

УДК 519.6

**О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ МЕТОДОМ ПОДСЕТОК  
ДЛЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ  
ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

**К. Ю. Богачев<sup>1</sup>, Н. С. Мельниченко<sup>1</sup>**

Для задачи фильтрации вязкой сжимаемой многофазной смеси в анизотропной пористой среде рассмотрена проблема пространственной аппроксимации на неортогональных неструктурированных сетках. Предложен новый метод многоточечной аппроксимации, лишенный недостатков большинства методов этого класса: ориентационного эффекта и появления нефизических потоков. Приведены результаты численных экспериментов на реальных задачах.

**1. Введение.** Для задачи фильтрации вязкой сжимаемой многофазной смеси в анизотропной пористой среде рассмотрена проблема пространственной аппроксимации на неортогональных неструктурированных сетках. В традиционном методе конечных объемов, применяемом для точного выполнения закона сохранения [9], возникает задача аппроксимации потока каждой из фаз через грань между соприкасающимися блоками сетки. В наиболее часто используемой двухточечной аппроксимации [4] этот поток приближают по значениям в этих двух соприкасающихся блоках, что приводит к большой погрешности, если поток не ортогонален общей грани блоков [1] (например при диагональном тензоре абсолютной проницаемости, если грани блоков сетки не ортогональны координатным осям), а также к так называемому “ориентационному эффекту” [6], когда мгновенное значение потока в пространстве зависит от выбора сетки.

В работах [2, 3, 8] были предложены многоточечные методы (О-метод, U-метод, базисов связей), которые для вычисления потока через грань между двумя блоками сетки привлекают значения в соседних к ним блоках. Эти методы хорошо приближают поток, не ортогональный грани блока, но не решают проблему ориентационного эффекта и добавляют еще одну проблему — возникновение нефизических потоков [5] из блока с меньшим давлением в блок с большим давлением при сильной неортогональности граней координатным осям и сильной анизотропии тензора абсолютной проницаемости.

В настоящей статье предложен новый метод многоточечной аппроксимации — метод подсеток — лишенный указанных недостатков. На большом количестве реальных задач проведено сравнение предложенного метода с другими методами многоточечной аппроксимации и двухточечным методом.

**2. Постановка задачи.** Рассматриваются стандартные уравнения многофазной изотермической модели черной нефти в трехмерной области:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi N_c) &= \operatorname{div} \sum_{l=o,w,g} x_{c,l} \xi_l \left( \mathbf{k} \frac{k_{r,l}}{\mu_l} (\nabla p_l - \gamma_l \nabla D) \right) + q_c, \quad c = 1, \dots, n_c, \\ p_o - p_g &= P_{cog}, \quad p_o - p_w = P_{cow}, \\ S_w + S_o + S_g &= 1, \\ N_w &= \frac{S_w}{B_w}, \quad N_o = \frac{S_o}{B_o}, \quad N_g = \frac{S_g}{B_g} + R_{g,o} \frac{S_o}{B_o}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $n_c$  — количество компонентов в смеси;  $R_{g,o} = R_{g,o}(p_o)$  — растворимость газа в нефтяной фазе;  $B_l = B_l(p_l)$  — коэффициент объемного расширения фазы  $l$ ,  $l = o$  (oil),  $g$  (gas),  $w$  (water);  $\phi = \phi(p_w, p_o, p_g, x, y, z)$  — пористость среды;  $x_{c,l} = x_{c,l}(p_w, p_o, p_g, \mathbf{N})$  — молярная доля компонента  $c$ ,  $c = 1, \dots, n_c$ , в фазе  $l$ ;  $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_{n_c})$  — вектор молярных плотностей;  $\xi_l = \xi_l(p_l, \mathbf{N})$  — молярная плотность фазы  $l$ ;  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(p_w, p_o, p_g, x, y, z)$  — тензор абсолютной проницаемости;  $k_{r,l} = k_{r,l}(S_w, S_g)$  — относительная проницаемость фазы  $l$ ;  $\mu_l = \mu_l(p_l)$  — вязкость фазы  $l$ ;  $\gamma_l = \rho_l g$  — вертикальный градиент гидростатического давления в фазе  $l$ ;  $g$  — гравитационная постоянная;  $D = D(x, y, z)$  — вектор глубины (сверху вниз);

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: bogachev@mech.math.msu.su

$\rho_l = \rho_l(p_l)$  — массовая плотность фазы  $l$ ;  $P_{c\text{ог}} = P_{c\text{ог}}(S_g)$  — капиллярное давление в системе нефть–газ;  $P_{c\text{ов}} = P_{c\text{ов}}(S_w)$  — капиллярное давление в системе вода–нефть;  $q_c = q_c(p_w, p_o, p_g, \mathbf{N}, t, x, y, z)$  — источник компонента  $c$  (скважина).

Неизвестными в системе (1) являются

- 1)  $N_c = N_c(t, x, y, z)$  — молярная плотность компонента  $c$  (для модели черной нефти компонентами служат вода, нефть и газ),
- 2)  $S_l = S_l(t, x, y, z)$  — насыщенность фазы  $l$ ,
- 3)  $p_l = p_l(t, x, y, z)$  — давление в фазе  $l$ .

В самом распространенном случае количество компонент  $n_c$  равно трем. Для этой системы уравнений задаются начальные условия, а также на внешней границе резервуара ставятся условия постоянного давления (условия Дирихле) или заданного потока (условия Неймана).

После использования неявной (полностью или только по давлению — IMPES) аппроксимации по времени уравнения полудискретной системы могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \nabla(p + C(p, N)) + D(p, N)\nabla g, \\ \operatorname{div}(AB(p, N)\Phi(p, N)) + Q(p, N) &= f, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A = A(x, y, z)$  — известная матричная функция размера  $3 \times 3$ , содержащая тензор абсолютной проницаемости  $\mathbf{k}$ ;  $B = B(x, y, z, p, N)$  — известная функция, определяемая физическими свойствами фаз;  $C = C(x, y, z, p, N)$  — известная функция, включающая капиллярные давления фаз;  $D = D(x, y, z, p, N)$  и  $g = g(x, y, z)$  — известные функции, определяющие гравитационное влияние;  $Q = Q(x, y, z, p, N)$  — известная функция (вида  $\delta$ -функции Дирака), содержащая аппроксимацию скважин;  $f = f(x, y, z)$  — известная функция, определяемая данными с предыдущего слоя по времени;  $N = \{N_c(x, y, z) \mid c = 1, \dots, n_c\}$  и  $p = p(x, y, z)$  — искомые функции.

**3. Пространственная аппроксимация.** Для пространственной аппроксимации уравнений такого типа принято использовать смешанный гибридный метод конечных элементов или метод конечных объемов, которые удовлетворяют требованию точного выполнения закона сохранения вещества в системе. Рассмотрим подробнее наиболее широко применяемый метод конечных объемов. Используется исходная геологическая сетка из квазипараллелограммов и вводится пространство  $\mathbb{P}^h$  функций, кусочно постоянных на блоке сетки. В этом пространстве требуется найти приближения  $p^h$  и  $N^h$  искомых функций  $p$  и  $N$ . Для выполнения условия консервативности необходимо точно приближать оператор  $\operatorname{div}$ . Для этого уравнения (2) интегрируются по каждому блоку сетки:

$$\int_{V_i} \operatorname{div}(AB(p, N)\Phi(p, N)) dv = \int_{V_i} (f - Q(p, N)) dv.$$

После этого используется формула Гаусса–Остроградского

$$\int_{\partial V_i} (AB(p, N)\Phi(p, N), \mathbf{n}') ds = \int_{V_i} (f - Q(p, N)) dv,$$

где  $\mathbf{n}'$  — вектор внешней нормали к блоку  $V_i$ .

Рассмотрим произвольную грань  $E$  сетки. Если она является внешней гранью для расчетной области, т.е. существует только один блок  $V_i$  сетки, содержащий  $E$ , то положим  $\mathbf{n}$  равным вектору внешней нормали к  $V_i$  и  $\delta_{iE} = 1$ . Если  $E$  является внутренней гранью, т.е. существуют такие блоки  $V_{i_1}$  и  $V_{i_2}$  сетки, что  $E = V_{i_1} \cap V_{i_2}$  и  $i_1 < i_2$ , то положим  $\mathbf{n}$  равным вектору внешней нормали к  $V_{i_1}$ ,  $\delta_{i_1 E} = 1$  и  $\delta_{i_2 E} = -1$ . Будем обозначать индекс  $i_1$  через  $E-$ , а индекс  $i_2$  — через  $E+$ . Пусть  $I_E(p, N) = \int_E (AB(p, N)\Phi(p, N), \mathbf{n}) ds$ .

Тогда при переходе к дискретной задаче над пространством  $\mathbb{P}^h$  получим нелинейную систему уравнений относительно неизвестных  $p^h$  и  $N^h$ :

$$\sum_{E \in \partial V_i} \delta_{iE} I_E^h(p^h, N^h) + Q(p_i^h, N_i^h) = v_i f_i.$$

Здесь  $I_E^h$  — дискретный аналог оператора  $I_E$ ,  $v_i$  — объем блока  $V_i$ ,  $f_i$  — значение  $f$  в блоке  $V_i$ . Эта система может быть решена методом Ньютона. Для этого нам необходимо определить оператор  $I_E^h$ , а точнее, указать алгоритм вычисления  $I_E^h(p^h, N^h)$ ,  $\frac{\partial I_E^h}{\partial p_j}(p^h, N^h)$  и  $\frac{\partial I_E^h}{\partial N_{c,j}^h}(p^h, N^h)$  для всех  $j$  и  $c$ .

Функция  $B(p, N)$ , исходя из физического смысла, аппроксимируется “по потоку”:

$$I_E^h(p^h, N^h) = \begin{cases} B(p_{E+}, N_{E+}) \tilde{I}_E^h(p^h, N^h), & \text{если } \tilde{I}_E^h(p^h, N^h) \geq 0, \\ B(p_{E-}, N_{E-}) \tilde{I}_E^h(p^h, N^h), & \text{если } \tilde{I}_E^h(p^h, N^h) < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\tilde{I}_E^h(p^h, N^h)$  — дискретный аналог оператора  $\int_E (A \nabla \cdot, \mathbf{n}) ds$ . Будем обозначать через  $\tilde{E}$  блок для  $B(p, N)$ , выбранный в (3).

Полагают, что

$$\tilde{I}_E^h(p^h, N^h) = \sum_{k=1}^m t_k (p_{i_k} + C(p_{i_k}, N_{i_k}) + D^h(p^h, N^h) g_{i_k}). \quad (4)$$

Индексы  $i_k$  и коэффициенты  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , определяют действие дискретного аналога оператора  $\int_E (A \nabla \cdot, \mathbf{n}) ds$  на сеточную функцию. В случае, когда  $m = 2$  для всех граней  $E$ , метод аппроксимации называется двухточечным (TPFA, Two Point Flux Approximation), а когда существуют грани с  $m > 2$  — многоточечным методом (MPFA, Multipoint Flux Approximation). Значения  $t_k$ , как правило, носят название коэффициентов проводимости (transmissibility coefficients) для грани  $E$ . Функция  $D(p, N)$  является с точностью до константы плотностью фазы и аппроксимируется как

$$D^h(p^h, N^h) = \frac{D(p_{E-}, N_{E-}) + D(p_{E+}, N_{E+})}{2}. \quad (5)$$

Объединяя формулы (3) – (5), получим выражения для оператора  $I_E^h$  и его производных:

$$\begin{aligned} I_E^h(p^h, N^h) &= B(p_{\tilde{E}}, N_{\tilde{E}}) \sum_{k=1}^m t_k \left( p_{i_k} + C(p_{i_k}, N_{i_k}) + \frac{D(p_{E-}, N_{E-}) + D(p_{E+}, N_{E+})}{2} g_{i_k} \right), \\ \frac{\partial I_E^h(p^h, N^h)}{\partial p_j} &= \delta_{\tilde{E}}^j \frac{\partial B(p_{\tilde{E}}, N_{\tilde{E}})}{\partial p} \sum_{k=1}^m t_k \left( p_{i_k} + C(p_{i_k}, N_{i_k}) + \frac{D(p_{E-}, N_{E-}) + D(p_{E+}, N_{E+})}{2} g_{i_k} \right) + \\ &+ B(p_{\tilde{E}}, N_{\tilde{E}}) \sum_{k=1}^m t_k \left( \delta_{i_k}^j \left( 1 + \frac{\partial C(p_{i_k}, N_{i_k})}{\partial p} \right) + \frac{\delta_{E-}^j \frac{\partial D(p_{E-}, N_{E-})}{\partial p} + \delta_{E+}^j \frac{\partial D(p_{E+}, N_{E+})}{\partial p}}{2} g_{i_k} \right), \\ \frac{\partial I_E^h(p^h, N^h)}{\partial N_{c,j}} &= \delta_{\tilde{E}}^j \frac{\partial B(p_{\tilde{E}}, N_{\tilde{E}})}{\partial N_c} \sum_{k=1}^m t_k \left( p_{i_k} + C(p_{i_k}, N_{i_k}) + \frac{D(p_{E-}, N_{E-}) + D(p_{E+}, N_{E+})}{2} g_{i_k} \right) + \\ &+ B(p_{\tilde{E}}, N_{\tilde{E}}) \sum_{k=1}^m t_k \left( \delta_{i_k}^j \frac{\partial C(p_{i_k}, N_{i_k})}{\partial N_c} + \frac{\delta_{E-}^j \frac{\partial D(p_{E-}, N_{E-})}{\partial N_c} + \delta_{E+}^j \frac{\partial D(p_{E+}, N_{E+})}{\partial N_c}}{2} g_{i_k} \right). \end{aligned}$$

Итак, для окончательного определения пространственной аппроксимации для уравнений (2) требуется для каждой грани  $E$  сетки предъявить алгоритм вычисления индексов  $i_k$  и коэффициентов проводимости  $t_k$  в соотношении (4).

**4. Двухточечная и многоточечная аппроксимации.** При аппроксимации по двум точкам имеем  $m = 2$ ,  $i_1 = E-$ ,  $i_2 = E+$ ,  $t_1 = -T$ ,  $t_2 = T$ . Значение  $T$  называется базовым коэффициентом проводимости грани, является положительным числом и равно  $\text{mes}(E) \frac{A_{E-}^{rr} - A_{E+}^{rr}}{d_{E-} A_{E+}^{rr} + d_{E+} A_{E-}^{rr}}$ , где  $d_j$  — расстояние от центра масс блока с индексом  $j$ ,  $j = E-, E+$ , и гранью  $E$ ,  $A^{rr}$  — диагональный элемент тензора  $A$  с индексами  $(r, r)$  и индекс  $r$  определяется осью, которой квазиортогональна грань  $E$  (его значение равно 1, 2 и 3 для осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно). Гармоническое осреднение тензора  $A$  выбрано для того, чтобы исключить переток в том случае, когда значение  $A_{E-}^{rr}$  или  $A_{E+}^{rr}$  равно нулю.

Основным недостатком этого метода является то, что порядок аппроксимации оператора  $(A \nabla \cdot, \mathbf{n})$  равен  $O(h)$  только в случае, когда сетка структурированная и ортогональная, а тензор  $A$  диагональный. В

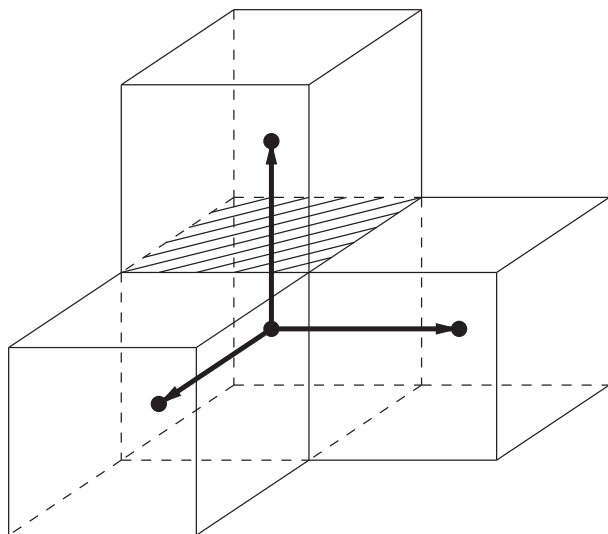


Рис. 1. Экземпляр базиса для метода базисов связей

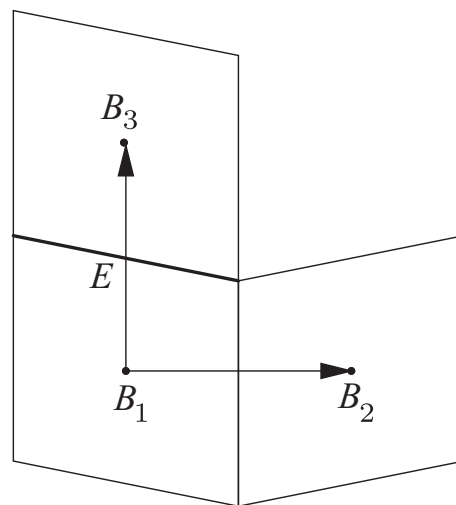


Рис. 2. Случай нефизичного течения

остальных случаях порядок равен  $O(1)$ , так как по двум точкам можно приблизить лишь одну компоненту потока. Таким образом, качество аппроксимации падает тем больше, чем более неортогональна прямая, соединяющая центры блоков, и общая между этими блоками грань. Известно, что при отклонении указанного угла от  $90^\circ$  более, чем на  $10^\circ$ , погрешность аппроксимации потока становится значительной [6].

Для исправления ситуации были разработаны методы многоточечной аппроксимации. Самый простой из них — метод базисов связей [8] (доработан для использования в трехмерной области на произвольных сетках) — основан на более точном приближении градиента. Сначала градиент вычисляется в центре каждого из блоков  $E-$  и  $E+$ , а затем осредняется с весами  $d_{E-}$  и  $d_{E+}$  на грань. Для приближения градиента в центре блока рассматриваются все базисы из векторов, соединяющих центр этого блока с центрами соседних, такие, чтобы один из векторов соединял  $E-$  и  $E+$  (рис. 1); затем градиент восстанавливается по проекциям на каждый базисный вектор. Тензор  $A$  и интеграл по грани применяются так же, как в методе TPFA.

Порядок аппроксимации оператора  $(A\nabla, \mathbf{n})$  для этого метода равен  $O(h)$ . Тем не менее, такой способ приближения потока содержит ряд недостатков. Самый главный из них — появление нефизичного течения в некоторых случаях. Рассмотрим для примера систему из трех блоков в двумерном случае (рис. 2).

Пусть тензор проницаемости единичный и давление в блоке  $B_i$  равно  $p_i$ . Приближение градиента в центре  $B_1$  будет равно  $\left(\frac{p_2 - p_1}{d_{12}}, \frac{p_3 - p_1}{d_{13}}\right)$ . Нормаль к грани  $E$ , внешняя по отношению к  $B_1$ , равна  $\frac{(\alpha, 1)}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$ ,  $\alpha > 0$ . Это означает, что приближение потока, построенное по этому базису, равно

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \left( \alpha \frac{p_2 - p_1}{d_{12}} + \frac{p_3 - p_1}{d_{13}} \right).$$

Если окажется, что  $p_3 > p_1$  и  $p_3 - p_1 < \frac{\alpha d_{13}}{d_{12}} (p_1 - p_2)$ , то поток станет отрицательным, т.е. будет переток из  $B_1$  в  $B_3$  (хотя  $p_3 > p_1 > p_2$ ), увеличивающийся тем сильнее, чем меньше давление  $p_2$ . В анизотропной среде для блоков, размеры которых отличаются в десятки раз по различным направлениям, этот эффект проявляется еще сильнее. Основная причина такого поведения заключается в том, что положение центров блоков слабо связано с направлением нормалей к граням.

В промышленных гидродинамических симуляторах используются такие многоточечные аппроксимации, как O-метод, U-метод и др. [2, 3]. Они обычно применяются для приближения оператора  $A\nabla$ , поскольку такой подход лучше описывает физическое явление. К сожалению, эти методы не лишены недостатков, связанных с возникновением нефизичных течений, что во многом обусловлено неудовлетворительным качеством приближения геометрии сетки.

**5. Метод подсеток.** Разработанный нами метод подсеток позволяет решить описанную выше проблему. Прежде всего, для каждой вершины сетки строится так называемая область взаимодействия. В

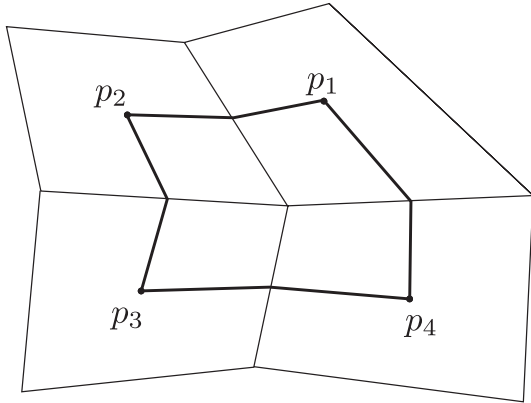


Рис. 3. Область взаимодействия в двумерном случае

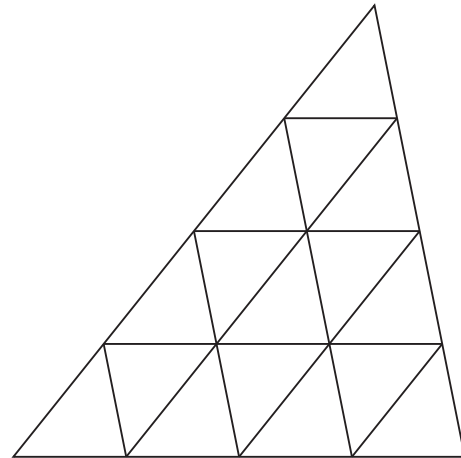


Рис. 4. Грань тетраэдра при разбиении с  $n = 4$

двумерном случае для каждого блока, содержащего вершину, необходимо соединить центр масс с серединой каждой стороны, содержащей вершину, получив тем самым область вокруг вершины (рис. 3). В трехмерном случае аналогичная область является объединением всех возможных тетраэдров  $PMEV$ , где  $V$  — рассматриваемая вершина,  $E$  — середина содержащего ее ребра,  $M$  — центр масс содержащей его грани и  $P$  — центр масс содержащего ее блока. В равномерном случае количество таких тетраэдров для внутренней вершины сетки равно 48.

После ее определения область взаимодействия должна быть точно аппроксимирована сеткой из тетраэдров. Для этого предлагается задать единый параметр разбиения  $n$  и разбить каждый тетраэдр  $PMEV$  на  $n^3$  равных по объему тетраэдров так, чтобы каждая грань исходного тетраэдра была равномерно разбита на треугольники (рис. 4). Если обозначить через

$$f_{ijk}(a, b, c) = \left( \frac{i+a}{n}, \frac{j+b}{n}, \frac{k+c}{n}, \frac{n-i-j-k-a-b-c}{n} \right)$$

барицентрические координаты узла разбиения относительно исходного тетраэдра, то тетраэдры, на которые он разбит, определяются следующими четверками точек:

$$\begin{aligned} & f_{ijk}(0, 0, 0), f_{ijk}(1, 0, 0), f_{ijk}(0, 1, 0), f_{ijk}(0, 0, 1) \quad \forall i, j, k : i + j + k < n, \\ & f_{ijk}(1, 0, 0), f_{ijk}(0, 1, 1), f_{ijk}(0, 0, 1), f_{ijk}(0, 1, 0) \quad \forall i, j, k : i + j + k < n - 1, \\ & f_{ijk}(1, 0, 0), f_{ijk}(0, 1, 1), f_{ijk}(0, 1, 0), f_{ijk}(1, 1, 0) \quad \forall i, j, k : i + j + k < n - 1, \\ & f_{ijk}(1, 0, 0), f_{ijk}(0, 1, 1), f_{ijk}(1, 1, 0), f_{ijk}(1, 0, 1) \quad \forall i, j, k : i + j + k < n - 1, \\ & f_{ijk}(1, 0, 0), f_{ijk}(0, 1, 1), f_{ijk}(1, 0, 1), f_{ijk}(0, 0, 1) \quad \forall i, j, k : i + j + k < n - 1, \\ & f_{ijk}(0, 1, 1), f_{ijk}(1, 0, 1), f_{ijk}(1, 1, 0), f_{ijk}(1, 1, 1) \quad \forall i, j, k : i + j + k < n - 2. \end{aligned}$$

Поскольку грани тетраэдров  $PMEV$  разбиты одинаково, вся область взаимодействия оказывается разбита структурированной сеткой из тетраэдров, называемой подсеткой. В равномерном случае количество узлов подсетки для внутренней вершины сетки равно  $(2n + 1)^3$ , а количество тетраэдров подсетки равно  $48n^3$ . На рис. 5 изображена подсетка в двумерном случае.

На подсетке вводится конечномерное пространство  $U^h$  непрерывных функций, линейных в каждом тетраэдре, которые тем самым могут быть заданы в узлах подсетки. Поставим задачу: зная значения  $p_1, \dots, p_s$  в узлах, совпадающих с точками  $P$ , найти функцию  $u^h \in U^h$ , которая задаст приближение давления  $u$  на подсетке и, следовательно, позволит вычислить поток через части граней, попавшие в область взаимодействия. Это можно сделать множеством способов. Основные требования к функции заключаются в том, чтобы она удовлетворяла локальному принципу максимума во внутренних точках, а также чтобы ее минимальное и максимальное значение совпадали с  $\min(p_1, \dots, p_s)$  и  $\max(p_1, \dots, p_s)$  в случае граничных условий непротекания.

Одним из вариантов такого построения является следующий. Рассмотрим тетраэдр  $PMEV$ . Его грани могут относиться к трем типам:

- 1) внутренние для области взаимодействия,
- 2) внешние к ней и внешние к резервуару,
- 3) внешние к области взаимодействия, но внутренние для резервуара.

Наша цель — задать граничные условия на границе области взаимодействия, поэтому грани первого типа нас не интересуют. На гранях второго типа условия уже заданы как условия на границе резервуара. Определим условия первого рода для граней третьего типа. Заметим, что такой гранью может быть только грань  $PME$ , так как любая грань, содержащая точку  $V$ , может относиться только к первым двум типам — либо найдется парный тетраэдр, содержащий эту грань, либо не найдется, и тогда  $V$  — граничный узел сетки, а грань тетраэдра составляет часть границы резервуара. Значение в точке  $P$  нам известно. Построим приближенные значения в точках  $M$  и  $E$ . Точка  $M$  является центром масс грани, которая принадлежит двум или одному блоку сетки. В случае двух блоков с центрами  $P_1$  и  $P_2$  значение в  $M$  вычисляется по формуле

$$u(M) = \frac{c_2 u(P_1) + c_1 u(P_2)}{c_1 + c_2}, \quad c_i = \|A_i^{-1} P_i M\|. \quad (6)$$

Когда же существует только один блок с центром  $P$ , то  $M$  принадлежит границе резервуара. В случае, когда на грани  $\Xi$ , содержащей  $M$ , заданы условия первого рода, значение  $u(M)$  определяется ими, а когда второго рода с заданным потоком  $\Phi$  — вычисляется по формуле

$$u(M) = u(P) + \frac{\Phi}{\text{mes}(\Xi)} (\mathbf{n}(\Xi), \mathbf{PM}). \quad (7)$$

Для задания значения в точке  $E$  можно воспользоваться взвешенным осреднением значений в точках  $M$ , которые лежат в тех же гранях, что и  $E$ :

$$u(E) = \frac{\sum_M \|ME\|^{-1} u(M)}{\sum_M \|ME\|^{-1}}. \quad (8)$$

После того как мы определили значения в точках  $P$ ,  $M$  и  $E$ , функцию можно линейно доопределить на весь треугольник  $PME$ .

Теперь, когда заданы граничные условия на области взаимодействия, нам достаточно численно найти приближение решения задачи  $\text{div } A \nabla u = 0$  в пространстве  $U^h$ , например методом конечных элементов [7]. Таким образом, полученная функция будет удовлетворять локальному принципу максимума и, следовательно, будет задавать качественно правильное распределение давления.

Обратимся к вычислению потоков. Части граней сетки, попавшие в область взаимодействия, могут быть представлены как объединение треугольников  $MEV$ , являющихся внутренними по отношению к области. Каждый такой треугольник, в свою очередь, разбит на  $n^2$  “маленьких” треугольников, являющихся внутренними гранями подсетки (рис. 4). Это означает, что для каждого “маленького” треугольника найдется два тетраэдра подсетки, которые его содержат. Для каждого из этих тетраэдров известна линейная функция  $u^h$ ; следовательно, можно вычислить поток  $\int_T (A \nabla u^h, \mathbf{n}) ds = \text{mes}(T) (A \nabla u^h, \mathbf{n})$  через рассматриваемый треугольник. Таким образом, поток через “маленький” треугольник можно определить как полусумму потоков, вычисленных относительно каждого из тетраэдров. Поток через часть грани складывается из потоков составляющих ее “маленьких” треугольников. Поток через полную грань равен сумме потоков через ее части, содержащиеся в областях взаимодействия четырех вершин.

Шаблоном метода пространственной аппроксимации по отношению к грани называется набор блоков  $V_{i_1}, \dots, V_{i_m}$  (или их центров), из которых используются значения параметров, входящих в формулу

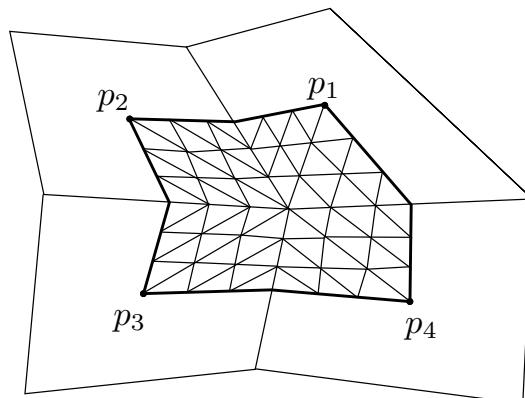


Рис. 5. Область взаимодействия с подсеткой

потока. В регулярном случае шаблон метода базисов связей содержит 10 точек, а шаблоны О-метода и метода подсеток состоят из 18 точек (рис. 6). Необходимо отметить, что на ортогональной сетке шаблоны метода базисов связей и О-метода вырождаются в двухточечные, совпадающие с шаблоном ТРФА, в то время как для метода подсеток он остается неизменным. Это обстоятельство влияет на скорость расчета, которую можно повысить, выбросив нулевые слагаемые, однако оно говорит в пользу метода подсеток, поскольку такое поведение лучше соответствует физической картине явления — поток через грань должен зависеть от всех значений в ее окрестности.

**6. Аспекты реализации метода подсеток.** Рассмотрим способ вычисления коэффициентов проводимости  $t_k$  для метода подсеток.

Для области взаимодействия параметрами, определяющими величину потоков, являются

- 1) значения функции  $p_1, \dots, p_s$  в узлах, совпадающих с точками  $P$ ,
- 2) значения функции  $b_1, \dots, b_{s_1}$  на гранях с граничными условиями Дирихле,
- 3) значения потоков  $\Phi_1, \dots, \Phi_{s_2}$  на гранях с граничными условиями Неймана.

Исходя из формул (6)–(8), можно утверждать, что значения функции  $u^h$  в узлах подсетки, соответствующих точкам  $P, M$  и  $E$ , линейно зависят от указанных параметров. Это же верно и для всех значений в граничных узлах первого рода, так как они линейно зависят от значений в точках  $P, M$  и  $E$  и величин  $b_1, \dots, b_{s_1}$ . Из этого следует, что решение  $u^h$  также зависит линейно от всех параметров, т.е.

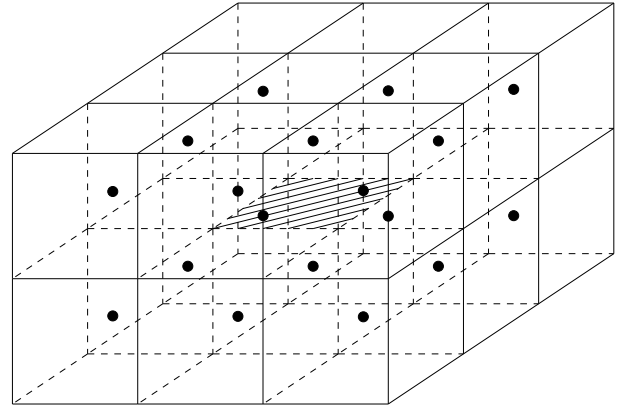


Рис. 6. Шаблон метода подсеток

$$u^h(x_i) = (u^h(p_1, \dots, p_s, b_1, \dots, b_{s_1}, \Phi_1, \dots, \Phi_{s_2}))(x_i) = u_{0,1}^h(x_i)p_1 + \dots + u_{0,s}^h(x_i)p_s + u_{1,1}^h(x_i)b_1 + \dots + u_{1,s_1}^h(x_i)b_{s_1} + u_{2,1}^h(x_i)\Phi_1 + \dots + u_{2,s_2}^h(x_i)\Phi_{s_2}, \quad (9)$$

где  $x_i$  — узел сетки. Таким образом, решение  $u^h$  полностью определяется функциями  $u_{j,k}^h \in U^h$ .

$$\text{Заметим, что } u^h = \begin{cases} u_{0,k}^h & \text{при } p_\alpha = \delta_\alpha^k, \quad b_\beta = 0, \quad \Phi_\gamma = 0, \\ u_{1,k}^h & \text{при } p_\alpha = 0, \quad b_\beta = \delta_\beta^k, \quad \Phi_\gamma = 0, \\ u_{2,k}^h & \text{при } p_\alpha = 0, \quad b_\beta = 0, \quad \Phi_\gamma = \delta_\gamma^k. \end{cases}$$

Это означает, что, решив  $s + s_1 + s_2$  линейных систем с правой частью, определяемой тем состоянием параметров, когда один из них равен единице, а все остальные — нулю, мы получим набор функций  $u_{j,k}^h$ , зависящих только от геометрии сетки.

Пусть нам теперь известна функция  $u^h \in U^h$  и требуется определить величину потока через часть каждой грани, попавшей в область взаимодействия. Для этого каждый треугольник подсетки на этапе ее построения помечается индексом грани сетки или нулем, если он не связан ни с одной гранью. Таким образом, для грани  $E_j$  можно определить множество  $T_j$  треугольников, которые составляют ее пересечение  $E_j^{(V)}$  с областью взаимодействия для узла сетки  $V$ . Для каждого  $t \in T_j, t = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ , в подсетке существует два тетраэдра  $\tau_1 = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{j_1})$  и  $\tau_2 = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{j_2})$ . Функция  $\nabla u^h|_{\tau_1}$  есть линейная комбинация с векторными коэффициентами от значений  $u_{i_1}^h, u_{i_2}^h, u_{i_3}^h, u_{j_1}^h$ , а функция  $\nabla u^h|_{\tau_2}$  — от значений  $u_{i_1}^h, u_{i_2}^h, u_{i_3}^h, u_{j_2}^h$ . Следовательно, поток через треугольник  $t$ , равный  $\Phi_t = \frac{1}{2}(A_{\tau_1} \nabla u^h|_{\tau_1} + A_{\tau_2} \nabla u^h|_{\tau_2}, \mathbf{n}_t)$ , где  $\mathbf{n}_t$  — нормаль к плоскости треугольника, определяемая нормалью  $\mathbf{n}$  грани  $E_j$ , есть линейная комбинация со скалярными коэффициентами от пяти значений  $u_{i_1}^h, u_{i_2}^h, u_{i_3}^h, u_{j_1}^h, u_{j_2}^h$ . Имеем

$$\Phi_{E_j^{(V)}} = \sum_{t \in T_j} \Phi_t = \sum_{i=1}^N c_i u_i^h = (\phi^{h,j,V}, u^h)_{U^h}, \quad (10)$$

где  $N$  — количество узлов сетки,  $\phi^{h,j,V}$  — некоторая функция из пространства  $U^h$ , а  $(\cdot, \cdot)_{U^h}$  — скалярное произведение функций из  $U^h$  как векторов из значений в узлах подсетки. Другими словами, для каждой грани  $E_j$  можно вычислить функцию  $\phi^{h,j,V}$ , которая зависит только от геометрии сетки, позволяющей вычислить поток через  $E_j^{(V)}$ .

Используя (9) и (10), получим

$$\int_{E_j^{(V)}} (A \nabla u, \mathbf{n}) ds \approx \sum_{i=1}^s (\phi^{h,j,V}, u_{0,i}^h)_{U_h} p_i + \sum_{i=1}^{s_1} (\phi^{h,j,V}, u_{1,i}^h)_{U_h} b_i + \sum_{i=1}^{s_2} (\phi^{h,j,V}, u_{2,i}^h)_{U_h} \Phi_i,$$

$$\int_{E_j} (A \nabla u, \mathbf{n}) ds = \sum_{V \in E_j} \int_{E_j^{(V)}} (A \nabla p, \mathbf{n}) ds \approx \sum_{k=1}^m t_k u_{i_k} + t_0,$$

где  $t_k$  составлены из  $(\phi^{h,j,V}, u_{0,i}^h)_{U_h}$ , а  $t_0$  — из  $(\phi^{h,j,V}, u_{1,i}^h)_{U_h} b_i$  и  $(\phi^{h,j,V}, u_{2,i}^h)_{U_h} \Phi_i$ . Представление коэффициентов проводимости в таком виде позволяет вычислить их до начала расчета по времени. Заметим, что  $t_0$  представляется набором коэффициентов перед  $b_i$  и  $\Phi_i$ , если граничные условия зависят от времени; в распространенном случае с условиями непротекания имеем  $t_0 = 0$ .

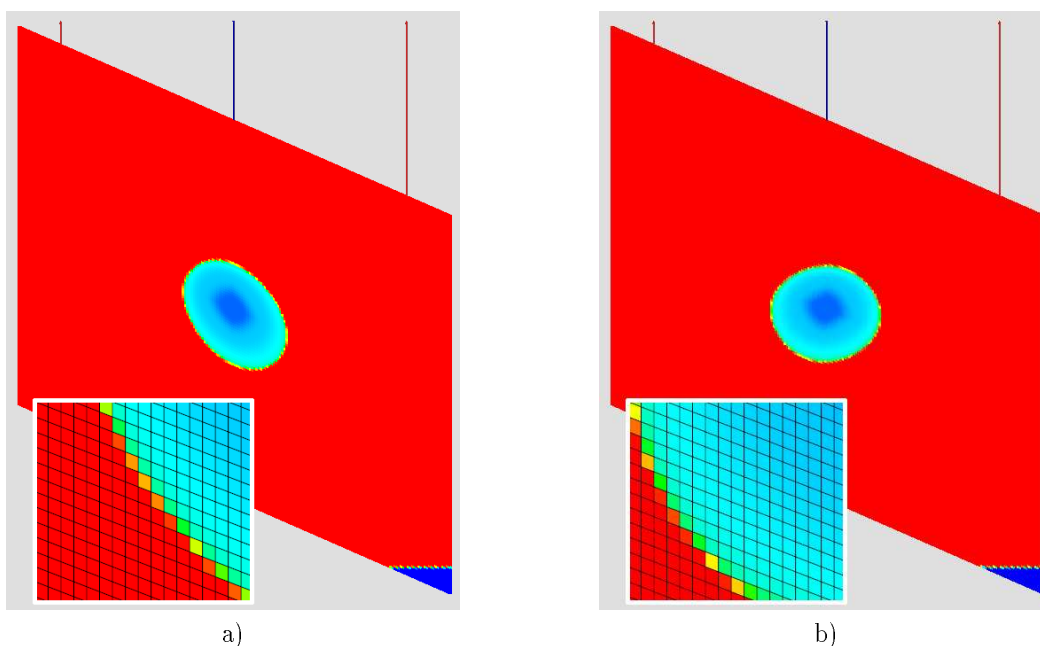


Рис. 7. Нефтенасыщенность в модели с параллелограммами: а) расчет методом TRFA, б) расчет методом MPFA

**7. Численные эксперименты.** Описанный многоточечный метод был реализован в составе российского промышленного гидродинамического симулятора tNavigator и протестирован на параллельной ЭВМ с двумя двухъядерными процессорами.

Для иллюстрации погрешности двухточечной аппроксимации на неортогональных сетках рассмотрим синтетическую модель с квазиравномерной сеткой, блоки которой в сечении плоскостью, параллельной плоскости  $Oxz$ , являются параллелограммами. В модели участвуют одна нагнетательная скважина, которая закачивает воду с постоянной скоростью в центр резервуара, и две добывающих, которые выкачивают жидкость, стабилизируя тем самым среднее давление. На срезе функции насыщенности нефти видно, что фронт распространения изменений при расчете многоточечным методом близок к окружающей, тогда как двухточечный дает эллипс, ось которого наклонена вдоль характерного искривления сетки, что противоречит физической картине течения (рис. 7). Результаты расчетов различными методами MPFA на этой модели оказались близки друг к другу.

Для сравнения качества методов MPFA проводилось исследование коэффициентов  $t_k$ . Первый критерий их корректности  $\sum_{k=1}^m t_k = 0$  относится к случаю, когда все значения давления в блоках  $V_{i_k}$  равны.

Второй критерий определен для граней, делящих область на две подобласти, между которыми отсутствует какая-либо связь, кроме как через эту грань. Ясно, что при повышении давления в блоке одной подобласти поток через грань будет повышаться, а при повышении давления в блоке другой подобласти — будет понижаться. Это означает, что каждый коэффициент  $t_k$  должен иметь строго определенный положением соответствующего блока знак.



Проводилась серия экспериментов, в каждом из которых произвольным образом формировалась корректная область взаимодействия, после чего вычислялись коэффициенты проводимости для каждого из трех методов (метода базисов связей, O-метода и метода подсеток). Оказалось, что все методы удовлетворяют первому критерию, а второму критерию удовлетворяет только метод подсеток (т.е. для других методов нашлись такие подобласти, на которых коэффициенты  $t_k$  не удовлетворяют второму критерию).

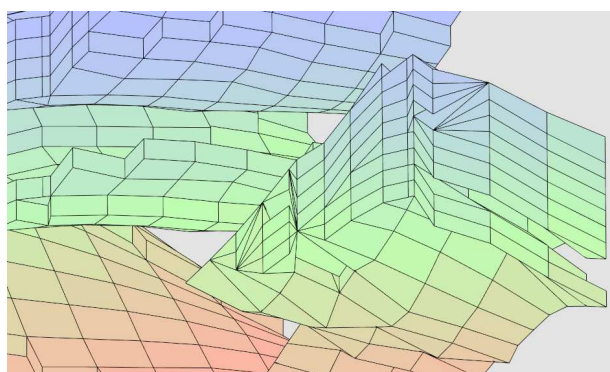


Рис. 8. Пример сетки реального месторождения

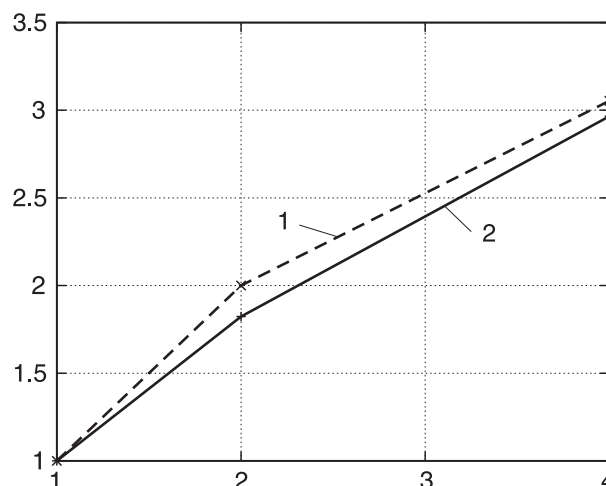


Рис. 9. График ускорения расчета от количества ядер: 1 — TRFA, 2 — MPFA

Метод подсеток был протестирован на реальных месторождениях, содержащих несколько миллионов блоков (рис. 8). Замедление по сравнению с расчетом TRFA-методом составляет от двух до четырех раз в зависимости от сложности модели. Относительное ускорение расчета при использовании MPFA-подсетки на многоядерной архитектуре в целом повторяет ускорение расчета по TRFA-методу (рис. 9). Различие значений ускорения во многом обусловлено этапом инициализации модели, который в данный момент не является параллельным.

**8. Заключение.** Результаты численных экспериментов показывают, что предложенный метод позволяет решить проблемы корректной аппроксимации потока и ориентационного эффекта для задачи фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде в случае неортогональных сеток или (и) недиагонального тензора абсолютной проницаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aavatsmark I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids // Computational Geosciences. 2002. **6**, N 3, 4. 405–432.
2. Aavatsmark I., Barkve T., Boe O., Mannseth T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the methods // SIAM J. on Scientific Computing. 1998. **19**. 1700–1716.
3. Aavatsmark I., Barkve T., Boe O., Mannseth T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part II: Discussion and numerical results // SIAM J. on Scientific Computing. 1998. **19**. 1717–1736.
4. Aziz K., Settari A. Petroleum reservoir simulation. London: Applied Science Publishers, 1979.
5. Nordbotten J.M., Aavatsmark I. Monotonicity conditions for control volume methods on uniform parallelogram grids in homogeneous media // Computational Geosciences. 2005. **9**, N 1. 61–72.
6. Zhangxin C., Guanren H., Yuanle M. Computational methods for multiphase flows in porous media. Philadelphia: SIAM, 2006.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
8. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одном алгоритме решения уравнения теплопроводности на неортогональных сетках // Дифференциальные уравнения. 1985. **XXI**, № 7. 1273–1276.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию  
03.05.2008