

УДК 519.6

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ САМОФОКУСИРОВКИ В БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. Н. Демидова¹, Я. М. Жилейкин²

Предложен численный метод решения задачи нелинейной оптической самофокусировки для полупространства. Приводится описание численных расчетов распространения световых пучков в линейной среде и в среде с керровской нелинейностью и трехфотонным поглощением. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных с помощью предлагаемого метода и с использованием ранее предложенного метода, для области, ограниченной по поперечной координате. Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00285).

1. Постановка задачи. В настоящее время большое внимание уделяется изучению эффекта нелинейной оптической самофокусировки, что связано с потребностями создания и использования мощного когерентного излучения в научных исследованиях, различных областях техники и производства: квантовой электронике, нелинейной спектроскопии, лазерном термоядерном синтезе, волоконных оптических линиях связи, голографии и др. Поскольку изучение данного оптического явления аналитическими методами затруднено, обычно применяется численное моделирование. В связи с этим проблема развития численных методов решения задач, связанных с нелинейной оптической самофокусировкой, является весьма актуальной.

Распространение электромагнитных волн в нелинейной среде описывается уравнением

$$\Delta v + k^2 v = f(|v|^2)v, \tag{1}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, $v(x, y, z)$ — компонента электромагнитного поля, функция f характеризует нелинейные свойства среды, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Пусть известно распределение пучка при $z = 0$:

$$v(x, y, 0) = E_0(x, y). \tag{2}$$

Будем рассматривать задачу (1), (2) об определении функции v при $z > 0$.

Выделим медленно меняющуюся часть решения. Для этого перейдем к новой функции

$$E(x, y, z) = v(x, y, z) e^{ikz}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и (2), получим следующую задачу для функции E :

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta E + iF(I)E = 0, \tag{4}$$

$$E(x, y, 0) = E_0(x, y), \quad E(R) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty, \tag{5}$$

где $I = |E|^2$ — интенсивность пучка, $F = -\frac{1}{2k} f$ и $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Уравнение (4) можно заменить его шредингеровским приближением

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} E + iF(I)E = 0, \tag{6}$$

¹ Институт криптографии, связи и информатики, Мичуринский просп., 70, 117602, Москва; e-mail: alyona_demidova@mail.ru

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: jam@srcc.msu.ru

которое получается из (4) отбрасыванием второй производной по z , где $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Рассмотрим случай распространения радиально-симметричных световых пучков в нелинейной среде. Тогда в цилиндрической системе координат уравнение (6) и условие (5) примут вид

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + iF(\rho, |E|^2)E = 0, \quad \rho > 0, \quad z > 0, \quad (7)$$

$$E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad (8)$$

$$E(\rho, z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Обычно при решении задачи (7), (8) вводится параметр $A > 0$, такой, что $E_0(\rho) = 0$ при $\rho \geq A$, и краевое условие

$$E(A, z) = 0, \quad z \geq 0. \quad (10)$$

Однако условие (10) налагает на решение такое жесткое ограничение, что решение задачи (7), (8) и (10) не всегда правильно описывает физическое явление распространения световых пучков.

Вместо условия (10) будем использовать краевое условие (9).

Для решения задачи (7)–(9) можно предложить следующий метод. Рассмотрим область $\rho > A, z > 0$. Введем переменную $\nu = \frac{1}{\rho}$. Тогда $\frac{\partial E}{\partial \rho} = \frac{\partial E}{\partial \nu} \left(-\frac{1}{\rho^2} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) = \nu^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu \frac{\partial E}{\partial \nu} \right)$ и уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k} \nu^3 \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu \frac{\partial E}{\partial \nu} \right) + iF(\nu, |E|^2)E = 0.$$

Будем рассматривать следующие две задачи:

$$\text{задача I: } \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + iF(\rho, |E|^2)E = 0, \quad 0 < \rho \leq A, \quad z > 0, \quad (11)$$

$$E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq A, \quad (12)$$

$$\text{задача II: } \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} + \frac{i}{2k} \nu^3 \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \nu} \right) + iF(\nu, |\tilde{E}|^2)\tilde{E} = 0, \quad 0 < \nu < \frac{1}{A}, \quad z > 0, \quad (13)$$

$$\tilde{E}(0, z) = 0, \quad z > 0, \quad \tilde{E}(\nu, 0) = E_0\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad 0 < \nu < \frac{1}{A}. \quad (14)$$

На практике $E_0(\nu)$ в области $0 < \nu < \frac{1}{A}$ является величиной, близкой к нулю. Введем условия согласования решений задач I и II:

$$\tilde{E}\left(\frac{1}{A}, z\right) = E(A, z), \quad z > 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} \Big|_{\rho=A} = -\nu^2 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=1/A}, \quad z > 0. \quad (16)$$

Решения задач I и II, удовлетворяющие условиям согласования, и дадут решение задачи (7)–(9).

2. Численный метод решения. Для численного решения задач I и II построим разностные схемы.

Задача I. Рассмотрим область $\bar{Q} = [0, A] \times [0, Z]$. Введем сетку

$$\bar{w} = \left\{ (\rho_n, z_l) \mid \rho_n = (n-1)h, \quad z_l = l\tau, \quad n = 1, \dots, NR+1, \quad l = 0, \dots, NZ, \quad h = \frac{A}{NR}, \quad \tau = \frac{Z}{NZ} \right\}.$$

Обозначим $E_n^l = E(\rho_n, z_l)$. Задачу I аппроксимируем трехслойной схемой второго порядка точности [3]:

$$\frac{E_n^{l+1} - E_n^{l-1}}{2\tau} + \frac{i}{2k} \frac{\Lambda E_n^{l+1} + \Lambda E_n^{l-1}}{2} + iF(\rho_n, |E_n^l|^2)E_n^l = 0, \quad (17)$$

где $n = 1, \dots, NR, l = 1, \dots, NZ - 1$ и $E_n^0 = E_0(\rho_n)$ при $n = 1, \dots, NR + 1$. Значения E_n^1 определяются из уравнений

$$\frac{E_n^1 - E_n^0}{\tau} + \frac{i}{2k} \frac{\Lambda E_n^1 + \Lambda E_n^0}{2} + iF(\rho_n, |E_n^{1/2}|^2) E_n^{1/2} = 0, \quad (18)$$

а $E_n^{1/2}$ — с помощью явной схемы $\frac{E_n^{1/2} - E_n^0}{\tau/2} + \frac{i}{2k} \Lambda E_n^0 + iF(\rho_n, |E_n^0|^2) E_n^0 = 0$. Здесь

$$\Lambda E_n^l = \begin{cases} \frac{1}{\rho_n h^2} \left[\left(\rho_n + \frac{h}{2} \right) E_{n+1}^l - 2\rho_n E_n^l + \left(\rho_n - \frac{h}{2} \right) E_{n-1}^l \right], & l < n, \\ \frac{1}{h^2} [4(E_2^l - E_1^l)], & n = 1. \end{cases}$$

Задача II. Рассмотрим область $\bar{G} = [0, 1/A] \times [0, Z]$. Введем сетку

$$\bar{\Omega} = \{(\nu_n, z_l), \nu_n = (n-1)h_1, z_l = l\tau, n = 1, \dots, NR1 + 1, l = 0, \dots, NZ\},$$

где $h_1 = \frac{1}{A \cdot NR1}$ и $\tau = \frac{Z}{NZ}$. Обозначим $\tilde{E}_n^l = \tilde{E}(\nu_n, z_l)$. Запишем трехслойную разностную схему

$$\frac{\tilde{E}_n^{l+1} - \tilde{E}_n^{l-1}}{2\tau} + \frac{i}{2k} \frac{\tilde{\Lambda} \tilde{E}_n^{l+1} + \tilde{\Lambda} \tilde{E}_n^{l-1}}{2} + iF(\nu_n, |\tilde{E}_n^l|^2) \tilde{E}_n^l = 0, \quad (19)$$

где $n = 1, \dots, NR1, l = 1, \dots, NZ - 1$ и $\tilde{E}_n^0 = 0$ при $n = 1, \dots, NR1 + 1$. Значения \tilde{E}_n^1 определяются из уравнений

$$\frac{\tilde{E}_n^1 - \tilde{E}_n^0}{\tau} + \frac{i}{2k} \frac{\tilde{\Lambda} \tilde{E}_n^1 + \tilde{\Lambda} \tilde{E}_n^0}{2} + iF(\nu_n, |\tilde{E}_n^{1/2}|^2) \tilde{E}_n^{1/2} = 0, \quad (20)$$

а значения $\tilde{E}_n^{1/2}$ вычисляются по разностной схеме

$$\frac{\tilde{E}_n^{1/2} - \tilde{E}_n^0}{\tau/2} + \frac{i}{2k} \tilde{\Lambda} \tilde{E}_n^0 + iF(\nu_n, |\tilde{E}_n^0|^2) \tilde{E}_n^0 = 0.$$

Здесь $\tilde{\Lambda} \tilde{E}_n^l = \frac{\nu_n^3}{h_1^2} \left[\left(\nu_n + \frac{h_1}{2} \right) \tilde{E}_{n+1}^l - 2\nu_n \tilde{E}_n^l + \left(\nu_n - \frac{h_1}{2} \right) \tilde{E}_{n-1}^l \right]$ для $1 < n, \tilde{E}_1^l = 0, l = 0, \dots, NZ$.

Для решения систем (17)–(20) используем метод прогонки. Для этого запишем указанные системы в виде $a_n E_n^{l+1} - c_n E_n^{l+1} + b_n E_n^{l+1} = -f_n, n \geq 2$. Коэффициенты a_n, b_n, c_n, f_n определяются по следующим формулам.

Для системы (17): $a_n = \frac{i\tau(\rho_n - h/2)}{2k\rho_n h^2}, \quad c_n = \frac{i\tau}{kh^2} - 1, \quad b_n = \frac{i\tau(\rho_n + h/2)}{2k\rho_n h^2},$

$$f_n = i2\tau F(\rho_n, |E_n^l|^2) E_n^l + \frac{i\tau(\rho_n - h/2)}{2k\rho_n h^2} E_{n-1}^{l-1} - \left(\frac{i\tau}{kh^2} + 1 \right) E_n^{l-1} + \frac{i\tau(\rho_n + h/2)}{2k\rho_n h^2} E_{n+1}^{l-1}.$$

Для системы (18): $a_n = \frac{i\tau(\rho_n - h/2)}{4k\rho_n h^2}, \quad c_n = \frac{i\tau}{2kh^2} - 1, \quad b_n = \frac{i\tau(\rho_n + h/2)}{4k\rho_n h^2},$

$$f_n = i\tau F(\rho_n, |E_n^{1/2}|^2) E_n^{1/2} + \frac{i\tau(\rho_n - h/2)}{4k\rho_n h^2} E_{n-1}^0 - \left(\frac{i\tau}{2kh^2} + 1 \right) E_n^0 + \frac{i\tau(\rho_n + h/2)}{4k\rho_n h^2} E_{n+1}^0.$$

Для системы (19): $\tilde{a}_n = \frac{i\tau(\nu_n - h_1/2)\nu_n^3}{2kh_1^2}, \quad \tilde{c}_n = \frac{i\tau\nu_n^4}{kh_1^2} - 1, \quad \tilde{b}_n = \frac{i\tau(\nu_n + h_1/2)\nu_n^3}{2kh_1^2},$

$$\tilde{f}_n = i2\tau F(\nu_n, |\tilde{E}_n^l|^2) \tilde{E}_n^l + \frac{i\tau\nu_n^3}{2kh_1^2} \left(\nu_n - \frac{h_1}{2} \right) \tilde{E}_{n-1}^{l-1} - \left(\frac{i\tau\nu_n^4}{kh_1^2} + 1 \right) \tilde{E}_n^{l-1} + \frac{i\tau\nu_n^3}{2kh_1^2} \left(\nu_n + \frac{h_1}{2} \right) \tilde{E}_{n+1}^{l-1}.$$

Для системы (20): $\tilde{a}_n = \frac{i\tau(\nu_n - h_1/2)\nu_n^3}{4kh_1^2}$, $\tilde{c}_n = \frac{i\tau\nu_n^4}{2kh_1^2} - 1$, $\tilde{b}_n = \frac{i\tau(\nu_n + h_1/2)\nu_n^3}{4kh_1^2}$,

$$\tilde{f}_n = i\tau F\left(\nu_n, |\tilde{E}_n^{1/2}|^2\right)\tilde{E}_n^{1/2} + \frac{i\tau\nu_n^3}{4kh_1^2}\left(\nu_n - \frac{h_1}{2}\right)\tilde{E}_{n-1}^0 - \left(\frac{i\tau\nu_n^4}{2kh_1^2} + 1\right)\tilde{E}_n^0 + \frac{i\tau\nu_n^3}{4kh_1^2}\left(\nu_n + \frac{h_1}{2}\right)\tilde{E}_{n+1}^0.$$

В методе прогонки решение ищется по формулам

$$E_n^{l+1} = \alpha_{n+1}E_{n+1}^{l+1} + \beta_{n+1}, \quad (21)$$

где α_n, β_n — прогоночные коэффициенты, для которых справедливы следующие равенства.

Для задачи I:

$(l+1)$ -й слой: $l = 1, \dots, NZ - 1$,

$$\alpha_2 = \frac{-i2\tau}{kh^2 - i2\tau}, \quad \beta_2 = \frac{-i2\tau kh^2 F\left(\rho_1, |E_1^l|^2\right)E_1^l + (kh^2 + i2\tau)E_1^{l-1} - i2\tau E_2^{l-1}}{kh^2 - i2\tau}.$$

первый слой: $\alpha_2 = \frac{-i\tau}{kh^2 - i\tau}$, $\beta_2 = \frac{-i\tau kh^2 F\left(\rho_1, |E_1^{1/2}|^2\right)E_1^{1/2} + (kh^2 + i\tau)E_1^0 - i\tau E_2^0}{kh^2 - i\tau}$,

$$\alpha_n = \frac{b_{n-1}}{c_{n-1} - \alpha_{n-1}a_{n-1}}, \quad \beta_n = \frac{a_{n-1}\beta_{n-1} + f_{n-1}}{c_{n-1} - \alpha_{n-1}a_{n-1}}, \quad n = 3, \dots, NR + 1.$$

Для задачи II:

l -й слой: $l = 1, \dots, NZ$,

$$\tilde{\alpha}_2 = 0, \quad \tilde{\beta}_2 = 0,$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\tilde{b}_{n-1}}{\tilde{c}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1}\tilde{a}_{n-1}}, \quad \tilde{\beta}_n = \frac{\tilde{a}_{n-1}\tilde{\beta}_{n-1} + \tilde{f}_{n-1}}{\tilde{c}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1}\tilde{a}_{n-1}}, \quad n = 3, \dots, NR1 + 2.$$

Используя указанные формулы, вычисляем прогоночные коэффициенты для двух задач.

Будем рассматривать случай, когда $NR1 = NR - 1$. Тогда

$$\rho_{NR+1} = A, \quad \rho_{NR} = A\left(\frac{NR-1}{NR}\right), \quad \nu_{NR1+1} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\rho_{NR+1}}, \quad \nu_{NR1+2} = \frac{NR}{A(NR-1)} = \frac{1}{\rho_{NR}}.$$

На основании условия согласования (15) имеем

$$E_{NR+1}^{l+1} = \tilde{E}_{NR1+1}^{l+1}. \quad (22)$$

Так как точки ρ_{NR} и ν_{NR1+2} совпадают на координатной оси, то будем считать, что

$$E_{NR}^{l+1} = \tilde{E}_{NR1+2}^{l+1}. \quad (23)$$

Согласно формулам метода прогонки (21) получим

$$E_{NR}^{l+1} = \alpha_{NR+1}E_{NR+1}^{l+1} + \beta_{NR+1}, \quad (24)$$

$$\tilde{E}_{NR1+1}^{l+1} = \tilde{\alpha}_{NR1+2}\tilde{E}_{NR1+2}^{l+1} + \tilde{\beta}_{NR1+2}. \quad (25)$$

Подставляя (22) в (24) и (23) в (25), приходим к уравнениям

$$E_{NR}^{l+1} = \alpha_{NR+1}\tilde{E}_{NR1+1}^{l+1} + \beta_{NR+1}, \quad (26)$$

$$\tilde{E}_{NR1+1}^{l+1} = \tilde{\alpha}_{NR1+2}E_{NR}^{l+1} + \tilde{\beta}_{NR1+2}. \quad (27)$$

Уравнения (26) и (27) образуют систему линейных алгебраических уравнений, где неизвестными являются E_{NR}^{l+1} и \tilde{E}_{NR1+1}^{l+1} . Решая данную систему, находим

$$\tilde{E}_{NR1+1}^{l+1} = \frac{\tilde{\alpha}_{NR1+2}\beta_{NR+1} + \tilde{\beta}_{NR1+2}}{1 - \tilde{\alpha}_{NR1+2}\alpha_{NR+1}}. \quad (28)$$

На основании соотношения (22) по этой формуле вычисляется и E_{NR+1}^{l+1} . Таким образом, находятся значения \tilde{E}_{NR1+1}^{l+1} и E_{NR+1}^{l+1} . Затем по формулам (21) вычисляются все значения решения задач I и II на $(l+1)$ -м слое: E_n^{l+1} , $n = 1, \dots, NR$ и \tilde{E}_n^{l+1} , $n = 1, \dots, NR1$. Для вычисления \tilde{E}_{NR1+1}^{l+1} и E_{NR+1}^{l+1} по формуле (28) необходимы прогоночные коэффициенты $\tilde{\alpha}_{NR1+2}$ и $\tilde{\beta}_{NR1+2}$. При нахождении этих коэффициентов на $(l+1)$ -м слое используются значения решения задачи II в точке $\nu = \nu_{NR1+2}$ на предыдущих слоях. Следовательно, для успешного продолжения вычислительного процесса на следующих слоях необходимо знать значения \tilde{E}_{NR1+2}^{l+1} решения задачи II. Значение решения \tilde{E}_{NR1+2}^{l+1} , согласно формуле (23), равно E_{NR}^{l+1} .

3. Анализ результатов численных расчетов. Рассмотрим задачу (7) – (9), которая описывает распространение радиально-симметричных линейно поляризованных пучков в нелинейной среде.

С помощью метода, описанного выше, было получено численное решение данной задачи. Для проведения сравнительного анализа были выполнены также численные расчеты решения задачи (7), (8), (10) с жестким граничным условием $E(A, z) = 0$ и с использованием разностной схемы, предложенной в [3]. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $k = 500$, $A = 5$, $NR = NR1 + 1 = 100$, $\tau = 0.5$. В качестве начального распределения волны $E_0(\rho)$ было взято гауссовское распределение $E_0(\rho) = e^{-\rho^2/2}$.

Рассматривались следующие случаи:

- 1) нелинейность среды отсутствует, т.е. $F(\rho, I) = 0$;
- 2) распространение пучка происходит в среде с керровской нелинейностью и нелинейным трехфотонным поглощением, т.е. $F(\rho, I) = \alpha I - i\beta I^2$, где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$.

Проанализируем полученные результаты.

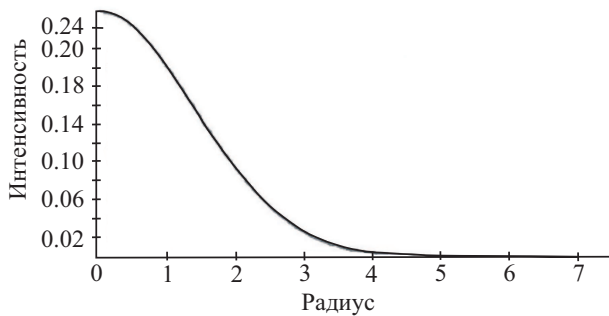


Рис. 1. $z = 850$, $F(\rho, I) = 0$, $E(A, z) = 0$

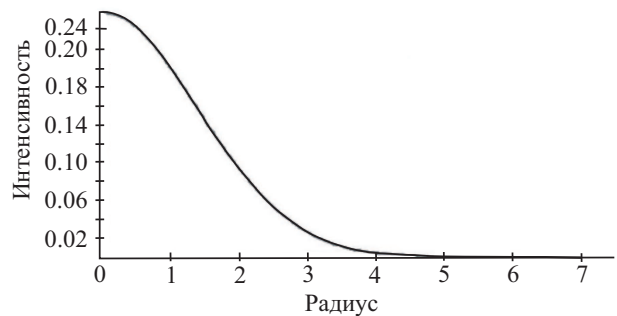


Рис. 2. $z = 850$, $F(\rho, I) = 0$

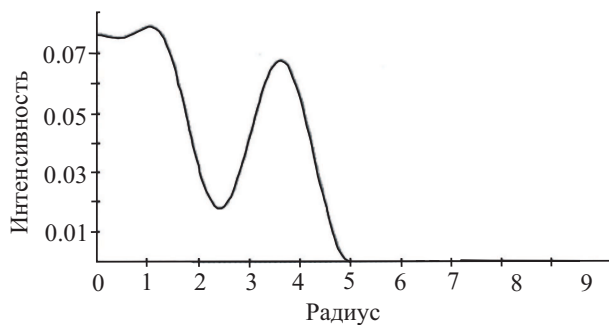


Рис. 3. $z = 2000$, $F(\rho, I) = 0$, $E(A, z) = 0$

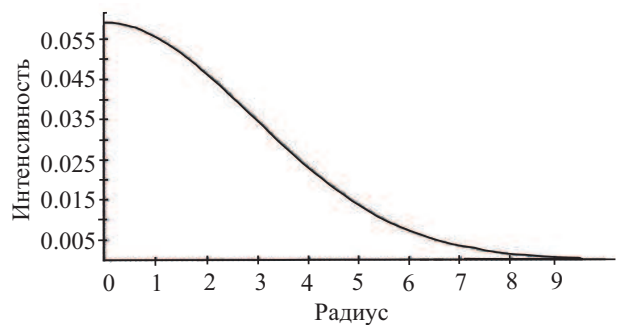
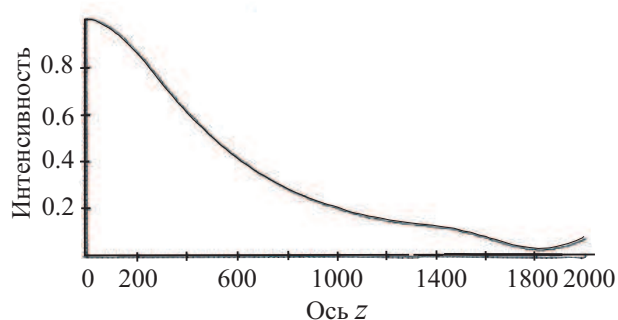
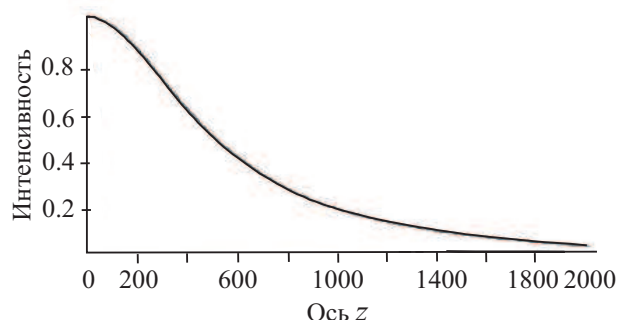


Рис. 4. $z = 2000$, $F(\rho, I) = 0$

1) $F(\rho, I) = 0$. Как известно [1, 2], при распространении в линейной однородной среде гауссовский пучок не изменяет своей гауссовской формы; изменяются лишь ширина распределения интенсивности в поперечном сечении, интенсивность на оси и кривизна фазового фронта. С увеличением расстояния z ширина пучка растет, а интенсивность на оси убывает.

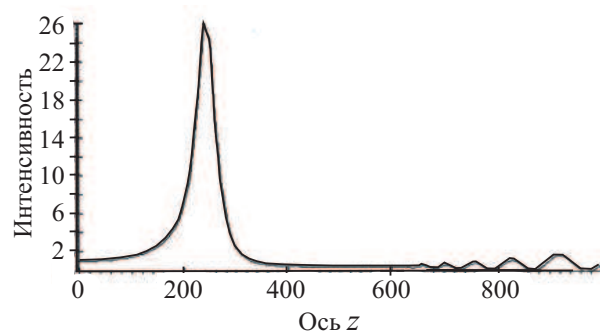
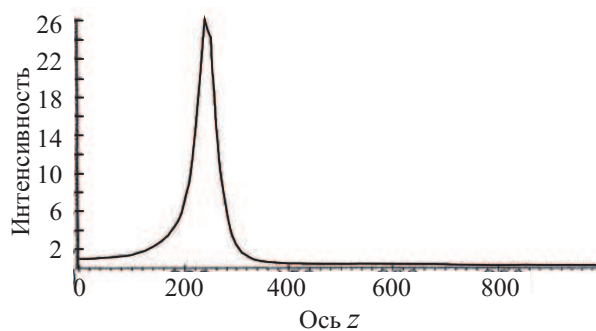
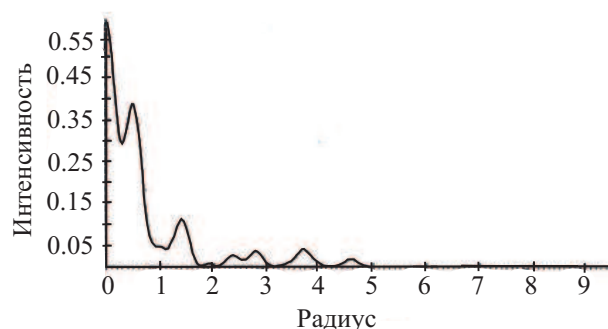
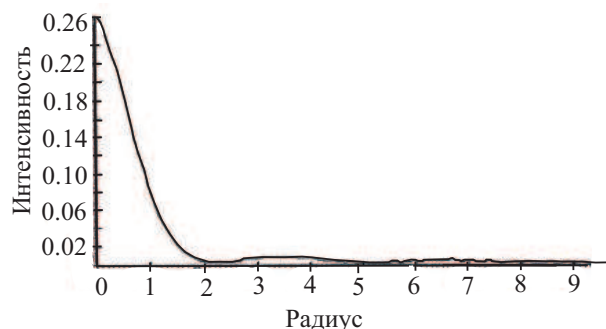
При значениях z , изменяющихся от 0 до 900, ширина пучка меньше A . Численные решения обеих задач при таких z совпадают и находятся в хорошем соответствии с теорией распространения гауссовского пучка в линейной среде (рис. 1 и 2).

При значениях $z \geq 900$ ширина пучка становится больше A . В численном решении задачи (7), (8), (10) с жестким граничным условием при $z \approx 900$ на периферии пучка появляются паразитические осцилляции, которые с увеличением z распространяются от периферии пучка к его центру. Это приводит к сильному искажению решения и нарушению гауссовской формы пучка (рис. 3 и 5).

Рис. 5. $\rho = 2000$, $F(\rho, I) = 0$, $E(A, z) = 0$ Рис. 6. $\rho = 2000$, $F(\rho, I) = 0$

При расчетах, проведенных с помощью метода, описанного в данной работе, для значений $z \geq 900$ никаких осцилляций не возникает и у пучка сохраняется гауссовская форма (рис. 4 и 6).

Таким образом, можно сделать следующий вывод. Для расчетов распространения пучков в линейной среде при небольших значениях z ($z < 900$) можно использовать разностную схему [3] и решать задачу (7), (8), (10). Численные расчеты по этой схеме выполняются почти в два раза быстрее по сравнению с предложенным методом. При больших же значениях z ($z \geq 900$) целесообразно воспользоваться методом, предложенным в данной работе.

Рис. 7. $\rho = 0$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.0001$, $E(A, z) = 0$ Рис. 8. $\rho = 0$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.0001$ Рис. 9. $z = 1000$, $\rho = 0$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.0001$,
 $E(A, z) = 0$ Рис. 10. $z = 1000$, $\rho = 0$, $\alpha = 0.01$,
 $\beta = 0.0001$

2) $F(\rho, I) = \alpha I - i\beta I^2$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. При распространении светового пучка в среде с керровской нелинейностью и трехфотонным поглощением на оси пучка образуется многофокусная структура этого пучка. Многофокусная структура представляет собой конечный ряд отдельных фокусов на оси, получающихся в результате последовательной фокусировки различных кольцевых зон пучка. Число фокусов зависит от первоначальной мощности пучка [2].

Расчеты проводились при следующих значениях коэффициентов: $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.0001$. При таких α и β на оси пучка образуется один фокус при $z = 240$. На рис. 7 и 8 приведены графики зависимости интенсивности от z на оси пучка ($\rho = 0$), а на рис. 9 и 10 — графики зависимости интенсивности от расстояния ρ от оси пучка при возрастающих значениях z .

При значениях $z < 600$ численные решения обеих задач совпадают.

При значениях $z \geq 600$ происходит “отражение” решения задачи (7), (8), (10) от границы цилиндра, в котором решается задача. В результате при численном решении данной задачи образуются паразитические осцилляции, распространяющиеся от периферии к центру пучка с ростом z . Происходит сильное искажение численного решения (рис. 9). Эти осцилляции хорошо видны на оси пучка при $z > 600$ на рис. 7.

При численном же решении задачи (7)–(9) для больших z ($z \geq 600$) таких осцилляций не возникает (рис. 8 и 10).

Можно сделать следующий вывод: при больших значениях z для численного решения задачи нелинейной оптической самофокусировки в полупространстве целесообразно использовать метод, предложенный в данной работе. При этом увеличение числа арифметических операций не является очень большим — всего в два раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990.
2. *Луговой В.Н., Прохоров А.М.* Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде // Успехи физич. наук. 1973. 111, № 2. 203–247.
3. Численный анализ на Фортране. Стандартные программы решения задач волновой физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.

Поступила в редакцию
02.03.2008
