

УДК 519.6

## О ЯДРЕ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ГРАДИЕНТА

Е. А. Муравлева<sup>1</sup>

При решении задачи Стокса на полуразнесенных сетках возникает дискретный аналог оператора градиента, обладающий нетривиальным ядром. Это может приводить к потере точности дискретного решения и трудностям итерационного решения задачи. Один из подходов к построению эффективных численных методов на полуразнесенных сетках предполагает, что структура ядра оператора градиента известна. В данной работе конструктивно построена система линейно независимых функций из ядра дискретного градиента для двумерного и трехмерного случаев. Результаты численных экспериментов позволяют предположить, что найденная система образует базис ядра.

**1. Введение.** Распространенным методом решения задачи Стокса, возникающей в гидродинамике, служат алгоритмы типа Узавы, основная идея которых заключается в разделении физических переменных. Одну из искоемых переменных (скорость) можно выразить через другую (давление). Таким образом, решение задачи сводится к решению вспомогательной подсистемы с последующим определением недостающей компоненты решения (скорости). При дискретизации дифференциальной задачи для оператора градиента, входящего в уравнение Стокса, может быть применен четырехточечный шаблон, использующий разности второго порядка. Такой подход обеспечивает высокую точность аппроксимации, но он же порождает ряд дополнительных трудностей. Если у дифференциального оператора градиента ядро одномерно (константа) и при использовании схем первого порядка точности оно так же остается одномерным, то в данном случае у дискретного оператора градиента размерность ядра возрастает. Это приводит к вырожденности матрицы вспомогательной подсистемы. Следовательно, применять традиционно используемые итерационные методы затруднительно, так как они рассчитаны на системы с невырожденными матрицами [4]. Отметим, что рассматриваемая в статье разностная схема имеет много общего с хорошо известным Q1-P0 методом конечных элементов для задачи Стокса — на равномерной сетке возникающие шаблоны операторов градиента совпадают с точностью до множителя. Структура ядра и остальных собственных функций оператора давления для Q1-P0 метода хорошо изучена в двумерном случае [5, 6]. Эта информация используется для построения дискретизаций на основе Q1-P0 конечных элементов и итерационных методов решения возникающих систем алгебраических уравнений [7]. В трехмерном случае о размерности и структуре ядра известно существенно меньше. Цель настоящей статьи — восполнить данный пробел. В качестве метода дискретизации в статье используются конечные разности.

Рассмотрим в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  стационарную первую краевую задачу для уравнений Стокса в безразмерных переменных скорость–давление:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{f} & \text{в } & \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{в } & \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 & \text{на } & \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\mathbf{f}(x, y)$  — заданный вектор массовых сил. Неизвестными в этой задаче являются вектор-функция  $\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y))$  (скорость жидкости) и скалярная функция  $p = p(x, y)$  (давление).

Перейдем к дискретной задаче. Определим следующие сеточные области:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) : i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ x_{ij} = \left( \left( i + \frac{1}{2} \right) h_1, \left( j + \frac{1}{2} \right) h_2 \right); i = 0, \dots, N_1 - 1, j = 0, \dots, N_2 - 1 \right\}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: catmurav@gmail.com

Пусть  $U_h$  — линейное пространство вектор-функций, определенных на  $\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1$  и удовлетворяющих на сеточных границах граничным условиям,  $P_h$  — пространство функций, определенных на  $\Omega_2$ . О дополнительных ограничениях на функции будет сказано ниже. В индексных обозначениях можно записать  $U_h = V_{1,h} \times V_{2,h}$ , где

$$\begin{aligned} V_{1,h} &= \{u_{ij} = u(x_{ij}), x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, u_{0,j} = u_{N_1,j} = u_{i,0} = u_{i,N_2} = 0\}, \\ V_{2,h} &= \{v_{ij} = v(x_{ij}), x_{ij} \in \bar{\Omega}_1, v_{0,j} = v_{N_1,j} = v_{i,0} = v_{i,N_2} = 0\}, \\ P_h &= \left\{ p_{ij} = p(x_{ij}), x_{ij} \in \Omega_2, \sum_{\Omega_2} p_{ij} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Системе (1) поставим в соответствие следующую разностную задачу: найти функции  $\mathbf{u} = (u, v)$  и  $p$  (дискретные аналоги вектора скорости и давления), принадлежащие, соответственно, пространствам  $U_h$  и  $P_h$ . Определим разностные аналоги дифференциальных операторов, а именно сеточные операторы градиента  $\nabla_h : P_h \rightarrow U_h$  и дивергенции  $\nabla_h \cdot : U_h^0 \rightarrow P_h$ , следующим образом:

$$(\nabla_h p)_{i,j} = \left( \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{2h_1}, \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{2h_2} \right), \quad (2)$$

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2h_1} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i,j+1} - v_{i,j}}{2h_2}. \quad (3)$$

В дискретной задаче первое и второе уравнения заданы на множестве

$$\Omega_1 = \bar{\Omega}_1 \setminus \partial\bar{\Omega}_1 = \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) : i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1\},$$

а третье уравнение — на множестве  $\Omega_2$ . Данная система сеточных уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} + Bp &= f, \\ B^T \mathbf{u} &= \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A = A^T > 0$  — квадратная матрица порядка  $N_u$  и  $B$  — прямоугольная матрица размера  $N_u \times N_p$ .

Одним из подходов к решению сформулированной задачи является построение алгоритмов типа Узавы. Рассмотрим для задачи (4) процедуру исключения Гаусса. Выделим компоненту решения  $\mathbf{u}$  из первого уравнения

$$\mathbf{u} = A^{-1}(f - Bp) \quad (5)$$

с последующей подстановкой во второе. В результате получим систему уравнений  $S_0 p = b$  следующего вида:

$$S_0 p \equiv B^T A^{-1} B p = B^T A^{-1} f - \varphi \equiv b. \quad (6)$$

Если система (4) невырождена, то для нахождения решения  $z = \{\mathbf{u}, p\}$  достаточно сначала решить систему (6) с симметричной положительно определенной матрицей  $S_0$ , а затем определить недостающую компоненту  $\mathbf{u}$  по формуле (5). Предположим, что  $S_0$  является вырожденной и потребуем выполнения условия  $b \perp \ker B$ . Тогда задача разрешима и нормальное решение должно быть ортогонально ядру  $\ker B$ . Для реализации данного подхода должны быть известны базисные векторы ядра  $\ker B$ . Целью данной работы является изучение ядра  $\ker B$  для схемы (1)–(3).

**2. Структура ядра.** Сначала исследуем структуру ядра оператора  $B$  в плоском случае, т.е. найдем ненулевые векторы  $p_{ij} \in \mathbb{R}^{N_p}$ , удовлетворяющие уравнению  $Bp = 0$ :

$$p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1} = 0, \quad p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1} = 0. \quad (7)$$

Пусть операторы  $B_x$  и  $B_y$  соответствуют операторам  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Первое уравнение в (7) соответствует уравнению  $B_x p = 0$ , а второе — уравнению  $B_y p = 0$ . Будем использовать обозначения  $B, B_x, B_y$  как для операторов, так и для соответствующих им матриц ( $B$  — прямоугольная матрица размера  $N_u \times N_p$ ). Каждая строка оператора  $B$  представляет собой запись разностного уравнения в точке с координатами

$(i, j)$ , при этом в уравнение будут входить четыре соседние точки  $p$  с соответствующими координатами. Для удобства в дальнейшем будем рассматривать дополнительную сетку с узлами в точках, в которых задано значение  $p$ . Мы можем рассмотреть квадрат с вершинами в этих точках, причем точка с координатами  $(i, j)$  будет являться центром квадрата. Назовем его клеткой.

Рассмотрим одну из клеток. Этой клетке соответствуют два уравнения (7). Пусть в узлах клетки стоят числа  $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ . Для того чтобы набор чисел, стоящих в узлах сетки, принадлежал ядру оператора  $B$ , должны быть выполнены уравнения

$$b - a + d - c = 0, \quad a - c + b - d = 0. \tag{8}$$

Эти равенства накладывают следующие ограничения на числа  $a, b, c, d$ :  $a = d, b = c$ . Следовательно, клетка будет иметь вид  $\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$ . Каждая клетка должна иметь вид  $\begin{matrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{matrix}$ .

Так как каждое ребро клетки  $(i, j)$  входит в соседние клетки, то, присоединяя соседние клетки, получим  $\begin{matrix} b & a \\ a & b \end{matrix} \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$ . Двигаясь в горизонтальном и вертикальном направлениях, получим, что в зависимости

от четности клетки могут иметь только такой вид:

$$\begin{matrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} a & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ a & b & a & b & a \end{matrix}$$

где  $a, b$  — произвольные

числа. Таким образом, ядру оператора  $B$  принадлежат векторы указанного вида, где  $a, b$  — произвольные числа. Следовательно, размерность ядра равна двум и базисом могут быть векторы  $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$  или  $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ .

Эти векторы могут быть записаны в виде

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} ((-1)^{i+j} - 1), \quad p_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} ((-1)^{i+j+1} - 1). \tag{9}$$

Численное построение сингулярного разложения матрицы (SVD-разложение) подтвердило данное утверждение: для матриц различной размерности и четности числа узлов размерность ядра была одинаковой и равнялась двум.

Перейдем к трехмерному случаю. В пространственном случае узлу  $(i, j, k)$  соответствуют три уравнения (для  $u, v, w$ ). В каждое уравнение входит значение  $p$  в вершинах “кубика”, центром которого является точка  $(i, j, k)$ :

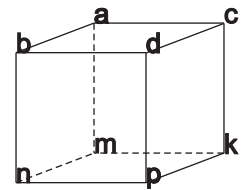


Рис. 1

$$\begin{aligned} p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} + p_{i,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i,j-1,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} &= 0, \\ p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} &= 0, \\ p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1} + p_{i,j-1,k} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i-1,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k-1} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично двумерному (плоскому) случаю введем дополнительную (трехмерную) сетку для узлов  $p$  (рис. 1). Должны быть выполнены уравнения

$$\begin{aligned} b - a + d - c + n - m + p - k &= 0, \\ c - a + d - b + k - m + p - n &= 0, \\ a - m + b - n + c - k + d - p &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Определить общий вид ядра для трехмерного случая намного сложнее. Можно попытаться построить несколько “частных” решений, воспользовавшись полученным решением для плоского случая. В качестве верхней грани кубика возьмем клетку  $\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$ . Тогда для нижней сетки из первых двух уравнений следует, что  $n - m + p - k = 0$  и  $k - m + p - n = 0$ , а это приводит к клетке вида  $\begin{matrix} m & n \\ n & m \end{matrix}$ . Построенный кубик иллюстрируется на рис. 2.

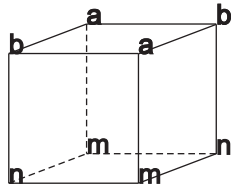


Рис. 2

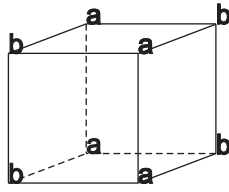


Рис. 3

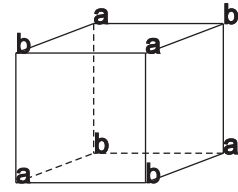


Рис. 4

Из третьего условия следует, что  $a - m + b - n = 0$ . Для выполнения этого уравнения достаточно взять соответствующие значения в вершинах кубика (см. рис. 3 или 4). Это подсказывает способ построения элементов ядра, состоящих из нулей и единиц, — по аналогии с базисом в двумерном случае. Рассмотрим

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

две плоские сетки в направлении  $xy$  вида  $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$  или  $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ . Чередую эти сетки в разной последова-

тельности, будем получать элементы ядра. Элементы каждой из этих сеток удовлетворяют “плоским” уравнениям  $B_x p = 0$  и  $B_y p = 0$  (см. (8)), поэтому первые два уравнения в (10) выполняются, поскольку в каждое уравнение входят элементы двух соседних слоев, а для каждого слоя эти уравнения выполняются автоматически. Третье уравнение будет выполняться, если сетки повторяются или чередуются (под единицей в верхнем слое стоит нуль в нижнем слое, и наоборот). Аналогично можно чередовать плоские сетки в направлениях  $yz$  и  $xz$ .

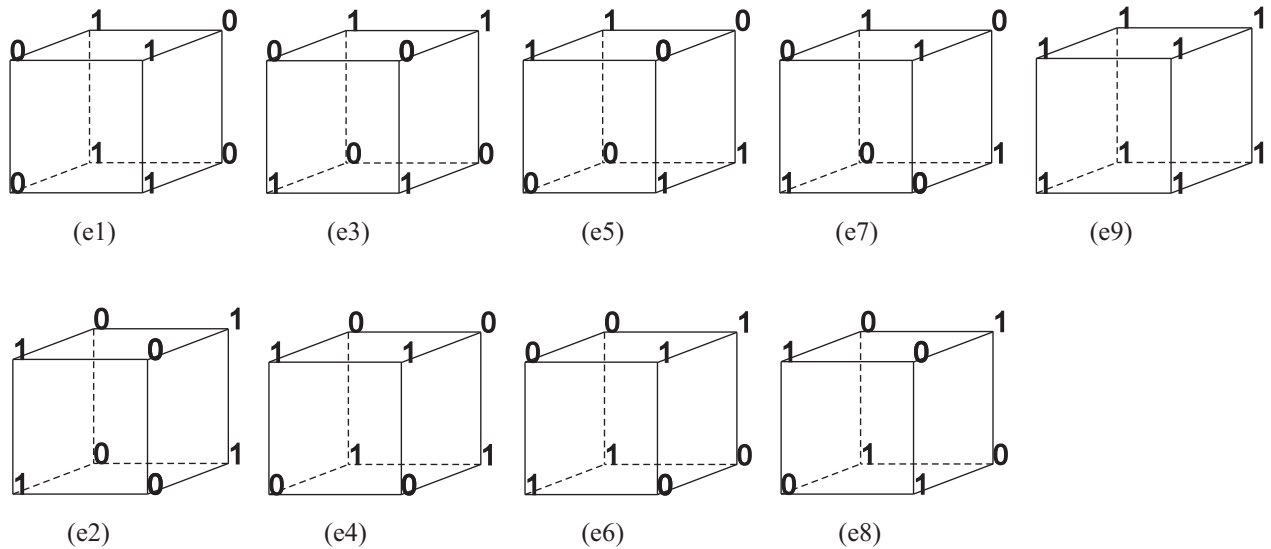


Рис. 5

Построим базис для числа узлов  $N = 2^3$  (два узла по каждому направлению). Мы должны найти значения неизвестных в узлах. Для восьми неизвестных должны выполняться три уравнения (10). Ранг этой системы равен трем; следовательно, размерность ядра равна пяти. На рис. 5 представлены возможные “кубики”.

В первых шести случаях плоские сетки повторяются по одному из направлений, в следующих двух — чередуются. Сумма векторов в каждой паре равна единичному вектору ( $e_9$ ), поэтому в базис может входить только один вектор из пары, что составляет четыре вектора. В качестве пятого вектора достаточно взять второй вектор из любой пары или единичный вектор  $e_9$ . Например, можно взять векторы  $(e_1, e_3, e_5, e_7, e_8)$ . Таким образом, мы нашли базис. Численное построение сингулярного разложения матрицы дает тот же результат:  $\dim \ker B = 5$ .

В случае  $N = 3^3$  применение SVD-разложения показывает, что размерность ядра равна восьми. Берем для верхнего уровня значения в узлах сетки  $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$ . Для любого из двух следующих уровней можно

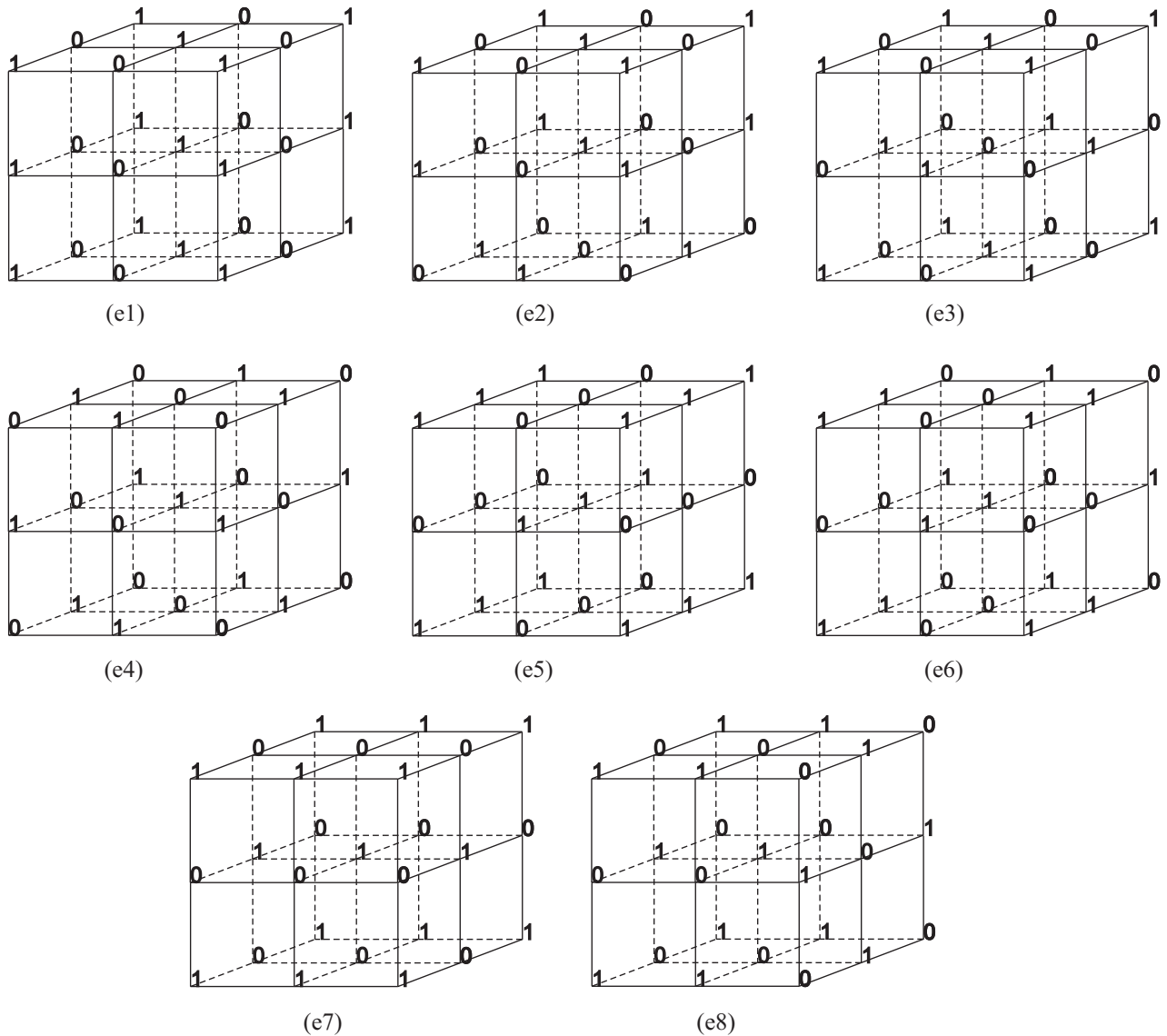


Рис. 6

взять значения в узлах сетки  $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$  или  $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$ . Для идентификации вида слоя достаточно следить за одним из ее элементов, например, за  $a_{11}$ . Тогда кубик, состоящий из горизонтальных слоев, будет полностью определяться вертикальным “столбцом” из элементов  $a_{11}$  сеток. Возникают наборы столбцов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из них любые три являются линейно независимыми. Можно добавить еще четыре вектора, если в  $e_1, e_2, e_3, e_4$  заменить 1 на 0 и 0 на 1:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Каждый из этих векторов

в сумме с векторами  $e_1, e_2, e_3, e_4$  дает единичный вектор. Таким способом мы переберем все возможные ( $2^3$ ) наборы чередующихся в направлении  $x_3$  сеток (рис. 6).

Из этих восьми векторов независимыми будут четыре вектора, причем три вектора можно взять, например, из первой четверки, а последний — из второй. В частности, можно взять  $e_1, e_2, e_3, e_5$  ( $e_5$  — вектор, дополняющий  $e_3$ ).

Аналогично можно построить наборы векторов (“кубики”), чередуя сетки в двух оставшихся направлениях. Каждый раз мы будем получать четверку линейно независимых векторов. При этом векторы

$e_3, e_5$  (со “строго чередующимися” сетками) будут входить во все четверки. Полученные восемь векторов будут линейно независимы и образовывать базис. Этот результат также согласуется с результатом SVD-разложения.

Полученные результаты для  $N = 2^3$  и  $N = 3^3$  подсказывают способ построения ядра для произвольного  $N = n^3$ , где  $n$  — количество узлов по  $p$  по каждому направлению сетки.

**Утверждение [3].** *Размерность ядра оператора  $B$  не меньше, чем  $3n - 1$  (т.е.  $\dim \ker B \geq 3n - 1$ ).*

Докажем данное утверждение. Для оценки размерности ядра  $B$  в трехмерном случае будем опираться на знание ядра оператора  $B$  в плоском случае.

Можно представить ядро  $\ker B$  в виде  $\ker B_x^3 \cap \ker B_y^3 \cap \ker B_z^3$ , где  $\ker B_x^3$  — набор векторов  $p_{i,j,k}$ , удовлетворяющих уравнению

$$p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} + p_{i,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i,j-1,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0, \quad (11)$$

т.е. трехмерному разностному аналогу уравнения  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ .

Чтобы вектор  $p_{i,j,k}$  принадлежал  $\ker B_y^3$  и  $\ker B_z^3$ , для набора  $p_{i,j,k}$  должны выполняться уравнения

$$p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j-1,k} + p_{i,j,k-1} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0, \quad (12)$$

$$p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1} + p_{i,j-1,k} - p_{i,j-1,k-1} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i-1,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0. \quad (13)$$

Пусть  $\ker B_x^2$  — набор векторов  $p_{i,j,k}$ , удовлетворяющих двумерному разностному уравнению  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ :

$$p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k} + p_{i,j-1,k} - p_{i-1,j-1,k} = 0. \quad (14)$$

Уравнение

$$p_{i,j,k-1} - p_{i-1,j,k-1} + p_{i,j-1,k-1} - p_{i-1,j-1,k-1} = 0 \quad (15)$$

аналогично первому уравнению в (7); оно также является двумерным разностным уравнением  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , но в другой точке. Из (14) и (15) следует (11), т.е.  $B_x^3 p = 0$ ; следовательно,  $\ker B_x^2 \subset \ker B_x^3$ .

Аналогично имеем  $\ker B_y^2 \subset \ker B_y^3$  и  $\ker B_z^2 \subset \ker B_z^3$ . Следовательно,  $\ker B_x^2 \cap \ker B_y^2 \subset \ker B_x^3 \cap \ker B_y^3$ , и  $\ker B_x^2 \cap \ker B_y^2 \cap \ker B_z^2 \subset \ker B_x^3 \cap \ker B_y^3 \cap \ker B_z^3 = \ker B$ .

Рассмотрим  $\ker B_{xy}^2 = \ker B_x^2 \cap \ker B_y^2$ . Набор векторов  $p_{i,j,k}$  удовлетворяет “укороченным” уравнениям (11) и (12), т.е. уравнению (14) и уравнению

$$p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k} + p_{i-1,j,k} - p_{i-1,j-1,k} = 0, \quad (16)$$

где  $i, j, k = 1, \dots, n$ .

Для каждого фиксированного  $k$  получаем независимую подсистему из  $n^2$  уравнений для нахождения набора  $p_{i,j,k}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . При этом уравнения (14) и (16) соответствуют оператору  $B$  в плоском случае, для которого  $\ker B = \text{span}(p_{i,j}^{(1)}, p_{i,j}^{(2)})$ , т.е.  $p_{i,j,k} = \alpha_k p_{i,j}^{(1)} + \beta_k p_{i,j}^{(2)}$ , где  $i, j = 1, \dots, n$  и  $k$  фиксировано. Следовательно,  $p \in \ker B_{xy}$  можно представить как  $p = (\alpha_1 p^{(1)} + \beta_1 p^{(2)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}) \in \mathbb{R}^n$  (каждая компонента имеет размерность  $n^2$ ).

Можно дать следующую геометрическую интерпретацию: вектор  $p = (p_{i,j,k})$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$ , можно представить как последовательность “слоев”, где каждый слой — матрица размером  $n \times n$ .

Векторы  $p_{i,j}^{(1)}$  и  $p_{i,j}^{(2)}$  представимы в виде  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . При фиксированном  $k$  “слой”  $p_{i,j,k}$  при-

обретает вид  $\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \alpha_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \alpha_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$ . Весь вектор  $p_{i,j,k}$ , представленный своими значениями по “слоям”, имеет вид

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ . Теперь построим  $\ker B_{xy}^2 \cap \ker B_z^3$ . Среди векторов  $\ker B_{xy}^2$  нужно

найти такие, которые удовлетворяют уравнению  $B_z^3 p = 0$  (т.е. уравнению (13)). Для векторов  $p_{i,j,k} \in$

$\ker B_{xy}^2$  система приобретает вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2 &= 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 + \beta_2 - \beta_3 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1} - \alpha_n + \beta_{n-1} - \beta_n &= 0. \end{aligned}$$

Мы получаем систему из  $n - 1$  уравнений для  $2n$  неизвестных. Ей соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что первые  $(n - 1)$  столбцов матрицы линейно независимы, т.е. ранг системы равен  $(n - 1)$ . Таким образом, размерность равна  $\ker B_{xy}^2 \cap \ker B_z^3$ , т.е. размерность пространства решения системы равна  $2n - (n - 1) = n + 1$ .

Необходимо построить базис для  $\ker B_{xy}^2 \cap \ker B_z^3$ . Векторы  $p \in B_{xy}^2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 p^{(1)} + \beta_1 p^{(2)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}) = \\ &= \text{span} \left\{ (p^{(1)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}), (p^{(2)}, \alpha_2 p^{(1)} + \beta_2 p^{(2)}, \dots, \alpha_n p^{(1)} + \beta_n p^{(2)}) \right\} = \\ &= \text{span} \left\{ (p^{(1)}, p^{(1)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots), (p^{(1)}, p^{(2)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots), \right. \\ &\quad \left. (p^{(2)}, p^{(1)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots), (p^{(2)}, p^{(2)}, \alpha_3 p^{(1)} + \beta_3 p^{(2)}, \dots) \right\} \end{aligned}$$

и т.д., т.е.  $B_{xy}^2$  является линейной оболочкой системы векторов вида  $(p^{(\alpha_1)}, p^{(\alpha_2)}, \dots, p^{(\alpha_n)})$ ,  $\alpha_i \in \{1, 2\}$ . Уравнение (13) для таких векторов выполняется тождественно. Количество этих векторов равно  $2^n$ . Постараемся найти минимальную подсистему векторов, линейная оболочка которых совпадает с линейной оболочкой всей системы. Совокупность этих векторов (база данной системы векторов) и будет базисом ядра.

Поставим вектору  $\bar{p} = (p^{(\alpha_1)}, p^{(\alpha_2)}, \dots, p^{(\alpha_n)})$  в соответствие вектор  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i = 1, 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \text{Надо добавить нулевой столбец, поскольку он не может быть получен}$$

из этих  $n$  столбцов. Можно исключить любые два вектора из базиса и добавить векторы  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$ ,

где 0 и 1 строго чередуются. Получаем два кубика  $e_1$  и  $e_2$  регулярной структуры (рис. 7). Аналогичные рассуждения можно провести для  $B_{xz}^2$  и  $B_{yz}^2$ .

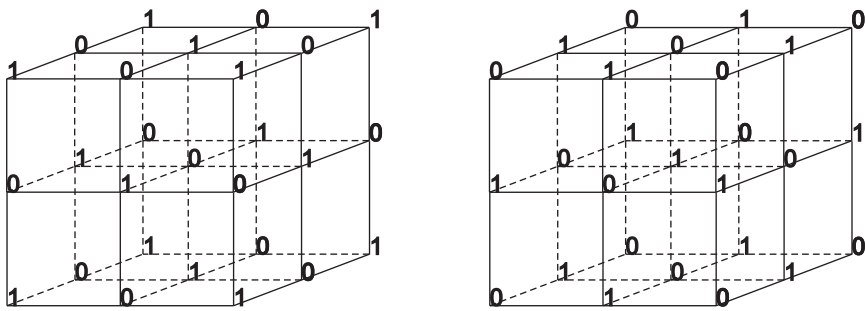


Рис. 7

Введем следующие обозначения:

$$M_{xy} = \ker B_x^2 \cap \ker B_y^2 \cap \ker B_z^3, \quad M_{xz} = \ker B_x^2 \cap \ker B_z^2 \cap \ker B_y^3, \quad M_{yz} = \ker B_y^2 \cap \ker B_z^2 \cap \ker B_x^3.$$

Вектор  $p$  будет принадлежать базису пространства  $M_{xy}$ , если только в направлениях  $x$  и  $y$  строго чередуются 0 и 1, т.е. в направлениях  $x$  и  $y$  этот вектор имеет “регулярную” структуру. Аналогично, вектор  $p$  принадлежит базису  $M_{xz}$ , если он обладает регулярной структурой в направлениях  $x$  и  $z$ .

Следовательно,  $M_{xy} \cap M_{xz} = \{e1, e2\}$ ,  $M_{xz} \cap M_{yz} = \{e1, e2\} \implies M_{xy} \cap M_{xz} \cap M_{yz} = \{e1, e2\}$  и

$$\begin{aligned} \dim (M_{xy} \cup M_{xz} \cup M_{yz}) &= \dim (M_{xy}) + \dim (M_{xz}) + \dim (M_{yz}) - \dim (M_{xy} \cap M_{xz}) - \dim (M_{xz} \cap M_{yz}) - \\ &\quad - \dim (M_{xy} \cap M_{yz}) + \dim (M_{xy} \cap M_{xz} \cap M_{yz}) = 3(n+1) - 3 \cdot 2 + 2 = 3n - 1. \end{aligned}$$

Так как  $(M_{xy} \cup M_{xz} \cup M_{yz}) \subset \ker B$ , получаем

$$\dim \ker B \geq \dim (M_{xy} \cup M_{xz} \cup M_{yz}) = 3n - 1. \quad (17)$$

Следовательно, в трехмерном случае ядро  $\ker B$  содержит по меньшей мере  $3n - 1$  линейно независимых векторов. Утверждение доказано.

**3. Численные результаты.** Найдем размерность ядра оператора  $B$  численно в двух и трехмерном случаях. Для этого воспользуемся сингулярным разложением (SVD) матрицы.

SVD-разложение является наиболее надежным методом, позволяющим вычислить размерности и определить базисы образа и ядра линейного оператора [1, 2]. Сингулярным разложением действительной матрицы  $A$  размерности  $m \times k$  называется всякая ее факторизация вида  $A = V\Sigma W^*$ , где  $V$  — ортогональная ( $m \times m$ )-матрица,  $W$  — ортогональная ( $k \times k$ )-матрица, а  $\Sigma$  — диагональная ( $m \times k$ )-матрица с неотрицательными диагональными элементами  $\sigma_i$ , которые называются сингулярными числами матрицы  $A$ . Ранг произвольной матрицы  $A$  равен рангу диагональной матрицы  $\Sigma$  в ее сингулярном разложении.

С помощью численного построения SVD-разложения нами было проведено исследование ядра оператора  $B$ . Для плоского случая размерность ядра была равна 2. Для трехмерного случая численно получена следующая зависимость:  $\dim \ker B = 3n - 1$ , где  $n$  — число узлов для давления по каждому из направлений. Расчеты были проведены для  $n = 2, \dots, 6$ . Сравнивая результаты расчетов с оценкой (17), мы можем предположить, что в данном случае вместо неравенства имеет место равенство  $\dim \ker B = 3n - 1$ , и, следовательно, нами был найден базис в  $\ker B$ .

**4. Заключение.** Для разностной аппроксимации задачи Стокса на полуразнесенных сетках в работе найдена структура ядра дискретного аналога оператора градиента в плоском и трехмерном случаях. В отличие от двумерного случая, в трехмерном случае размерность ядра растет при уменьшении шага сетки с порядком  $O(h^{-1})$ . Результаты численных экспериментов позволяют предположить, что полученная оценка размерности ядра является точной. Рост размерности ядра делает численные методы, основанные на ортогонализации к ядру, менее пригодными для решения задачи Стокса на полуразнесенных сетках в трехмерном случае.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голуб Д. Матричные вычисления. М.: Мир, 2001.
2. Казанер Д., Молер К., Нэши С. Численные методы и математическое программное обеспечение. М.: Мир, 1998.
3. Муравлева Е.А. Исследование вырожденной схемы для задачи Стокса // Тр. XXVIII конф. молодых ученых механико-математического факультета МГУ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.
4. Чижонков Е.В. Релаксационные методы решения седловых задач. М.: ИВМ РАН, 2002.
5. Boland J.M., Nicolaides R.A. On the stability of bilinear-constant velocity-pressure finite elements // Numer. Math. 1984. **44**. 219–222.
6. Vincent C., Baret G. On the stability of the Stokes operator discretized by the Q1-P0 finite element method // Commun. Numer. Meth. Eng. 1998. **14**. 959–961.
7. Dai X., Cheng X. The iterative penalty method for Stokes equations using Q1-P0 element // Appl. Math. Comput. 2008 (doi: 10.1016/j.amc.2007.11.041).

Поступила в редакцию  
27.03.2008