

УДК 517.955.2

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
В ТРЕХМЕРНОМ ЦИЛИНДРЕ**

А. Н. Демидова¹, Я. М. Жилейкин²

Предложены и обоснованы условия устойчивости решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца по начальным данным в зависимости от спектрального состава начальных функций и их погрешностей. Задача рассматривается в трехмерном полубесконечном цилиндре. Изучена устойчивость конечно-разностной схемы по начальным данным, предназначенной для численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном цилиндре с прямоугольным сечением. Получены ограничения на шаги разностной схемы, обеспечивающие ее устойчивость. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00285).

1. Введение. Линейные и нелинейные волновые процессы играют важную роль в различных областях физики и техники. Многие из них описываются волновыми уравнениями. Если закон колебаний физической среды гармонически зависит от времени, то волновое уравнение можно преобразовать к уравнению Гельмгольца.

При исследовании ряда волновых задач возникает необходимость решать задачу Коши для уравнения Гельмгольца. Однако в общем случае такая задача для эллиптических уравнений является некорректно поставленной из-за неустойчивости решения [1]. Это обуславливает особую значимость вопроса выяснения условий устойчивости решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца [2].

В настоящей статье выполнен анализ зависимости устойчивости решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном полубесконечном цилиндре от спектрального состава начальных функций и функций погрешности, а также исследуется устойчивость по начальным данным конечно-разностной схемы, используемой для численного решения задачи Коши.

Выбор цилиндра в качестве области решения обусловлен тем, что задачи о распространении оптических пучков в нелинейных средах часто решаются именно в такой области.

2. Анализ устойчивости задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном полубесконечном цилиндре. Пусть G — трехмерный полубесконечный цилиндр:

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_2, z > 0\},$$

где G_2 — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ . Рассмотрим в области G задачу Коши для уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 A = 0, \quad (x, y, z) \in G; \tag{1}$$

$$A = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad z > 0; \quad A(x, y, 0) = A_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = A_1(x, y), \quad (x, y) \in G_2.$$

Решение задачи Коши для уравнения Гельмгольца неустойчиво в том случае, когда при заданной начальной погрешности, не превосходящей ε_0 , погрешность решения задачи возрастает с ростом z . Решение задачи Коши устойчиво, когда погрешность решения ограничена некоторой константой, умноженной на ε_0 .

Проведем анализ устойчивости решения задачи Коши (1) в зависимости от спектра начальных функций и спектра погрешностей. Для этого используем метод Фурье.

Решение задачи (1) будем искать в виде разложения

$$A(x, y, z) = \sum_j A_j(z) u_j(x, y) \tag{2}$$

¹ Институт криптографии, связи и информатики, Мичуринский просп., 70, 117602, Москва; e-mail: alyona_demidova@mail.ru

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва; e-mail: jam@srcc.msu.ru

по собственным функциям задачи

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} u_j(x, y) + \lambda_j u_j(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in G_2, \\ \Delta_{\perp} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad u_j(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Здесь u_j и λ_j , $j = 1, \dots$, — собственные функции и собственные значения. Будем называть $\{A_j(z)\}$ спектром решения $A(x, y, z)$.

Для вычисления $A_j(z)$ получаем задачу Коши

$$\frac{d^2 A_j}{dz^2} - \lambda_j A_j + k^2 A_j = 0, \quad A_j|_{z=0} = A_j^0, \quad \left. \frac{dA_j}{dz} \right|_{z=0} = A_j^1, \quad j = 1, \dots, \quad (3)$$

где A_j^0 и A_j^1 — коэффициенты разложения функций $A_0(x, y)$ и $A_1(x, y)$ по собственным функциям $\{u_j\}$.

Общее решение уравнения в задаче (3) имеет вид

$$A_j = \begin{cases} c_j^{(1)} e^{-iz\sqrt{k^2-\lambda_j}} + c_j^{(2)} e^{iz\sqrt{k^2-\lambda_j}}, & \lambda_j < k^2, \\ c_j^{(1)} e^{-z\sqrt{\lambda_j-k^2}} + c_j^{(2)} e^{z\sqrt{\lambda_j-k^2}}, & \lambda_j > k^2, \\ c_j^{(1)} + c_j^{(2)} z, & \lambda_j = k^2. \end{cases} \quad (4)$$

Определим решение задачи (3) следующим образом:

$$A_j = \begin{cases} A_j^0 e^{-iz\sqrt{k^2-\lambda_j}}, & \lambda_j < k^2, \\ A_j^0 e^{-z\sqrt{\lambda_j-k^2}}, & \lambda_j > k^2, \\ A_j^0, & \lambda_j = k^2. \end{cases}$$

При $\lambda_j > k^2$ и $\lambda_j = k^2$ такой выбор A_j обуславливается условием невозрастания решения при $z \rightarrow \infty$, а при $\lambda_j < k^2$ — выделением волны, распространяющейся в положительном направлении оси z (“волна+”).

Следовательно, чтобы выделить решение “волна+” уравнения Гельмгольца, коэффициенты A_j^1 должны удовлетворять условию $A_j^1 = \beta_j A_j^0$, где $\beta_j = \begin{cases} -i\sqrt{k^2-\lambda_j}, & \lambda_j \leq k^2 \\ -\sqrt{\lambda_j-k^2}, & \lambda_j > k^2. \end{cases}$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть погрешности начальных функций $\varepsilon_0(x, y)$ и $\varepsilon_1(x, y)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\varepsilon_0(x, y)$ и $\varepsilon_1(x, y)$ — ограничены;
- 2) в спектре функций $\varepsilon_0(x, y)$ и $\varepsilon_1(x, y)$ компоненты $\varepsilon_j^{(0)} = 0$, $\varepsilon_j^{(1)} = 0$ при любом j , для которого $\lambda_j > M$, где $0 < M < k^2$.

Тогда решение задачи Коши (1) устойчиво.

Доказательство. Пусть начальные условия заданы с погрешностью: $\tilde{A}_0(x, y) = A_0(x, y) + \varepsilon_0(x, y)$, $\tilde{A}_1(x, y) = A_1(x, y) + \varepsilon_1(x, y)$. Тогда для вычисления коэффициентов $\tilde{c}_j^{(1)}$ и $\tilde{c}_j^{(2)}$ в (4) получаем следующие системы:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)} &= A_j^0 + \varepsilon_j^{(0)}, & \beta_j \tilde{c}_j^{(1)} - \beta_j \tilde{c}_j^{(2)} &= \beta_j A_j^0 + \varepsilon_j^{(1)} & \text{при } \lambda_j \leq M, \\ \tilde{c}_j^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)} &= A_j^0, & \beta_j \tilde{c}_j^{(1)} - \beta_j \tilde{c}_j^{(2)} &= \beta_j A_j^0 & \text{при } \lambda_j > M. \end{aligned}$$

Решения этих систем имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j^{(1)} &= A_j^0 + \frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} + \frac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2-\lambda_j}}, & \tilde{c}_j^{(2)} &= \frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} - \frac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2-\lambda_j}} & \text{при } \lambda_j \leq M, \\ \tilde{c}_j^{(1)} &= A_j^0, & \tilde{c}_j^{(2)} &= 0 & \text{при } \lambda_j > M. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты $\tilde{A}_j(z)$ в разложении (2) функции $\tilde{A}(x, y, z)$ представляются следующим

образом:

$$\tilde{A}_j(z) = \begin{cases} \left(A_j^0 + \frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} + \frac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2 - \lambda_j}} \right) e^{-iz\sqrt{k^2 - \lambda_j}} + \left(\frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} - \frac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2 - \lambda_j}} \right) e^{iz\sqrt{k^2 - \lambda_j}} & \text{при } \lambda_j \leq M, \\ A_j^0 e^{-iz\sqrt{k^2 - \lambda_j}} & \text{при } M < \lambda_j < k^2, \\ A_j^0 & \text{при } \lambda_j = k^2, \\ A_j^0 e^{-z\sqrt{\lambda_j - k^2}} & \text{при } \lambda_j > k^2. \end{cases}$$

Оценим квадрат нормы разности функций $\tilde{A}(x, y, z)$ и $A(x, y, z)$:

$$\|\tilde{A} - A\|^2 = \sum_j |\tilde{A}_j - A_j|^2 = \sum_{\lambda_j \leq M} |\tilde{A}_j - A_j|^2 + \sum_{\lambda_j > M} |\tilde{A}_j - A_j|^2 \leq \sum_{\lambda_j \leq M} \left(|\varepsilon_j^{(0)}|^2 + \frac{|\varepsilon_j^{(1)}|^2}{k^2 - \lambda_j} \right).$$

По условию теоремы погрешности $\varepsilon_0(x, y)$ и $\varepsilon_1(x, y)$ ограничены: $\|\varepsilon_0\|^2 \leq l_1$ и $\|\varepsilon_1\|^2 \leq l_2$, где l_1 и l_2 — некоторые константы и норма понимается в смысле пространства L^2 . Таким образом, имеем

$$\|\tilde{A} - A\|^2 \leq \|\varepsilon\|^2, \quad \text{где } \frac{1}{2}\|\varepsilon\|^2 = \max \left\{ l_1^2, \frac{l_2^2}{a} \right\}, \quad a = \begin{cases} k^2 - M & \text{при } k^2 - M < 1, \\ 1 & \text{при } k^2 - M \geq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Из оценки (5) следует, что решение задачи Коши (1) устойчиво. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть в спектре погрешности начальной функции $\varepsilon_0(x, y)$ существует хотя бы одно j , такое, что $\varepsilon_j^{(0)} \neq 0$, а $\lambda_j > k^2$. Тогда решение задачи Коши (1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть у начальной функции $A_0(x, y)$ спектр погрешности $\varepsilon_0(x, y)$ состоит из одной j^* -й компоненты, т.е. $\varepsilon_{j^*}^{(0)} \neq 0$, $\lambda_{j^*} > k^2$, а при всех остальных j выполнено $\varepsilon_j^{(0)} = 0$. Тогда для вычисления коэффициентов $\tilde{c}_j^{(1)}$ и $\tilde{c}_j^{(2)}$ в (4) получаем системы

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)} &= A_j^0 + \varepsilon_j^{(0)}, & \beta_j \tilde{c}_j^{(1)} - \beta_j \tilde{c}_j^{(2)} &= \beta_j A_j^0 & \text{при } j = j^*, \\ \tilde{c}_j^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)} &= A_j^0, & \beta_j \tilde{c}_j^{(1)} - \beta_j \tilde{c}_j^{(2)} &= \beta_j A_j^0 & \text{при остальных } j. \end{aligned}$$

Решения этих систем имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j^{(1)} &= A_j^0 + \frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}, & \tilde{c}_j^{(2)} &= \frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} & \text{при } j = j^*, \\ \tilde{c}_j^{(1)} &= A_j^0, & \tilde{c}_j^{(2)} &= 0 & \text{при остальных } j. \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты $\tilde{A}_j(z)$ в разложении (2) функции $\tilde{A}(x, y, z)$ приобретают вид

$$\tilde{A}_j(z) = \begin{cases} \left(A_j^0 + \frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} \right) e^{-z\sqrt{\lambda_j - k^2}} + \frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} e^{z\sqrt{\lambda_j - k^2}} & \text{при } j = j^*, \\ A_j^0 e^{-iz\sqrt{k^2 - \lambda_j}} & \text{при } \lambda_j < k^2, \\ A_j^0 & \text{при } \lambda_j = k^2, \\ A_j^0 e^{-z\sqrt{\lambda_j - k^2}} & \text{при } \lambda_j > k^2. \end{cases}$$

Оценим квадрат нормы разности функций $\tilde{A}(x, y, z)$ и $A(x, y, z)$:

$$\|\tilde{A} - A\|^2 = \sum_j |\tilde{A}_j - A_j|^2 = |\tilde{A}_{j^*} - A_{j^*}|^2 = \frac{|\varepsilon_{j^*}^{(0)}|^2}{4} \left(e^{-z\sqrt{\lambda_{j^*} - k^2}} + e^{z\sqrt{\lambda_{j^*} - k^2}} \right)^2 \geq \frac{|\varepsilon_{j^*}^{(0)}|^2}{4} e^{2z\sqrt{\lambda_{j^*} - k^2}}. \quad (6)$$

Из оценки (6) следует, что погрешность решения экспоненциально возрастает по z . Следовательно, решение задачи Коши (1) неустойчиво. Что и требовалось доказать.

3. Анализ устойчивости численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца.

В работе [3] было проведено исследование устойчивости численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Задача Коши рассматривалась для канала двумерного пространства.

Проведем анализ устойчивости численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном цилиндре с прямоугольным сечением.

Пусть область G_2 — прямоугольник $\{0 < x < l_x, 0 < y < l_y\}$ с границей Γ . В области $G = G_2 \times (0, Z]$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 A &= 0, \quad (x, y, z) \in G, \\ A(x, y, 0) &= g(x, y), \quad \left. \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = g_1(x, y), \quad (x, y) \in G_2, \\ A(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma \times (0, Z]. \end{aligned}$$

Введем функцию v следующим образом: $A = ve^{-ikz}$. Тогда для v получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, \quad (x, y, z) \in G, \\ v(x, y, 0) &= g(x, y), \quad \left. \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = f(x, y), \quad (x, y) \in G_2, \\ v(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma \times (0, Z]. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем сетку Ω_h по переменным x и y :

$$\Omega_h = \{(x_l, y_j) \mid x_l = lh_x, y_j = jh_y, l = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y, h_x N_x = l_x, h_y N_y = l_y\}.$$

Множество точек сетки Ω_h , принадлежащих Γ , обозначим γ_h , а множество внутренних точек — ω_h . Тогда $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$. По переменной z введем равномерную сетку $\omega_z = \{z_n = nh_z, n = 0, \dots, N_z, N_z h_z = Z\}$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} u_{lj}^n &= u(x_l, y_j, z_n), \quad u_{\bar{z},lj}^n = \frac{u_{lj}^{n+1} - 2u_{lj}^n + u_{lj}^{n-1}}{h_z^2}, \quad u_{\hat{z},lj}^n = \frac{u_{lj}^{n+1} - u_{lj}^{n-1}}{2h_z}, \\ \Lambda u_{lj}^n &= u_{\bar{x},lj}^n + u_{\bar{y},lj}^n = \frac{u_{l+1,j}^n - 2u_{lj}^n + u_{l-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{l,j+1}^n - 2u_{lj}^n + u_{l,j-1}^n}{h_y^2}. \end{aligned}$$

Дифференциальную задачу (7) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{aligned} u_{\bar{z},lj}^n - 2ik u_{\hat{z},lj}^n + \frac{1}{2} (\Lambda u_{lj}^{n-1} + \Lambda u_{lj}^{n+1}) &= 0, \quad l = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y - 1, n = 1, \dots, N_z - 1, \\ u_{lj}^0 &= g(x_l, y_j) = g_{lj}, \quad u_{lj}^1 = \varphi(x_l, y_j) = \varphi_{lj}, \quad (x_l, y_j) \in \Omega_h, \\ u_{lj}^n &= 0, \quad (x_l, y_j) \in \gamma_h, \quad n = 1, \dots, N_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Проведем исследование устойчивости задачи (8) методом Фурье. Для этого рассмотрим задачу на собственные значения для пятиточечного разностного оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} u_{\bar{x},lj} + u_{\bar{y},lj} + \lambda u_{lj} &= 0, \quad (x_l, y_j) \in \omega_h, \\ u_{lj} &= 0, \quad (x_l, y_j) \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Собственными значениями и собственными функциями пятиточечного разностного оператора Лапласа являются $\lambda_m = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi m_x h_x}{2l_x} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi m_y h_y}{2l_y}$ и $\mu(x_l, y_j) = \frac{2}{\sqrt{l_x l_y}} \sin \frac{\pi m_x x_l}{l_x} \sin \frac{\pi m_y y_j}{l_y}$ соответственно, где $m = (m_x, m_y)$, $m_x = 1, \dots, N_x - 1$, $m_y = 1, \dots, N_y - 1$. Решение задачи (8) можно представить в виде

$$u(x_l, y_j, z_n) = \sum_{m=1}^M a_m(z_n) \mu(x_l, y_j), \quad \text{где } M = (N_x - 1)(N_y - 1). \quad (9)$$

Обозначим $a_m^n = a_m(z_n)$. Тогда для вычисления a_m^n получим следующее разностное уравнение:

$$\left(1 - ikh_z - \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right) a_m^{n+1} - 2a_m^n + \left(1 + ikh_z + \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right) a_m^{n-1} = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $a_m^n = c_m q^n$. Для q получаем уравнение

$$\left(1 - ikh_z - \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right) q^2 - 2q + \left(1 + ikh_z + \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right) = 0. \tag{10}$$

Обозначим $D = \lambda_m - (k^2 + \lambda_m^2 h_z^2/4)$. Пусть λ_m такое, что $D \leq 0$; тогда решение уравнения (10) имеет вид $q_m = \frac{1 \pm ih_z \sqrt{|D|}}{1 - ikh_z - \lambda_m h_z^2/2}$. Комплексные числа q_{1m} и q_{2m} запишем в показательной форме

$$q_{1m} = e^{i\psi_{1m}}, \quad \text{где } \psi_{1m} = \arctg \frac{kh_z + (1 - \lambda_m h_z^2/2)h_z \sqrt{|D|}}{1 - \lambda_m h_z^2/2 + kh_z^2 \sqrt{|D|}},$$

$$q_{2m} = e^{i\psi_{2m}}, \quad \text{где } \psi_{2m} = \arctg \frac{kh_z - (1 - \lambda_m h_z^2/2)h_z \sqrt{|D|}}{1 - \lambda_m h_z^2/2 + kh_z^2 \sqrt{|D|}}.$$

Пусть λ_m такое, что $D > 0$; тогда $q_m = \frac{1 \pm h_z \sqrt{|D|}}{1 - ikh_z - \lambda_m h_z^2/2}$. В показательной форме числа q_{1m} и q_{2m} представляются в виде $q_{1m} = \rho_{1m} e^{i\psi_m}$ и $q_{2m} = \rho_{2m} e^{i\psi_m}$, где

$$\rho_{1m} = \frac{\sqrt{1 + h_z \sqrt{D}}}{\sqrt{1 - h_z \sqrt{D}}}, \quad \rho_{2m} = \frac{\sqrt{1 - h_z \sqrt{D}}}{\sqrt{1 + h_z \sqrt{D}}}, \quad \psi_m = \arctg \frac{kh_z}{1 - \lambda_m h_z^2/2}.$$

Общее решение имеет вид

$$a_m^n = \begin{cases} c_m^{(1)} e^{i\psi_{1m} n} + c_m^{(2)} e^{i\psi_{2m} n} & \text{при } D \leq 0, \\ c_m^{(1)} \rho_{1m}^n e^{i\psi_m n} + c_m^{(2)} \rho_{2m}^n e^{i\psi_m n} & \text{при } D > 0. \end{cases}$$

В решении (9) задачи (8) для a_m^n выберем следующие значения:

$$a_m^n = \begin{cases} g_m e^{i\psi_{2m} n} & \text{при } D \leq 0, \\ g_m \rho_{2m}^n e^{i\psi_m n} & \text{при } D > 0. \end{cases}$$

Здесь $g_m = (g, \mu_m)$ — коэффициент Фурье функции $g(x_l, y_j)$. При $D > 0$ такой выбор значений a_m^n обусловливается условием невозрастания решения при увеличении n , а при $D \leq 0$ — выделением волны, распространяющейся в положительном направлении оси z .

Таким образом, рассматривается частный случай задачи Коши, когда для выделения решения “волна+” начальная функция $\varphi(x_l, y_j)$ должна удовлетворять условию $\varphi_m = e^{i\psi_{2m}} g_m$, где g_m и φ_m — коэффициенты Фурье функций $g(x_l, y_j)$ и $\varphi(x_l, y_j)$ соответственно.

Исследуем вопрос об устойчивости разностной схемы (8) по начальным данным. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Если для всех t выполняется неравенство $D \leq 0$, то разностная схема (8) устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Оценим норму функции u^{n+1} в дискретном пространстве L_2^h . В силу ортонормированности базиса $\{\mu_m\}$ получаем

$$\|u^{n+1}\|^2 = \sum_{l=1}^{N_x-1} h_x \sum_{j=1}^{N_y-1} h_y |u_{lj}^{n+1}|^2 = \sum_{m=1}^M |a_m^{n+1}|^2 = \sum_{m=1}^M |e^{i\psi_{2m}}|^2 |g_m e^{i\psi_{2m} n}|^2;$$

следовательно, $\|u^{n+1}\| \leq \max_m |e^{i\psi_{2m}}| \|u^n\|$. Так как $|e^{i\psi_{2m}}| = 1$ при любом m , то

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|. \tag{11}$$

На основании (11) получаем $\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| \leq \|u^{n-1}\| \leq \dots \leq \|u^0\|$. Это означает устойчивость схемы (8) по начальным данным в норме пространства L_2^h . Что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Если существует хотя бы одно значение m , при котором $D > 0$, то разностная схема (8) неустойчива по начальным данным.*

Доказательство. Пусть начальные функции g и φ заданы с погрешностью

$$\tilde{u}_{ij}^0 = g_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(0)}, \quad \tilde{u}_{ij}^1 = \varphi_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(1)}.$$

Предположим, что при некотором m^* выполняется неравенство $D > 0$. Тогда для коэффициентов $\tilde{c}_{m^*}^{(1)}$ и $\tilde{c}_{m^*}^{(2)}$ получаем систему

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{m^*}^{(1)} + \tilde{c}_{m^*}^{(2)} &= g_{m^*} + \varepsilon_{m^*}^{(0)}, \\ \tilde{c}_{m^*}^{(1)} \rho_{1m^*} e^{i\psi_{m^*}} + \tilde{c}_{m^*}^{(2)} \rho_{2m^*} e^{i\psi_{m^*}} &= g_{m^*} \rho_{2m^*} e^{i\psi_{m^*}} + \varepsilon_{m^*}^{(1)}. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\tilde{c}_{m^*}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{m^*}^{(0)} \rho_{2m^*}}{\rho_{2m^*} - \rho_{1m^*}} - \frac{\varepsilon_{m^*}^{(1)} e^{-i\psi_{m^*}}}{\rho_{2m^*} - \rho_{1m^*}}, \quad \tilde{c}_{m^*}^{(2)} = g_{m^*} + \frac{\varepsilon_{m^*}^{(0)} \rho_{1m^*}}{\rho_{1m^*} - \rho_{2m^*}} - \frac{\varepsilon_{m^*}^{(1)} e^{-i\psi_{m^*}}}{\rho_{1m^*} - \rho_{2m^*}}.$$

Справедлива оценка

$$|\tilde{a}_{m^*}^n - a_{m^*}^n| = |\tilde{c}_{m^*}^{(1)} \rho_{1m^*}^n + \delta_{m^*} \rho_{2m^*}^n| \geq |\tilde{c}_{m^*}^{(1)}| \rho_{1m^*}^n - |\delta_{m^*}|,$$

где $\delta_{m^*} = \frac{\varepsilon_{m^*}^{(1)} e^{-i\psi_{m^*}} - \varepsilon_{m^*}^{(0)} \rho_{1m^*}}{\rho_{2m^*} - \rho_{1m^*}}$. Оценим норму функции $\tilde{u}^n - u^n$ в пространстве L_2^h . Из (9) в силу ортонормированности базиса $\{\mu_m\}$ получаем

$$\|\tilde{u}^n - u^n\| = \sqrt{\sum_{m=1}^M |\tilde{a}_m^n - a_m^n|^2} \geq |\tilde{a}_{m^*}^n - a_{m^*}^n| \geq |\tilde{c}_{m^*}^{(1)}| \rho_{1m^*}^n - |\delta_{m^*}|.$$

Так как $\rho_{1m^*} > 1$, то из последнего неравенства следует, что с ростом n увеличивается погрешность решения, т.е. разностная схема (8) неустойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Проанализируем устойчивость разностной схемы (8) по начальным данным в зависимости от величин h_z, h_x, h_y . Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. *Если $h_z > 1/k$, $0 < h_x < \infty$, $0 < h_y < \infty$, то разностная схема (8) устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Рассмотрим D как функцию от λ_m : $D(\lambda_m) = \lambda_m - \left(k^2 + \frac{\lambda_m^2 h_z^2}{4}\right)$. Корнями этого трехчлена являются $\lambda_m = \frac{2}{h_z} (1 \pm \sqrt{1 - k^2 h_z^2})$. Если $h_z > \frac{1}{k}$, то $h_z k > 1$; следовательно, многочлен $D(\lambda_m)$ не имеет действительных корней и $D(\lambda_m) < 0$ для любого λ_m . Тогда из теоремы 3 следует, что разностная схема (8) устойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда $l_x = l_y = l$, $h_x = h_y = h$, $N_x = N_y = N$.

Теорема 6. *Если $h > \frac{2\sqrt{2}}{k}$, $0 < h_z < \infty$, то разностная схема (8) устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Так как $h > \frac{2\sqrt{2}}{k}$, то $k^2 > \frac{8}{h^2}$. Для любого собственного значения λ_m справедливо неравенство $\lambda_m < \frac{8}{h^2}$. Отсюда следует, что $k^2 > \lambda_m$. Из этого неравенства вытекает, что $k^2 + \frac{\lambda_m^2 h_z^2}{4} > \lambda_m$. Следовательно, $D(\lambda_m) < 0$ при любом λ_m . Тогда из теоремы 3 следует, что разностная схема (8) устойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Если $h_z < \frac{4\pi}{(\pi^2 + 4)k}$ и $h \leq \frac{\pi h_z}{\sqrt{2}}$, то разностная схема (8) неустойчива по начальным данным.*

Доказательство. Рассмотрим $\bar{m} = m_x = m_y$, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{l \sqrt{1 - \sqrt{1 - k^2 h_z^2}}}{2h_z} \leq \bar{m} \leq \frac{l \sqrt{1 + \sqrt{1 - k^2 h_z^2}}}{\pi h_z}.$$

Из условий теоремы следует, что такое значение \overline{m} существует. Можно показать, что для соответствующего $\lambda_{\overline{m}}$ выполняются неравенства

$$\frac{2(1 - \sqrt{1 - k^2 h_z^2})}{h_z^2} \leq \lambda_{\overline{m}} \leq \frac{2(1 + \sqrt{1 - k^2 h_z^2})}{h_z^2}. \quad (12)$$

Левая и правая части в (12) — корни многочлена $D(\lambda_m)$. Из неравенства (12) вытекает, что $D(\lambda_{\overline{m}}) > 0$. Тогда из теоремы 4 следует, что разностная схема (8) неустойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Из результатов анализа устойчивости численного решения задачи Коши следует, что при указанном соотношении между шагами разностной схемы рассматриваемая задача устойчива и может быть решена конечно-разностными методами. Главную роль в этом случае играет разностная аппроксимация дифференциальной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.М.* О постановке некоторых некорректных задач математической физики // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1966. 258–276.
2. *Звадский В.Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972.
3. *Барановская М.А., Жилейкин Я.М.* Численное решение задачи Коши для уравнения Гельмгольца // Математические методы решения задач волновой физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 44–51.

Поступила в редакцию
16.04.2008
