijk} = \mathbf{R}_{ijk} \mathbf{u}_{ijk}$. Связь моментов и сил имеет вид $\mathbf{f}_{ijk} = \mathbf{R}_{ijk} \mathbf{l}_{ijk}$ [6].

В двумерном случае вектор сил $\mathbf{f}_{ijk} = \{f_{ix}, f_{iy}, f_{jx}, f_{jy}, f_{kx}, f_{ky}\}'$, действующих на узлы ячейки (i, j, k) , и вектор перемещений узлов сетки $\mathbf{u}_{ijk} = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k\}'$ связаны при помощи соотношения

$$\mathbf{f}_{ijk} = (\mathbf{R}'_{ijk} \Lambda_{ijk} \mathbf{R}_{ijk}) \mathbf{u}_{ijk},$$

$$\text{где } \Lambda_{ijk} = \begin{pmatrix} \lambda_i^{ijk} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i^{ijk} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i^{ijk} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{R}_{ijk} = \begin{pmatrix} b_{ik} - b_{ij} & a_{ij} - a_{ik} & b_{ij} & -a_{ij} & -b_{ik} & a_{ik} \\ b_{ij} & -a_{ij} & -b_{ij} - b_{jk} & a_{jk} - a_{ij} & b_{jk} & -a_{jk} \\ -b_{ik} & a_{ik} & b_{jk} & -a_{jk} & b_{ik} - b_{jk} & a_{jk} - a_{ik} \end{pmatrix}.$$

Система уравнений является нелинейной и решается итерационными методами.

Обобщение подхода на трехмерный случай, предложенное в [10], связано с введением трех треугольников для каждого узла ячейки (дополнительные узлы вводятся посередине граней, как показывает рис. 5), что позволяет контролировать сохранение объема ячейки и предотвращает ее от схлопывания.

Расчет элементов матрицы жесткости в двумерном случае требует 72 сложений и 117 умножений на ячейку сетки на каждой итерации (координаты узлов сетки считаются известными). Метод является строго обоснованным в случае малых перемещений и вращений узлов сетки на шаге интегрирования по времени.

6.3. Комбинированный метод. Недостатки методов пружинной аналогии, связанных с введением пружин растяжения/сжатия и кручения, устраняет подход, основанный на их комбинации [7, 13] (semi-torsional spring analogy).

В работе [7] коэффициент жесткости пружины определяется отношением $\frac{\lambda_{ij}}{\theta}$, где λ_{ij} — коэффициент жесткости линейной пружины, θ — угол поворота грани. Такой подход является противоречивым, поскольку грань, принадлежащая двум ячейкам, получает различные перемещения.

Коэффициент жесткости представляется в виде суммы $\lambda_{ij} = \tilde{\lambda}_{ij} + \hat{\lambda}_{ij}$, где $\tilde{\lambda}_{ij}$ — коэффициент жесткости пружины растяжения, $\hat{\lambda}_{ij}$ — коэффициент жесткости пружины кручения. Сила, действующая на грань (i, j) , представляется в виде $\mathbf{f}_{ij} = (\tilde{\lambda}_{ij} + \hat{\lambda}_{ij}) \mathbf{B} \mathbf{u}_{ij}$.

В двумерном случае для расчета коэффициента жесткости пружины кручения используется соотношение $\hat{\lambda}_{ij} = \varkappa \left(\frac{1}{\sin^2 \theta_1} + \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \right)$. Коэффициент \varkappa выбирается из вычислительных соображений. Коэффициенты жесткости узлов l и k , принадлежащие ячейкам, разделяющим грань (i, j) (рис. 6 а), находятся из соотношений $\lambda_l^{ijk} = \frac{1}{\sin^2 \theta_1}$, $\lambda_k^{ijk} = \frac{1}{\sin^2 \theta_2}$. Углы θ_1 и θ_2 , лежащие напротив грани (i, j) в ячейке (i, j, l) и напротив грани (i, j) в ячейке (i, j, k) , находятся из соотношений

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{|(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_l) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l)|^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_l|^2 |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l|^2}, \quad \sin^2 \theta_2 = \frac{|(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)|^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|^2 |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}.$$

При $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi$ пружина становится более жесткой, что предотвращает попадание узла на противоположную грань. Элементы матрицы \mathbf{B} , связывающей вектор сил $\mathbf{f}_{ij} = \{f_{ix}, f_{iy}, f_{jx}, f_{jy}\}'$ и вектор перемещений $\mathbf{u}_{ij} = \{u_i, v_i, u_j, v_j\}'$, имеют вид $B_{pq} = -\delta_{pq} + \delta_{p,q+2} + \delta_{p+2,q}$. Расчет коэффициентов жесткости требует 18 сложений и 20 умножений на ячейку сетки на каждой итерации.

Основная трудность реализации данного подхода состоит в определении коэффициента жесткости пружины кручения в трехмерном случае. С вычислительной точки зрения достаточно удобным является соотношение [13]

$$\hat{\lambda}_{ij} = \varkappa \sum_{m=1}^{N_{ij}} \frac{1}{\sin^2 \theta_m^{ij}},$$

где N_{ij} — число ячеек, разделяющих грань (i, j) . Угол θ_m^{ij} , сформированный гранями (i, k, l) и (j, k, l) и лежащий напротив ребра (i, j) , принадлежащего элементу m (рис. 6 б), находится из соотношения $\sin^2 \theta_m^{ij} = 1 - \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2}{|\mathbf{n}_1|^2 |\mathbf{n}_2|^2}$. Под \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 понимаются нормали к граням (j, k, l) и (i, k, l) :

$$\mathbf{n}_1 = (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_j) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j),$$

$$\mathbf{n}_2 = (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i).$$

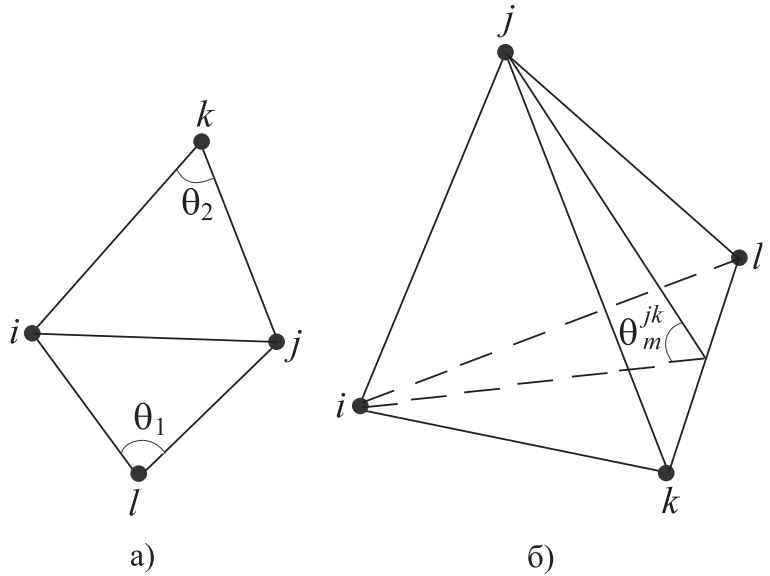


Рис. 6. Определение угла θ в двумерном (а) и трехмерном (б) случаях

Элементы матрицы \mathbf{B} , связывающей вектор сил $\mathbf{f}_{ij} = \{f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}, f_{jx}, f_{jy}, f_{jz}\}'$ и вектор перемещений $\mathbf{u}_{ij} = \{u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j\}'$, имеют вид $B_{pq} = -\delta_{pq} + \delta_{p,q+3} + \delta_{p+3,q}$. Расчет коэффициента жесткости для ячейки (i, j, k, l) требует 25 сложений и 25 умножений. Если грань разделяется N ячейками, то требуется $26N - 1$ сложений и $25N$ умножений, при этом стоимость расчета существенно ниже, чем при использовании пружин кручения в двумерном случае.

В подходе [14] (ortho-torsional spring analogy) в каждом узле ячейки вводятся четыре дополнительные линейные пружины, три из которых связаны с ребрами, а одна соединяет узел с точкой, лежащей на противоположной грани (она представляет собой проекцию узла сетки на грань ячейки).

В то время как метод пружинной аналогии предполагает малые деформации сетки на каждом шаге по времени (хотя общие деформации за весь интервал интегрирования могут быть большими), данный подход свободен от этого ограничения, поскольку не использует кинематических соотношений для определения смещений узлов сетки, при этом ограничения на шаг по времени становятся более мягкими.

Комбинация подходов, основанных на пружинной аналогии растяжения и кручения, имеет хорошие показатели производительности, в том числе и на трехмерных сетках. При этом получаются ячейки с

близким отношением сторон (или отношением шагов сетки по различным координатным направлениям в случае структурированной сетки), что обеспечивает приемлемые значения числа Куранта [6].

6.4. Уравнение растяжения стержня. Каждая грань представляет собой балку или упругий стержень (truss analogy). Для расчета смещений узлов сетки в каждом координатном направлении используется решение уравнения, описывающего растяжение стержня [6] (bar equation) $\frac{d}{dx}\left(EA \frac{du}{dx}\right) = 0$, где E — модуль упругости, L — длина стержня, A — площадь его поперечного сечения. Координата x отсчитывается вдоль стержня.

Глобальная матрица жесткости (stiffness matrix) представляется в виде разложения $K = R^T A R$, где R — матрица преобразования, а матрица A имеет вид $A = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Величина EA является обратно пропорциональной длине грани.

6.5. Уравнение линейной упругости. Сетка представляется в виде упругого тела, которое деформируется за счет нагрузок, приложенных к его границам (linear elasticity analogy).

Для расчета малых смещений узлов сетки, описываемых вектором $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u, v, w\}'$, используется линейное уравнение упругости [5, 8] (linear elasticity equation)

$$\nabla \sigma = -\rho \mathbf{f}, \quad (12)$$

где ρ — плотность псевдоматериала, \mathbf{f} — внешняя сила. Считая, что напряжения возникают за счет перемещения границы системы, полагается $\mathbf{f} = 0$ (или $\rho = 0$). Для решения уравнения (12) на границе расчетной области $\partial\Omega$ выставляются условия типа Дирихле: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}$ при $\mathbf{x} \in \Omega$.

Тензор напряжений и тензор деформаций связаны при помощи соотношения, представляющего собой обобщенный закон Гука (constitutive law, Hooke's law)

$$\sigma = \lambda \text{Trace}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon, \quad (13)$$

где λ и μ — постоянные Ламе (Lamé constants), причем $E > 0$, $-1 < \nu < 1/2$. Постоянные Ламе выражаются через модуль Юнга (Young's modulus) и коэффициент Пуассона (Poisson's ratio): $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$,

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Обычно полагается, что $\nu = 0.25$ и $\mu = \lambda = 1$.

Связь тензора деформаций с тензором перемещений имеет вид (linear kinematic law)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*). \quad (14)$$

Звездочка обозначает сопряженный тензор.

Учитывая свойство симметрии тензора напряжений и тензора деформаций, тензорные равенства, описываемые соотношениями (13) и (14), удобно переписать в векторной форме. В трехмерном случае тензор напряжений и тензор деформаций характеризуются векторами $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}'$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}\}'$, связь между которыми имеет вид $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$. Вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{u} связаны при помощи соотношения $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Здесь

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{\lambda}{\nu} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}'.$$

Вводя функции формы N , такие, что $\mathbf{u} = N\mathbf{w}$, и применяя для дискретизации метод Галеркина, получим соотношение

$$\int_V (\mathbf{A}N)' \mathbf{D} (\mathbf{A}N) \mathbf{w} d\Omega = - \int_V N' \mathbf{f} d\Omega.$$

В матричной форме имеем $\Lambda \mathbf{u} = \mathbf{w}$, где $\Lambda = \int_V (\mathbf{A}N)' \mathbf{D} (\mathbf{A}N) d\Omega$, $\mathbf{w} = - \int_V N' \mathbf{f} d\Omega$. При использовании граничных условий типа Дирихле вектор внешних сил равняется нулю: $\mathbf{f} = 0$; тогда решается однородная система уравнений $\Lambda \mathbf{u} = 0$.

После нахождения смещений узлов сетки в момент времени t^n новые координаты узлов сетки находятся по формуле $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{n-1} + \mathbf{u}^n$.

В работе [8] коэффициенту упругости присваивается постоянное значение. Для избежания деформации сетки в некоторых областях используется специальное распределение модуля упругости. Области сетки с большими значениями модуля упругости перемещаются как твердое тело. Обычно модуль упругости полагается обратно пропорциональным объему ячейки или расстоянию до границы области, подверженной деформации [5], позволяя направить деформацию сетки в те области, где сетка является более грубой и способна выдержать относительно большие деформации без существенного растяжения ячеек.

6.6. Нелинейное уравнение упругости. Не касаясь проблем решения уравнения (12) и точности численного решения, отметим, что линейная связь (13) не позволяет воспроизвести вращение сетки как твердого тела, поскольку дает ненулевые деформации при вращении.

Использование нелинейной связи (Lagrangian stress tensor) $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^* \nabla \mathbf{u})$ требует решения нелинейной задачи теории упругости, что существенно увеличивает вычислительные затраты.

Интересно отметить, что хотя линейное соотношение (13) дает ненулевые деформации при вращении и линейных преобразованиях, деформации не зависят от \mathbf{x} , поскольку

$$\mathbf{u} = \left[\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} - \mathbf{I} \right] \mathbf{x}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, напряжения также не зависят от \mathbf{x} , и уравнение (12) выполняется, хотя и не имеет в данном случае строгого обоснования.

Введение зависимости модуля упругости от координат узлов сетки в соотношение между тензором напряжений и тензором деформаций приводит к тому, что полученное уравнение не описывает вращение твердого тела. Для устранения такой ситуации достаточно потребовать, чтобы $\sigma = 0$. Подстановка приведенных соотношений в уравнение (12) дает $\sigma = 2(\lambda + \mu)(\cos \theta - 1)\mathbf{I}$, при этом $\sigma = 0$, если $\lambda + \mu = 0$ или $\lambda = -E, \mu = E$.

Методы решения нелинейного уравнения упругости рассматриваются в работе [9].

7. Движение тела. Поступательное и вращательное движение твердого тела с матрицами массы \mathbf{M} и инерции \mathbf{J} , характеризующиеся поступательной скоростью движения центра масс \mathbf{V} и угловой скоростью Ω , описываются уравнениями

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}; \quad \mathbf{J} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \times \mathbf{J}\Omega = \mathbf{L}.$$

Сила \mathbf{F} и момент \mathbf{L} , действующие на тело, определяются при помощи интегрирования нормальных и касательных напряжений по его поверхности (из решения задачи о движении жидкости).

Кинематические соотношения, позволяющие рассчитать координаты $\mathbf{X} = \{x, y, z\}$ и эйлеровы углы $\Theta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, имеют вид: $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}$; $\mathbf{B} \frac{d\Theta}{dt} = \Omega$. Матрица \mathbf{B} имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В двумерном случае $\Omega \times \mathbf{J}\Omega = 0$ и $\alpha = \gamma = 0$.

Скорость любой точки тела находится из соотношения $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{r} \times \Omega$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки относительно центра масс.

8. Колебания решетки профилей. Рассмотрим нестационарное течение невязкого сжимаемого газа в межлопаточном канале газовой турбины, лопатки которой вибрируют с заданной частотой и фазой. Разница фаз колебаний всех лопаток считается постоянной величиной, что позволяет выделить в качестве расчетной области участок турбинного вала, содержащий две лопатки. Расчеты проводятся для двух вариантов течения в межлопаточном канале, соответствующих различным граничным условиям во входном сечении.

8.1. Расчетная область. Расчеты проводятся в области, показанной на рис. 7. Для простоты нижняя и верхняя границы расчетной области заменяются прямыми линиями.

Взаимное расположение профилей в прямолинейной решетке однозначно определяется расстоянием между соседними профилями (шаг решетки) и углом между хордой профиля и фронтом (установочный

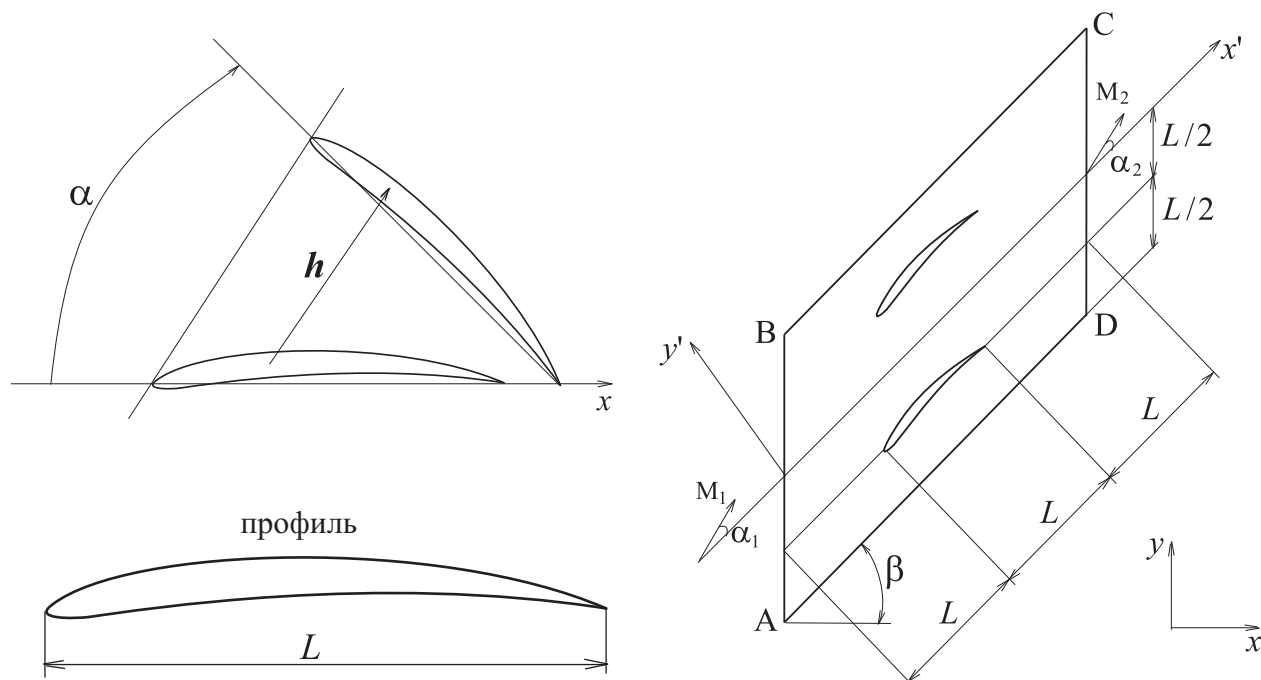


Рис. 7. Геометрия расчетной области

угол). Угол наклона лопатки к оси x составляет $\beta = 45^\circ$. Поток поступает в канал через сечение AB под углом α_1 к оси x' , а покидает ее через сечение CD под углом α_2 к оси x' . Числа Маха на входной и выходной границах составляют M_1 и M_2 соответственно. Расстояние между лопатками, а также длина расчетной области впереди и позади профиля полагаются равными его хорде L .

Профиль лопатки представляет собой модифицированный профиль *NACA 0006* [27] (рис. 7), который строится при помощи суперпозиции распределений кривизны и толщины профиля вдоль координаты $0 \leq \frac{x}{L} \leq 1$, где L — хорда профиля. Распределения кривизны и толщины профиля даются соотношениями

$$C(x) = H_c - R + [R^2 - (x - 0.5)^2]^{1/2};$$

$$T(x) = H_t(2.969x^{1/2} - 1.26x - 3.51x^2 + 2.843x^3 - 1.036x^4),$$

представленными в [28]. Здесь $R = \frac{H_c^2 + 0.25}{2H_c}$ (радиус дуги). Под H_c и H_t понимаются кривизна и максимальная толщина профиля в срединной точке хорды. В расчетах принимается, что $H_c = 0.05$ и $H_t = 0.06$.

Поскольку рассматриваются малые гармонические колебания профиля, то уравнения, описывающие поступательное и вращательное движение профиля, не решаются, а координаты точек на его поверхности представляются в явном виде.

Координаты точек, лежащих на поверхности профиля, находятся из соотношения

$$\{x, y\}_\pm = \left\{ C(x) \mp \frac{1}{2} T(x) \sin \theta, C(x) \pm \frac{1}{2} T(x) \cos \theta \right\},$$

где $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{dC}{dx} \right)$. Знаки $+$ и $-$ относятся к поверхностям разрежения и давления профиля соответственно.

Профили решетки совершают малые гармонические поступательные (изгибные) и вращательные (крутильные) колебания с постоянным сдвигом фаз $h(x, y, t) = H(x, y) \exp(i\omega t)$, $a(t) = A(x, y) \exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний.

Для нормальной скорости на поверхности профиля используется граничное условие непротекания. Для модели вязкого газа граничного условия для тангенциальной скорости на стенке не требуется.

На входе в расчетную область задаются число Маха и направление потока, характеризуемое углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x}$, а на выходе — статическое давление (рассматриваются режимы течения только с дозвуковой скоростью на входе в межлопаточный канал). На нижней и верхней границах расчетной области

выставляются периодические условия (условия повторения течения)

$$v(x, y = y_0, t = t_0) = v(x, y = y_0 + S, t = t_0 + T),$$

где S — расстояние между лопатками ($S = L$), T — период колебаний.

8.2. Сетка и ее деформация. Неструктурированная сетка содержит 2897 узлов и 5443 треугольных элементов в срединном сечении межлопаточного канала (рис. 8), при этом 239 узлов и 351 грань размещаются на поверхности профиля.

Смещение узлов, лежащих на поверхности профиля, во времени представляется в виде линейного гармонического возмущения их первоначального положения $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sin(\omega t) (a^+ \delta \mathbf{x}^+ + a^- \delta \mathbf{x}^-)$, где \mathbf{x}_0 — положение узлов невозмущенной сетки, $\delta \mathbf{x}^+$ и $\delta \mathbf{x}^-$ — отклонения узлов от невозмущенного положения. Амплитуды возмущений находятся из соотношений $a^+ = \frac{1}{2} \{1 + \text{sgn}[\sin(\omega t)]\}$, $a^- = \frac{1}{2} \{1 - \text{sgn}[\sin(\omega t)]\}$.

Грань сетки представляет собой пружину в состоянии равновесия с коэффициентом упругости, обратно пропорциональным длине грани. Каждая грань перемещается на предписанную величину, после чего находится новое положение равновесия системы.

Смещения узлов сетки $\delta \mathbf{x}$ от положения равновесия \mathbf{x}_0 находятся из решения уравнения

$$\nabla [k(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) \nabla \delta \mathbf{x}] = 0. \tag{15}$$

Коэффициент жесткости k является постоянным в каждой ячейке $\delta \mathbf{x}$ сетки \mathbf{x}_0 и рассчитывается по формуле $k_\alpha(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}) = \frac{1}{\max\{\text{Vol}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, \alpha), \varepsilon\}}$. Функция $\text{Vol}(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}, \alpha)$ возвращает объем ячейки α сетки \mathbf{x} . Малая положительная величина ε предотвращает появление отрицательных значений k . Приповерхностные ячейки имеют относительно большие значения k , приводя к малым градиентам $\delta \mathbf{x}$ и позволяя избежать быстрого изменения объема.

В качестве граничных условий для уравнения (15) используются граничные условия Дирихле. Дискретизация уравнения (15) проводится при помощи метода конечных разностей. Система разностных уравнений решается методом релаксации с эмпирически подбираемым коэффициентом.

8.3. Результаты расчетов. Рассматриваются два варианта течения в межлопаточном канале, соответствующих различным граничным условиям во входном сечении рабочей области: $M = 0.7$ и $\beta = 55^\circ$ в случае 1, $M = 0.8$ и $\beta = 58^\circ$ в случае 2. Угол атаки профиля составляет 10° и 13° в случаях 1 и 2 соответственно. Приведенные значения соответствуют перепадам давлений $\frac{P_1}{P_0} = 0.8716$ в случае 1 и $\frac{P_1}{P_0} = 0.8740$ в случае 2, где P_0 — давление торможения на входе в межлопаточный канал.

Расчеты проводятся на интервале времени $(0, 12T]$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период колебаний ($T = 25.82$ с). В качестве начального приближения используется стационарное решение задачи. Шаг интегрирования по времени выбирается равным $\Delta t = 3.25 \times 10^{-5}$ с. Число внешних шагов по времени полагается равным 100 (outer dual time step). На каждом внешнем шаге по времени выполняется 50 внутренних шагов (inner time step). Для дискретизации по времени используется явная трехслойная схема.

В качестве характерных параметров задачи для переменных с размерностью длины используется хорда профиля L , а для переменных с размерностью скорости — скорость на входе в расчетную область U . Безразмерная частота вычисляется как $\Omega = \frac{\omega L}{U}$.

Распределения числа Маха по поверхности профиля при его стационарном обтекании приведены на рис. 9 (буквы U и D относятся к верхней и нижней поверхности профиля). Результаты расчетов показывают, что в случае 1 течение в канале является полностью дозвуковым. В случае 2 в межлопаточном канале возникают локальные области сверхзвукового течения. В обоих случаях имеет место достаточно хорошее согласование расчетных результатов с данными измерений [28].

Течение газа, дозвуковое и почти равномерное на входе, становится неравномерным в межлопаточном канале. Около фронтальных частей профилей наблюдается существенное увеличение статического давления. Начиная со входной зоны межлопаточного канала, происходит ускорение потока. В случае 2,

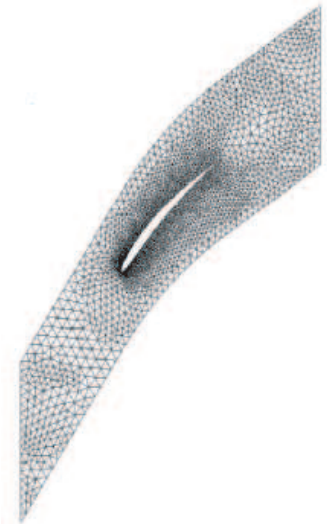


Рис. 8. Расчетная сетка для части расчетной области

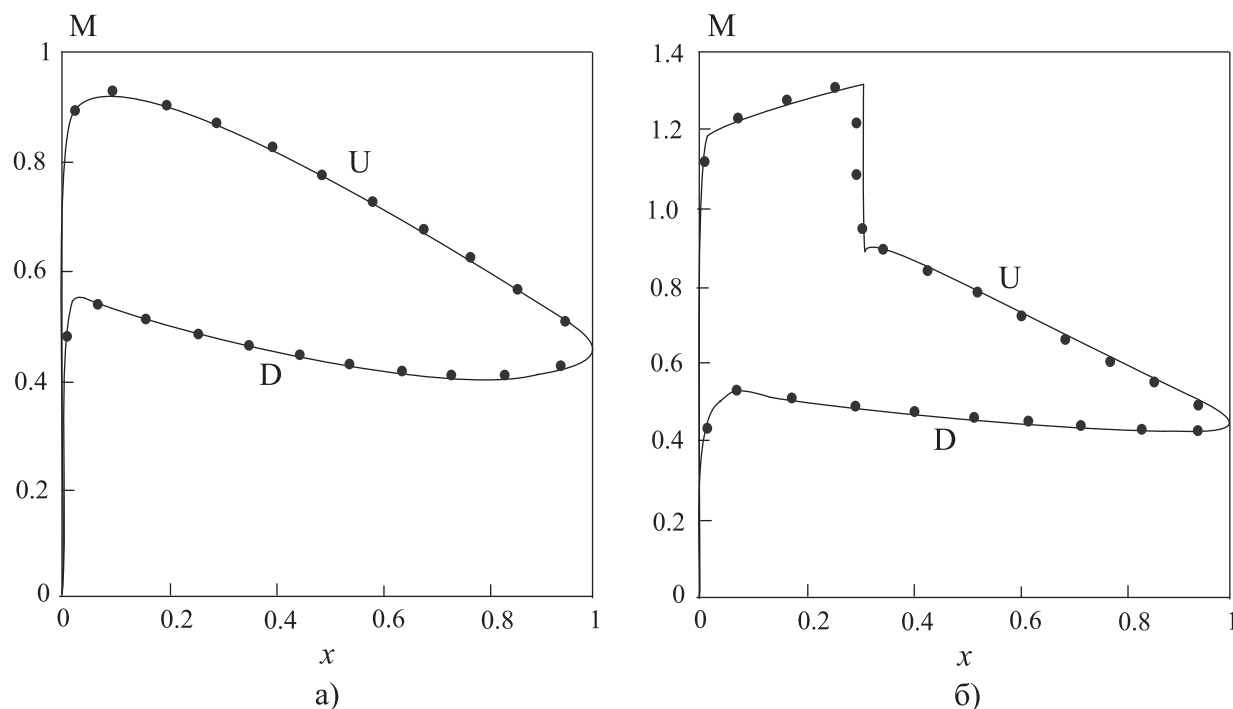


Рис. 9. Распределения числа Маха по поверхности профиля в случае 1 (а) и в случае 2 (б).
Значки • соответствуют экспериментальным данным [28]

проходя через S-образную звуковую линию, газ ускоряется до сверхзвуковой скорости. В средней части канала происходит поворот сверхзвукового потока, в результате чего возникает присоединенный к выпуклой части профиля скачок уплотнения. Поток в межлопаточном канале за скачком уплотнения становится дозвуковым, а статическое давление увеличивается. Вблизи кормовой части профиля и в следе за ним течение остается дозвуковым. Течение на выходе из решетки является неравномерным.

В случае 1 течение тормозится на поверхности давления профиля при $x = 0.0005$. Число Маха достигает максимального значения 0.916 на поверхности разрежения при $x = 0.109$. В выходном сечении число Маха и угол наклона вектора скорости к оси x составляют 0.446 и 40.2° соответственно.

В случае 2 течение тормозится при $x = 0.002$, а скачок уплотнения возникает на поверхности разрежения при $x = 0.258$ (влияние волновой структуры выражается в резком повышении давления на спинке профиля). Число Маха перед скачком уплотнения на верхней поверхности профиля достигает 1.282, а на нижней — 0.816. Перепад давления на скачке уплотнения составляет 0.477. Число Маха и угол наклона вектора скорости к оси x в выходном сечении составляют 0.432 и 40.3° соответственно.

Средние значения коэффициента подъемной силы составляют 0.35 и 0.42 в случаях 1 и 2 соответственно.

Вибрации лопаток воспроизводятся в виде двух последовательных циклов — восходящего и нисходящего движения профиля (профиль имеет одну степень свободы). Восходящее движение профиля происходит с амплитудой 0.01 м по нормали к его хорде. Нисходящее движение воспроизводится в виде вращения граничных узлов относительно срединной линии хорды $\{x_\alpha, y_\alpha\} = \{0.5, 0.05\}$ с угловым отклонением 2° . В качестве начального приближения используется стационарное решение задачи.

Рассматривается влияние частотных и фазовых характеристик на распределение давления по поверхности профиля. Частота колебаний профилей изменяется в диапазоне $\Omega = 0.25 \div 1.5$. Профили совершают колебания либо в одной фазе, либо в противоположной.

Коэффициент давления на поверхности профиля находится из соотношения $C_p = \frac{p_D - p_U}{\rho U^2 |a_0 + h_0 \omega|}$, где p_U и p_D — давления на верхней и нижней поверхности профиля соответственно. Под a_0 и h_0 понимаются амплитуды восходящего и нисходящего движения профиля.

Распределения коэффициента давления по поверхности профиля показаны на рис. 10 и 11 при $\Omega = 1$ (профили совершают колебания в одной фазе). Полученные распределения хорошо согласуются с данными измерений [28] как в отношении минимальных и максимальных значений коэффициента давления на верхней и нижней поверхности профиля, так и в отношении положения скачка уплотнения, присоединенного

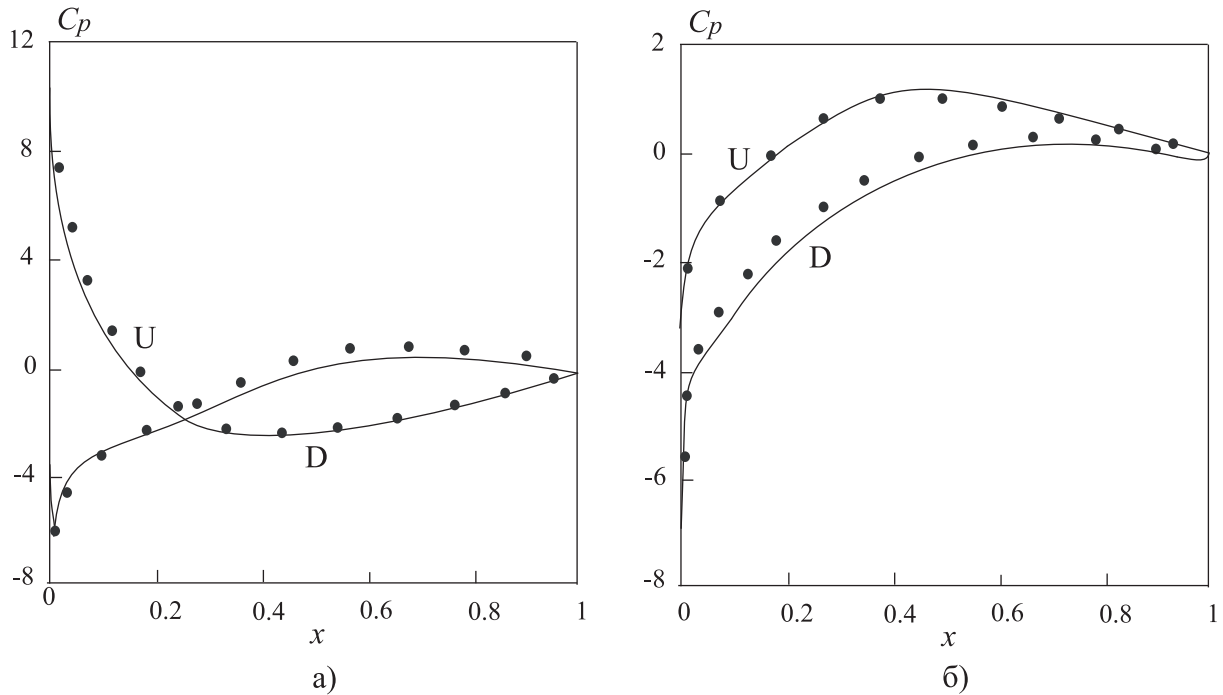


Рис. 10. Распределения числа Маха по поверхности профиля в случае 1 (а) и случае 2 (б).
Значки ● соответствуют экспериментальным данным [28]

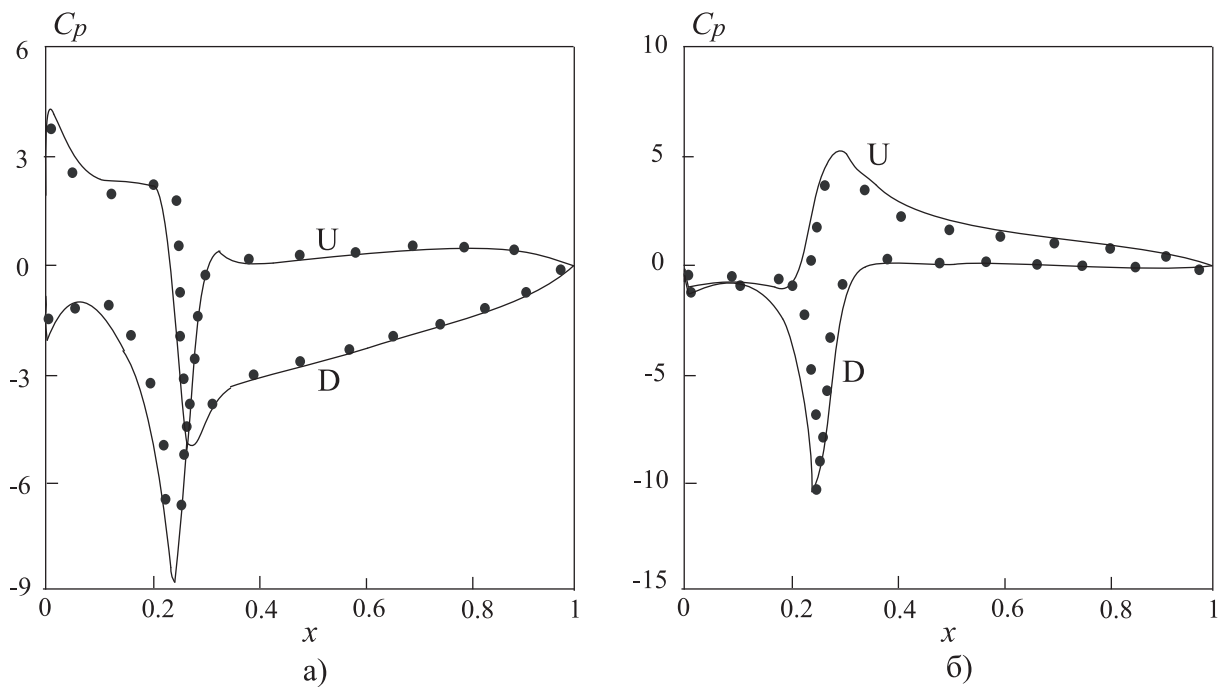


Рис. 11. Распределения давления при восходящем (а) и нисходящем (б) движении в случае 2.
Значки ● соответствуют данным [28]

к спинке профиля.

Распределения величины и фазового угла колебаний давления по поверхности профиля приведены на рис. 12 (буквы Р и S соответствуют поверхности давления и разрежения профиля). Результаты, относящиеся к распределению давления, достаточно хорошо согласуются с решением линеаризованных уравнений Эйлера [29] и решением [27], полученным на основе интегрирования уравнений Навье–Стокса (вязкое приближение). В целом, согласование результатов, полученных на основе различных математических моделей, довольно хорошее. Наибольшее расхождение результатов численного моделирования с данными [27]

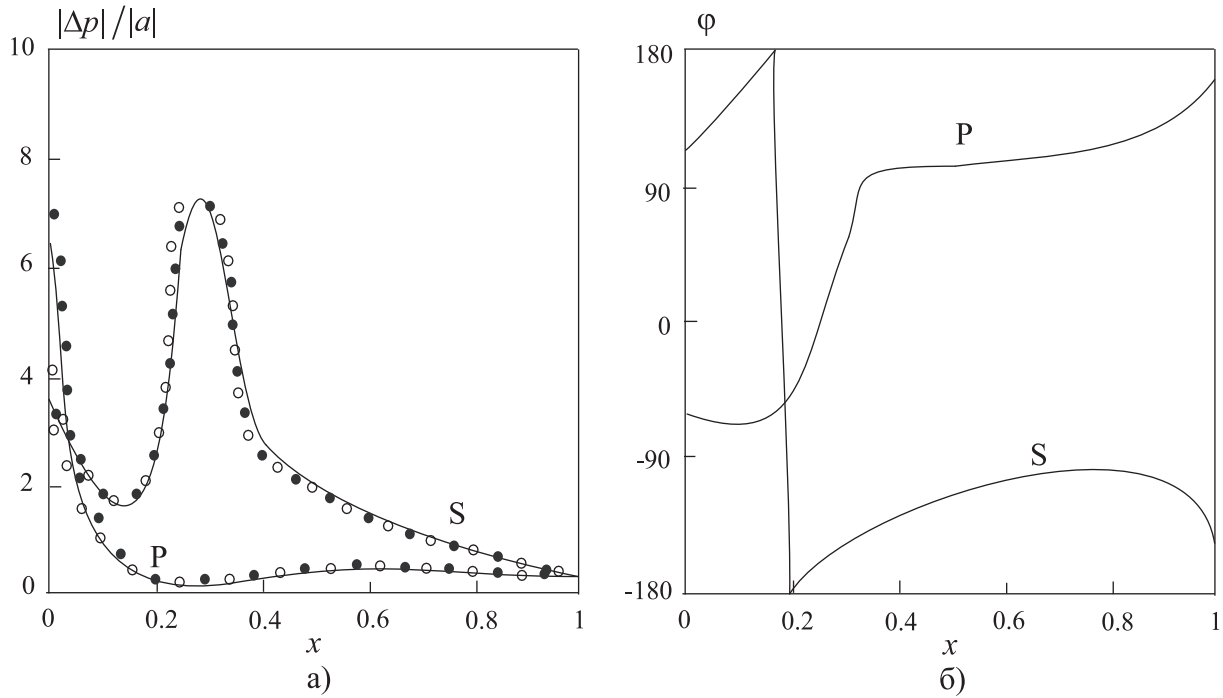


Рис. 12. Величина (а) и фаза (б) крутильных синфазных колебаний давления в случае 1 при $\Omega = 0.5$.
 Значки \bullet соответствуют расчетным данным [29], а значки \circ — решению [27]

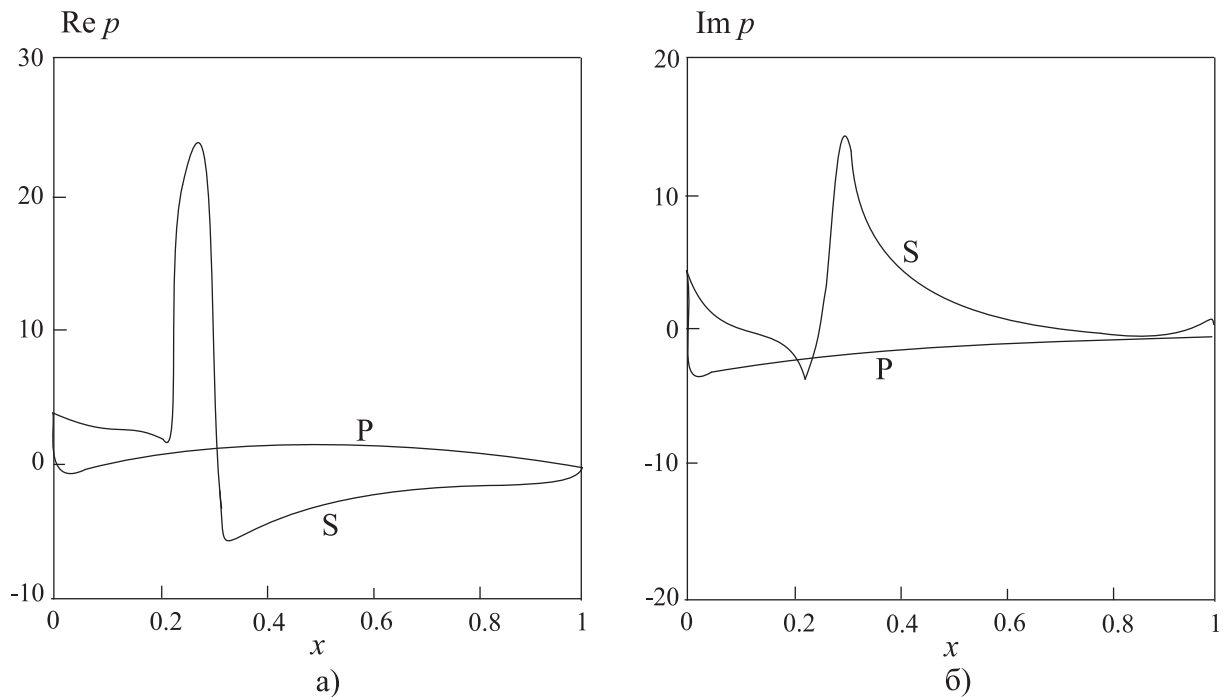


Рис. 13. Распределения вещественной (а) и мнимой (б) частей комплексного давления при $\Omega = 1.25$ и $\varphi = 90^\circ$

(модель, основанная на решении уравнений Навье–Стокса) имеет место в окрестности передней кромки и на поверхности разреза профиля. Распределение давления на поверхности разреза профиля, рассчитанное в рамках модели вязкого обтекания, является более наполненным по сравнению с распределением, полученным при помощи интегрирования уравнений Эйлера.

В случае гармонических колебаний распределение

$m, \text{ кг/с}$

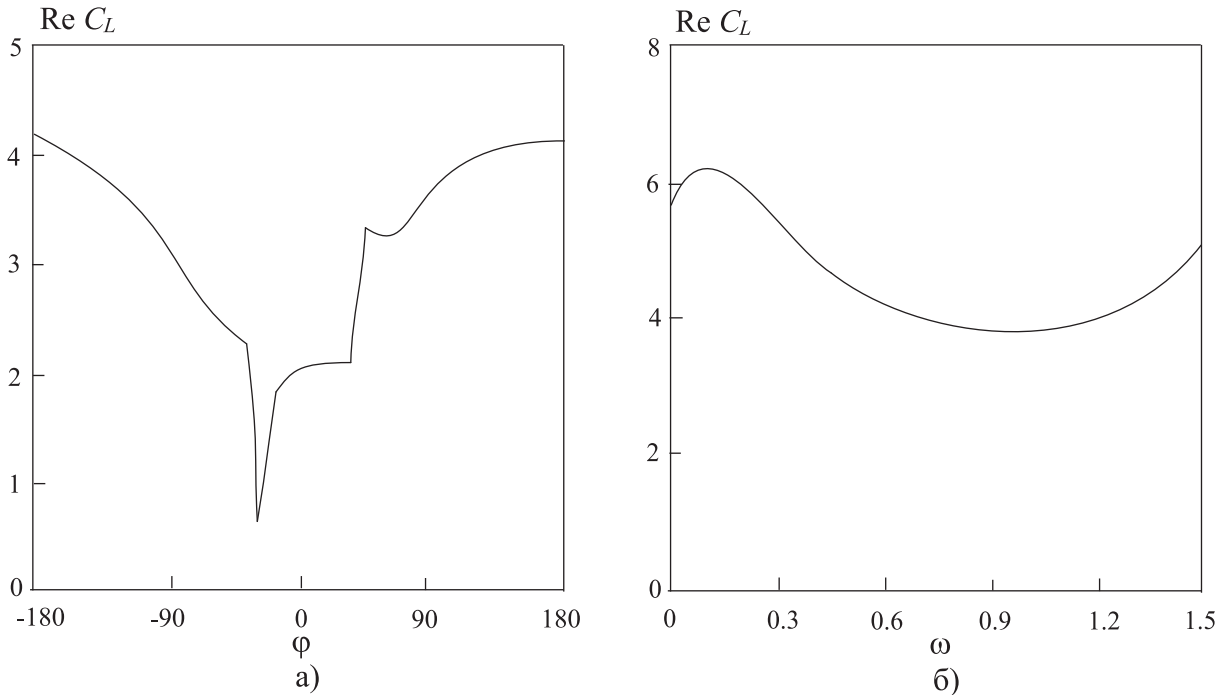


Рис. 14. Распределения вещественной части комплексного коэффициента подъемной силы в зависимости от фазы при $\Omega = 0.8$ (а) и частоты при $\varphi = 90^\circ$ (б) в случае 1

давления по поверхности профиля представляется в виде

$$C_p(x, t) = \tilde{C}_p(x) \exp(i\omega t) = [\tilde{C}_{pR}(x) - \tilde{C}_{pI}(x)] \exp(i\omega t),$$

где \tilde{C}_p — комплексный коэффициент давления, а \tilde{C}_{pR} и \tilde{C}_{pI} — его вещественная (синфазная) и мнимая (сдвинутая по фазе) части. Вещественная и мнимая части комплексного коэффициента давления выражаются в виде

$$\tilde{C}_{pR}(x) = \tilde{C}_p(x) \cos \varphi(x), \quad \tilde{C}_{pI}(x) = \tilde{C}_p(x) \sin \varphi(x).$$

Результаты расчетов, приведенные на рис. 13, показывают, что распределение вещественной и мнимой частей комплексного давления на поверхности давления профиля является практически однородным. В то же время, распределение комплексного давления вдоль поверхности разрежения профиля носит существенно неоднородный характер, принимая максимальное значение при $x \sim 0.236$.

Распределения вещественной части комплексного коэффициента подъемной силы в зависимости от частоты и фазового угла приведены на рис. 14. Зависимость комплексного коэффициента подъемной силы от частоты носит более слабый характер, чем от фазы колебаний профилей в решетке.

Зависимость расхода газа, покидающего расчетную область, от числа итераций показана на рис. 15. Кривая 1 соответствует стационарному решению задачи при отсутствии колебаний решетки профилей, а кривая 2 — решению задачи с учетом их колебаний. Профили начинают колебания после 2400 итераций, необходимых для выхода решения задачи на стационарный режим. Выход решения нестационарной задачи на периодический режим происходит за достаточно малый интервал времени, равный приблизительно восьми периодам колебаний.

9. Заключение. Рассмотрены подходы к дискретизации уравнений Навье–Стокса на подвижных неструктурированных сетках и методы перестроения сетки на каждом шаге по времени (методы прун-

жинной аналогии, а также методы, основанные на решении линейного и нелинейного уравнения упругости).

Проведено моделирование стационарного и нестационарного обтекания прямой решетки профилей, совершающих малые гармонические колебания с постоянным сдвигом фаз, в межлопаточном канале газовой турбины. В расчетах варьируется частота и фаза колебаний профилей. Построенная модель правильно воспроизводит влияние волновых эффектов на распределение давления по поверхности профиля. Частотные и фазовые характеристики оказывают существенное влияние на параметры потока в межлопаточном канале, распределение давления по поверхности профиля и коэффициент подъемной силы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haber R., Shephard M.S., Abel J.F., Gallagher R.H., Greenberg D.P.* A general two-dimensional graphical finite-element preprocessor utilizing discrete transfinite mappings // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1981. **17**, N 7. 1015–1044.
2. *Gadala M.S., Movahhedy M.R., Wang J.* On the mesh motion for ALE modeling of metal forming processes // *Finite Elements Analysis Design*. 2002. **38**, N 5. 435–459.
3. *Batina J.T.* Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes // *AIAA Journal*. 1990. **28**, N 8. 1381–1388.
4. *Venkatakrishnan V., Mavriplis D.J.* Implicit method for the computation of unsteady flows on unstructured grids // *Journal of Computational Physics*. 1996. **127**, N 2. 380–397.
5. *Johnson A.A., Tezduyar T.E.* Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. **134**, N 3/4. 351–373.
6. *Farhat C., Degand C., Koobus B., Lesoinne M.* Torsional spring for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998. **163**, N 1/4. 231–245.
7. *Blom F.J.* Considerations on the spring analogy // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. **32**, N 6. 647–668.
8. *Nielsen E.J., Anderson W.K.* Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes // *AIAA Journal*. 40, N 6. 1155–1163.
9. *Souli M., Zolesio J.P.* Arbitrary Lagrangian–Eulerian and free surface methods in fluid mechanics // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. **191**, N 3/5. 451–466.
10. *Degand C., Farhat C.* A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes // *Computers and Structures*. 2002. **80**, N 3/4. 305–316.
11. *Murayama M., Nakahashi K., Matsushima K.* Unstructured dynamic mesh for large movement and deformation // *AIAA Paper N 2002-0122*. 2002.
12. *Bottasso C.L., Detomi D., Serra R.* The ball-vertex method: a new simple analogy method for unstructured dynamic meshes // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. **194**, N 39/41. 4244–4264.
13. *Zeng D., Ethier C.R.* A semi-torsional spring analogy model for updating unstructured meshes in 3D moving domains // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2005. **41**, N 11/12. 1118–1139.
14. *Markou G.A., Mouroutis Z.S., Charmpis D.C., Papadrakakis M.* The ortho-semi-torsional (OST) spring analogy method for 3D mesh moving boundary problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2007. **196**, N 4/6. 747–765.
15. *Yan S., Ma Q.W.* Numerical simulation of fully nonlinear interaction between steep waves and 2D floating bodies using the QALE-FEM method // *Journal of Computational Physics*. 2007. **221**, N 1. 666–692.
16. *Thomas P.D., Lombard C.K.* Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids // *AIAA Journal*. 1979. **17**, N 10. 1030–1037.
17. *Lesoinne M., Farhat C.* Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. **134**, N 1/2. 71–90.
18. *Koobus B., Farhat C.* Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. **170**, N 1/2. 103–129.
19. *Gordnier R.E., Melville R.B.* Transonic flutter simulations using an implicit aeroelastic solver // *AIAA Journal of Aircraft*. 2000. **37**, N 5. 872–879.
20. *Guillard H., Farhat C.* On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. **190**, N 11/12. 1467–1482.
21. *Farhat C., Geuzaine P., Crandmont C.* The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids // *Journal of Computational Physics*. 2001. **174**, N 2. 669–694.
22. *Jothiprasad G., Mavriplis D.J., Caughey D.A.* Higher-order time integration schemes for the unsteady Navier–Stokes equations on unstructured meshes // *Journal of Computational Physics*. 2003. **191**, N 2. 542–566.

23. *Zhang L.P., Wang Z.J.* A block LU-SGS implicit dual time-stepping algorithm for hybrid dynamic meshes // *Computers and Fluids*. 2004. **33**, N 7. 891–916.
24. *Yang Z.* Unstructured dynamic meshes with higher-order time integration schemes for the unsteady Navier–Stokes equations // *AIAA Paper N 2005-1222*. 2005.
25. *Mavriplis D.J., Yang Z.* Construction of the discrete geometric conservation law for high-order time-accurate simulations on dynamic meshes // *Journal of Computational Physics*. 2006. **213**, N 2. 557–573.
26. *Волков К.Н.* Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // *Вычислительные методы и программирование*. 2005. **6**, № 1. 47–64.
27. *Fransson T.H., Verdon J.M.* Standard configurations for unsteady flow through vibrating axial-flow turbomachine-cascades // *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines and Propellers*. New York: Springer-Verlag, 1993. 859–889.
28. *Lawrence C., Spyropoulos E., Reddy T.S.R.* Unsteady cascade aerodynamic response using a multiphysics simulation code // *NASA Report N TM 2000-209635*. 2000.
29. *Verdon J.M., Caspar J.R.* A linearized unsteady aerodynamic analysis for transonic cascades // *Journal of Fluid Mechanics*. 1984. **149**. 403–429.

Поступила в редакцию
29.08.2008
