

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ПРАВОЙ ЧАСТИ

А. Б. Калинина¹

Рассмотрена задача стабилизации по правой части неустойчивых решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказана теорема существования искомого управления, предложен и обоснован алгоритм его построения, приведены результаты численных расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08-01-00415-а, 08-05-00738-а).

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^- u + h(u, v), \\ \dot{v} &= A^+ v + g(u, v), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u \in U = \mathbb{R}^l$, $v \in V = \mathbb{R}^m$, $l + m = n$, спектр матрицы A^- лежит слева от мнимой оси, спектр матрицы A^+ — справа от мнимой оси, функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле.

Пусть заданы $u_0 \in U$, $v_0, v_1 \in V$, $T \in \mathbb{R}$ и такое подпространство $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, что $P_V \mathcal{F} = V$, где P_V — ортогональный проектор на V . Требуется найти такой не зависящий от времени вектор управления $(f^-, f^+) = f(u_0, v_0, v_1, T) \in \mathcal{F}$, $f^- \in U$, $f^+ \in V$, чтобы для системы

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^- u + h(u, v) + f^-, \\ \dot{v} &= A^+ v + g(u, v) + f^+, \\ u(0) &= u_0, \quad v(0) = v_0 \end{aligned} \quad (2)$$

в фиксированный момент времени T выполнялось условие

$$v(T) = v_1. \quad (3)$$

По сути, искомое управление обеспечивает требуемую динамику на подпространстве V . Если $V \subseteq \mathcal{F}$, то искомый вектор f принадлежит подпространству V .

Решение данной задачи можно использовать для стабилизации по правой части неустойчивых решений эволюционных систем. Отметим, что задача асимптотической стабилизации по краевым условиям рассматривалась в работах [1, 2], а по начальным данным — в работе [3].

2. Алгоритм решения. Пусть вектор f^+ найден; тогда из условия $P_V \mathcal{F} = V$ следует, что вектор $f = (f^-, f^+)$ с наименьшей нормой в подпространстве \mathcal{F} существует, единственен и принадлежит подпространству $P_{\mathcal{F}} V$. Выразим f^- через f^+ следующим образом.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_m — некоторый базис в V , ψ_1, \dots, ψ_m — соответствующий ему базис в подпространстве $P_{\mathcal{F}} V$, η_1, \dots, η_l — некоторый базис в U . Построим матрицу D с элементами $d_{ij} = \langle \xi_i, \psi_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, m$, и матрицу B с элементами $b_{ij} = \langle \eta_i, \psi_j \rangle$, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, m$, где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение векторов в пространстве \mathbb{R}^n . Тогда выражение для вектора f^- примет вид

$$f^- = BD^{-1}f^+. \quad (4)$$

Отметим, что решение задачи (2), (3) удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{A^- t} u_0 + \int_0^t e^{A^-(t-s)} h(u(s), v(s)) ds + \int_0^t e^{A^-(t-s)} f^- ds, \\ v(t) &= e^{-A^+(T-t)} v_1 - \int_t^T e^{-A^+(s-t)} g(u(s), v(s)) ds - \int_t^T e^{-A^+(s-t)} f^+ ds, \quad v(0) = v_0. \end{aligned}$$

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: vokati@yandex.ru

Введем матрицу I^+ по формуле $I^+ = \int_0^T e^{-A^+s} ds$.

Если исходная задача линейна (т.е. $g, h \equiv 0$), то из условия $v(0) = v_0$ для искомой поправки $f^+ \equiv f^{0+}$ получим уравнение $I^+ f^{0+} = e^{-A^+T} v_1 - v_0$, а вектор f^{0-} найдем по формуле (4). В нелинейном случае (т.е. при $f, g \not\equiv 0$) используем вектор $f^0 = (f^{0-}, f^{0+})$ в качестве начального приближения для нижеследующего итерационного процесса.

Пусть найдено некоторое приближение искомого управления $f^N, N \geq 0$.

1. Построим решение $u^N(t), v^N(t)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^- u + h(u, v) + f^{N-}, \\ \dot{v} &= A^+ v + g(u, v) + f^{N+}, \\ u(0) &= u_0, \quad v(T) = v_1 \end{aligned} \tag{5}$$

с помощью следующего итерационного метода при $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$u^{N,0}(t) = e^{A^-t} u_0 + \int_0^t e^{A^-(t-s)} f^{N-} ds, \tag{6}$$

$$v^{N,0}(t) = e^{-A^+(T-t)} v_1 - \int_t^T e^{-A^+(s-t)} f^{N+} ds;$$

$$u^{N,k+1}(t) = u^{N,0}(t) + \int_0^t e^{A^-(t-s)} h(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)) ds, \tag{7}$$

$$v^{N,k+1}(t) = v^{N,0}(t) - \int_t^T e^{-A^+(s-t)} g(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)) ds.$$

2. Значение $f^{(N+1)+}$ определим из условия

$$v_0 = e^{-A^+T} v_1 - \int_0^T e^{-A^+s} g(u^N(s), v^N(s)) ds - \int_0^T e^{-A^+s} f^{(N+1)+} ds.$$

3. По найденному значению $f^{(N+1)+}$ построим $f^{(N+1)-}$ по формуле (4).

Отметим, что итерационный процесс (6), (7) решения уравнения (5) аналогичен описанному в [4] методу решения краевой задачи вблизи седлового положения равновесия.

3. Обоснование сходимости метода. Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть спес A^- лежит слева от мнимой оси, спес A^+ — справа от мнимой оси, функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле и задано такое подпространство $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, что $P_V \mathcal{F} = V$. Тогда для любого $T > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что при произвольных $u_0 \in U, v_0, v_1 \in V: \|u_0\| \leq \varepsilon, \|v_1\| \leq \|v_0\| \leq \varepsilon$ существует вектор $f = f(u_0, v_0, v_1, T) \in \mathcal{F}$, обеспечивающий выполнение условия (3) для системы уравнений (2).

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы итерационный процесс 1–3 сходится к искомому вектору управления f . Пусть $\Theta = \max \{1, \|BD^{-1}\|\}$, где матрицы B и D взяты из формулы (4).

Пусть значения $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ таковы, что спектр матрицы A^- лежит в комплексной плоскости строго слева от прямой $\text{Re } z = -\lambda$, а спектр матрицы A^+ — строго справа от прямой $\text{Re } z = \gamma$. В этом случае существует такая постоянная $C_1 \geq 1$, что при любом $s \in [0, \infty)$ выполняются оценки

$$\|e^{A^-s}\| \leq C_1 e^{-\lambda s}, \quad \|e^{-A^+s}\| \leq C_1 e^{-\gamma s}. \tag{8}$$

Обозначим $\Gamma = \max \{\lambda^{-1}, \gamma^{-1}\}$.

Поскольку функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле, то в ε -окрестности нуля в пространстве (u, v) для

дифференциала отображения (h, g) выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial(h, g)}{\partial(u, v)} \right\| \leq \delta; \quad (9)$$

следовательно,

$$\|h, g\| \leq \delta \|u, v\|, \quad (10)$$

где $\delta = \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а через $\|a, b\|$ обозначен $\max\{\|a\|, \|b\|\}$. Выберем значение ε настолько малым, чтобы для всех u и v , таких, что $\|u\| \leq C_2\varepsilon$ и $\|v\| \leq C_2\varepsilon$, выполнялись оценки (9), (10), а значение δ удовлетворяло неравенству

$$C_1 C_2 \Gamma \delta \leq \theta < 1, \quad (11)$$

где $C_2 = C_1 + C_1 \Gamma \Theta C_3 + \theta$ и $C_3 = \|(I^+)^{-1}\| (C_1 + 1 + \theta)$.

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть известно f^{N+} : $\|f^{N+}\| \leq C_3\varepsilon$, где величина ε обеспечивает выполнение условия (11). Тогда при любых $u_0 \in U$, $v_1 \in V$, $T \in \mathbb{R}$, таких, что $\|u_0\| \leq \varepsilon$, $\|v_1\| \leq \varepsilon$, $T > 0$, итерационный процесс (6), (7) сходится и при всех $t \in [0, T]$ верны оценки

$$\|u^N(t)\| \leq C_2\varepsilon, \quad \|v^N(t)\| \leq C_2\varepsilon. \quad (12)$$

Доказательство леммы 1. Покажем сначала, что при всех $t \in [0, T]$ и $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнены неравенства

$$\|u^{N,k}(t)\| \leq C_2\varepsilon, \quad \|v^{N,k}(t)\| \leq C_2\varepsilon. \quad (13)$$

При $k = 0$ верны оценки

$$\|u^{N,0}(t)\| \leq C_1 e^{-\lambda t} \|u_0\| + \int_0^t C_1 e^{-\lambda(t-s)} \|f^{N-}\| ds \leq C_1 \varepsilon + C_1 \lambda^{-1} \|BD^{-1}\| C_3 \varepsilon \leq (C_1 + C_1 \Gamma \Theta C_3) \varepsilon \leq C_2 \varepsilon,$$

$$\|v^{N,0}(t)\| \leq C_1 e^{-\gamma(T-t)} \|v_1\| + \int_t^T C_1 e^{-\gamma(s-t)} \|f^{N+}\| ds \leq C_1 \varepsilon + C_1 \gamma^{-1} C_3 \varepsilon \leq (C_1 + C_1 \Gamma \Theta C_3) \varepsilon \leq C_2 \varepsilon.$$

Чтобы обосновать неравенства (13) при всех значениях k , используем метод математической индукции. Пусть оценка (13) верна для некоторого $k \geq 0$ при всех $t \in [0, T]$. Из условий (7) и неравенств (8) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \|u^{N,k+1}(t)\| &\leq \|u^{N,0}(t)\| + \int_0^t C_1 e^{-\lambda(t-s)} \delta \|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\| ds, \\ \|v^{N,k+1}(t)\| &\leq \|v^{N,0}(t)\| + \int_t^T C_1 e^{-\gamma(s-t)} \delta \|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\| ds, \end{aligned}$$

откуда

$$\|u^{N,k+1}(t), v^{N,k+1}(t)\| \leq (C_1 + C_1 \Gamma \Theta C_3) \varepsilon + C_1 \Gamma \delta \max_{0 \leq s \leq T} \|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\|.$$

Из неравенства (11) заключаем, что если при всех $s \in [0, T]$ имеет место неравенство $\|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\| \leq C_2\varepsilon$, то

$$\|u^{N,k+1}(t), v^{N,k+1}(t)\| \leq (C_1 + C_1 \Gamma \Theta C_3 + \theta) \varepsilon = C_2 \varepsilon$$

при всех $t \in [0, T]$, откуда следует, что неравенства (13) выполняются для любого $k \geq 0$.

Теперь покажем, что при всех $k = 1, 2, \dots$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u^{N,k+1}(t) - u^{N,k}(t), v^{N,k+1}(t) - v^{N,k}(t)\| &\leq \\ &\leq \alpha \max_{0 \leq s \leq T} \|u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\|, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\alpha < 1$. Для этого выпишем оценки

$$\begin{aligned} & \left\| h(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)) - h(u^{N,k-1}(s), v^{N,k-1}(s)) \right\| \leq \\ & \leq \max_{\|u,v\| \leq C_2 \varepsilon} \left\| \frac{\partial(h,g)}{\partial(u,v)} \right\| \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s) \right\| \leq \\ & \leq \delta \max_{0 \leq s \leq T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s) \right\|, \\ & \left\| g(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)) - g(u^{N,k-1}(s), v^{N,k-1}(s)) \right\| \leq \delta \max_{0 \leq s \leq T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s) \right\|. \end{aligned}$$

Из уравнений (7) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| u^{N,k+1}(t) - u^{N,k}(t) \right\| & \leq \int_0^t C_1 e^{-\lambda(t-s)} \delta \max_{0 \leq s \leq T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s) \right\| ds \leq \\ & \leq C_1 \lambda^{-1} \delta \max_{0 \leq s \leq T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s) \right\|, \\ \left\| v^{N,k+1}(t) - v^{N,k}(t) \right\| & \leq C_1 \gamma^{-1} \delta \max_{0 \leq s \leq T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s) \right\|. \end{aligned}$$

Положим $\alpha = C_1 \Gamma \delta$, тогда в силу неравенства (11) имеем $\alpha C_2 \leq \theta < 1$. Поскольку $C_2 \geq 1$, то $\alpha < 1$. Таким образом, из полученных неравенств следует оценка (14).

В силу неравенства (14) члены ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u^{N,k+1}(t) - u^{N,k}(t), v^{N,k+1}(t) - v^{N,k}(t)) \tag{15}$$

при любом $t \geq 0$ ограничены по норме членами геометрической прогрессии с показателем $\alpha < 1$. Таким образом, ряд (15) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $(u^N(t), v^N(t))$. По построению $(u^N(t), v^N(t))$ — предел последовательных приближений (6), (7). Переходя в уравнениях (7) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим, что $(u^N(t), v^N(t))$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u^N(t) & = e^{A^- t} u_0 + \int_0^t e^{A^-(t-\tau)} h(u^N(\tau), v^N(\tau)) d\tau + \int_0^t e^{A^-(t-\tau)} f^{N-} d\tau, \\ v^N(t) & = e^{-A^+(T-t)} v_1 - \int_t^T e^{-A^+(\tau-t)} g(u^N(\tau), v^N(\tau)) d\tau - \int_t^T e^{-A^+(\tau-t)} f^{N+} d\tau. \end{aligned}$$

Дифференцирование правых частей этих уравнений по t показывает, что $(u^N(t), v^N(t))$ — решение системы уравнений (5).

Переходя в неравенствах (13) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим оценки (12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\|u_0\| \leq \varepsilon$, $\|v_1\| \leq \|v_0\| \leq \varepsilon$, $T > 0$, а величина ε обеспечивает выполнение условия (11). Тогда при любом $N = 0, 1, 2, \dots$ верна оценка $\|f^{N+}\| \leq C_3 \varepsilon = \|(I^+)^{-1}\| (C_1 + 1 + \theta) \varepsilon$.

Доказательство леммы 2. Докажем лемму 2 по индукции. При $N = 0$ имеем

$$f^{0+} = (I^+)^{-1} (e^{-A^+ T} v_1 - v_0), \quad \|f^{0+}\| \leq \|(I^+)^{-1}\| (C_1 + 1) \varepsilon < C_3 \varepsilon.$$

Пусть для некоторого $N \geq 0$ утверждение леммы 2 верно; тогда по лемме 1 можно найти $(u^N(t), v^N(t))$, удовлетворяющие неравенствам (12). Из выражения

$$I^+ f^{(N+1)+} = e^{-A^+ T} v_1 - v_0 - \int_0^T e^{-A^+ s} g(u^N(s), v^N(s)) ds$$

следует оценка $\|f^{(N+1)+}\| \leq \|(I^+)^{-1}\| (C_1 + 1 + C_1 C_2 \Gamma \delta) \varepsilon \leq C_3 \varepsilon$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\|u_0\| \leq \varepsilon$, $\|v_1\| \leq \|v_0\| \leq \varepsilon$, $T > 0$, а величина ε обеспечивает выполнение условия (11). Тогда существует такая величина $\beta < 1$, что $\|f^{(N+1)+} - f^{N+}\| \leq \beta \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\|$ при всех $N > 0$.

Доказательство леммы 3. При $N > 0$ имеем

$$\begin{aligned} I^+ f^{(N+1)+} &= e^{-A^+ T} v_1 - v_0 - \int_0^T e^{-A^+ s} g(u^N(s), v^N(s)) ds, \\ I^+ f^{N+} &= e^{-A^+ T} v_1 - v_0 - \int_0^T e^{-A^+ s} g(u^{N-1}(s), v^{N-1}(s)) ds. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$I^+ f^{(N+1)+} - I^+ f^{N+} = - \int_0^T e^{-A^+ s} [g(u^N(s), v^N(s)) - g(u^{N-1}(s), v^{N-1}(s))] ds.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \|I^+ (f^{(N+1)+} - f^{N+})\| &\leq \int_0^T C_1 e^{-\gamma s} \|g(u^N(s), v^N(s)) - g(u^{N-1}(s), v^{N-1}(s))\| ds \leq \\ &\leq C_1 \gamma^{-1} \delta \max_{0 \leq s \leq T} \|u^N(s) - u^{N-1}(s), v^N(s) - v^{N-1}(s)\|. \end{aligned}$$

Пусть $W = \max_{0 \leq s \leq T} \|u^N(s) - u^{N-1}(s), v^N(s) - v^{N-1}(s)\|$, тогда

$$\|I^+ f^{(N+1)+} - I^+ f^{N+}\| \leq C_1 \Gamma \delta W. \quad (16)$$

Решение $(u^N(t), v^N(t))$ краевой задачи (5) удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$u^N(s) = e^{A^- s} u_0 + \int_0^s e^{A^-(s-\tau)} h(u^N(\tau), v^N(\tau)) d\tau + \int_0^s e^{A^-(s-\tau)} f^{N-} d\tau, \quad (17)$$

$$v^N(s) = e^{-A^+(T-s)} v_1 - \int_s^T e^{-A^+(\tau-s)} g(u^N(\tau), v^N(\tau)) d\tau - \int_s^T e^{-A^+(\tau-s)} f^{N+} d\tau. \quad (18)$$

Из уравнений (17), (18), записанных для N и $N-1$, следуют оценки

$$\begin{aligned} \|u^N(s) - u^{N-1}(s)\| &\leq \int_0^s C_1 e^{-\lambda(s-\tau)} \|h(u^N(\tau), v^N(\tau)) - h(u^{N-1}(\tau), v^{N-1}(\tau))\| d\tau + \\ &+ \int_0^s C_1 e^{-\lambda(s-\tau)} \|f^{N-} - f^{(N-1)-}\| d\tau \leq C_1 \Gamma \delta W + C_1 \Gamma \|BD^{-1}\| \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\|, \\ \|v^N(s) - v^{N-1}(s)\| &\leq \int_s^T C_1 e^{-\gamma(\tau-s)} \|g(u^N(\tau), v^N(\tau)) - g(u^{N-1}(\tau), v^{N-1}(\tau))\| d\tau + \\ &+ \int_s^T C_1 e^{-\gamma(\tau-s)} \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\| d\tau \leq C_1 \Gamma \delta W + C_1 \Gamma \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\|. \end{aligned}$$

Из полученных оценок находим, что $W \leq C_1 \Gamma \delta W + C_1 \Gamma \Theta \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\|$; следовательно,

$$(1 - C_1 \Gamma \delta) W \leq C_1 \Gamma \Theta \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\|.$$

Поскольку $C_1\Gamma\delta \leq \frac{\theta}{C_2} < 1$, то можно разделить обе части полученного неравенства на $(1 - C_1\Gamma\delta)$ и подставить результат в оценку (16). Получим

$$\|I^+ f^{(N+1)+} - I^+ f^{N+}\| \leq \frac{C_1\Gamma\delta}{1 - C_1\Gamma\delta} C_1\Gamma\Theta \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\|.$$

Отсюда

$$\|f^{(N+1)+} - f^{N+}\| = \|(I^+)^{-1}(I^+ f^{(N+1)+} - I^+ f^{N+})\| \leq \frac{C_1\Gamma\delta}{1 - C_1\Gamma\delta} \|(I^+)^{-1}\| C_1\Gamma\Theta \|f^{N+} - f^{(N-1)+}\|.$$

Пусть $Q = \|(I^+)^{-1}\| C_1\Gamma\Theta$ и $\beta = \frac{C_1\Gamma\delta Q}{1 - C_1\Gamma\delta}$. В силу неравенства (11) имеем $\beta \leq \frac{\theta Q}{C_2 - \theta}$. Поскольку $C_2 = C_1 + \theta + Q(C_1 + \theta) + Q > Q$, а $\theta < 1$, то $\beta < 1$. Лемма 3 доказана.

Завершим доказательство теоремы. Из леммы 3 следует, что последовательность $\{f^{N+}\}_{N=0}^\infty$ — фундаментальная, поэтому она сходится к некоторому вектору f^+ . Поскольку f^{N-} восстанавливается однозначно по формуле (4), то и последовательность векторов f^N сходится. Теорема доказана.

4. Результаты расчетов. Для уравнения Чафе–Инфанта

$$\begin{aligned} w_t(t, x) &= w_{xx}(t, x) + \alpha w(t, x) + \beta w^3(t, x), \\ w(0, x) &= w_0(x), \quad w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $x \in [0, \pi]$ и $t \geq 0$, можно записать n -е приближение по методу Галеркина. Будем предполагать, что $w(t, x) \approx \sum_{j=1}^n w_j(t) e_j(x)$,

$e_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin jx$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{w}_j(t) &= \lambda_j w_j(t) + \beta \langle w^3(t, x), e_j(x) \rangle, \\ w_j(0) &= \langle w_0(x), e_j(x) \rangle = w_{j0}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\lambda_j = -j^2 + \alpha$ и $j = 1, \dots, n$.

Применим предложенный метод стабилизации по правой части к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (20).

Отметим, что решение задачи стабилизации по правой части для уравнения (19) в терминах конечно-разностных схем рассматривается в работе [5].

Пусть m таково, что все $\lambda_j < 0$ при $j \leq m$ и все $\lambda_j > 0$ при $j > m$. Обозначим $v = (w_1, \dots, w_m)$, $u = (w_{m+1}, \dots, w_n)$, $v_0 = (w_{10}, \dots, w_{m0})$ и $u_0 = (w_{(m+1)0}, \dots, w_{n0})$, тогда уравнение (20) примет вид (1) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} A^+ &= \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad A^- = \text{diag}\{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}, \\ g_j(u, v) &= \beta \left\langle \left(\sum_{i=1}^n w_i e_i \right)^3, e_j \right\rangle, \quad j = 1, \dots, m, \\ h_j(u, v) &= \beta \left\langle \left(\sum_{i=1}^n w_i e_i \right)^3, e_{j+m} \right\rangle, \quad j = 1, \dots, n - m. \end{aligned} \tag{21}$$

Пусть $\varphi_j(x) = \begin{cases} e_j(x), & x \in D; \\ 0, & x \in [0, \pi] \setminus D, \end{cases}$ где $D = \left[\frac{1}{7}\pi, \frac{2}{7}\pi \right] \cup \left[\frac{3}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi \right] \cup \left[\frac{5}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi \right]$. Координаты базисных векторов φ_j пространства \mathcal{F} определим так: $\varphi_{ji} = \langle \varphi_j, e_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Подпространство \mathcal{F} зададим в виде $\mathcal{F} = \text{span} \{ \varphi_j \}_{j=1, \dots, n}$.

Приведем результаты расчетов для случая $\alpha = 17$, $\dim V = 4$, $\beta = -10$, $n = 100$, $T = 0.2$, $v_1 = 0$. Обозначим $\mathbf{w}(t) = (v(t), u(t))$. В таблице представлены норма поправки $\|f\|$, вносимой в правую часть уравнения при $t \in [(j-1)T, jT]$, и норма решения $\|\mathbf{w}\|$ при $t = jT$.

Результаты численных экспериментов показывают, что предложенный алгоритм позволяет решать задачи асимптотической стабилизации для систем нелинейных дифференциальных уравнений большой

j	$\ f\ $	$\ \mathbf{w}\ $
1	$1.829 \times 10^{+01}$	3.850×10^{-01}
2	1.837×10^{-02}	4.376×10^{-02}
3	3.370×10^{-07}	8.838×10^{-03}
4	3.013×10^{-10}	1.786×10^{-03}
5	2.774×10^{-13}	3.611×10^{-04}
6	2.554×10^{-16}	7.301×10^{-05}
7	0.	1.476×10^{-05}
8	0.	2.984×10^{-06}
9	0.	6.032×10^{-07}
10	0.	1.219×10^{-07}

размерности, при этом уже начальное приближение f^0 достаточно эффективно обеспечивает процесс стабилизации.

Отметим, что норма поправки, необходимой для выполнения условия $v(T) = v_1 = 0$, мало отличается от нормы поправки для произвольного v_1 , $\|v_1\| < \|v_0\|$, тогда как в первом случае эффективность процесса стабилизации существенно выше.

Отдельно проводилось сравнение эффективности и области применимости данного алгоритма и алгоритма из работы [5] для приближенного решения задачи стабилизации по правой части уравнения (2). Численно показано, что эти методы дают качественно близкие результаты.

Автор приносит благодарность А. А. Корневу за постановку задачи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсиков А.В.* Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье–Стокса посредством управления с обратной связью с границы области // *Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы*. Т. 2. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2002. 127–164.
2. *Chizhonkov E.V.* Numerical aspects of one stabilization method // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2003. **18**, N 5. 363–376.
3. *Корнев А.А.* Метод асимптотической стабилизации по начальным данным к заданной траектории // *Журн. вычисл. матем. матем. физ.* 2006. **46**, № 1. 37–51.
4. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. *Kornev A.A.* Задачи асимптотической стабилизации по правой части // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2008 (в печати).

Поступила в редакцию
06.05.2008
