

УДК 519.63

**ПРАКТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО  
ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ  
БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТИ**

С. В. Милютин<sup>1</sup>

Исследуется практическая оптимизация трехпараметрического итерационного метода численного расчета течений бингамовской жидкости. Данный метод является обобщением широко известного алгоритма Эрроу–Гурвица. Основной трудностью при практической реализации метода является нахождение оптимальных итерационных параметров. Предложен алгоритм поиска оптимальных параметров, а также рассмотрена его практическая реализация.

**1. Введение.** Проблема численного решения уравнений гидродинамики имеет важное практическое значение, так как в большинстве случаев (например в случае уравнений Навье–Стокса, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости) нахождение аналитического решения в явном виде не представляется возможным. Настоящая статья посвящена численному исследованию течения бингамовской вязкопластичной жидкости. С математической точки зрения уравнения, описывающие течение бингамовской жидкости, представляют собой уравнения Навье–Стокса с дополнительным нелинейным членом, учитывающим пластические свойства среды. Для численного анализа мы будем применять так называемый трехпараметрический итерационный метод, предложенный в работе [1] для решения уравнений Стокса и Навье–Стокса. В работе [2] обосновано применение трехпараметрического метода для решения уравнений, описывающих течение бингамовской вязкопластичной жидкости. Отметим, что трехпараметрический метод является обобщением известных методов Эрроу–Гурвица и Кобелькова [3], а его отличительными особенностями являются простота реализации и минимальные требования к объему памяти.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  стационарную первую краевую задачу для уравнений, описывающих течение несжимаемой изотермической вязкопластичной жидкости Бингама в переменных скорость–давление:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - g \nabla \cdot \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}$  — тензор скорости,  $|D(\mathbf{u})|^2 = \sum_{i,j=1}^2 D_{ij}^2(\mathbf{u})$ , положительные параметры  $\rho$ ,  $\nu$  и  $g$  характеризуют физические свойства: плотность, вязкость и пластичность соответственно. Введем обозначение  $V = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ . Известно [4], что задача (1) имеет обобщенное решение  $\mathbf{u} \in V$ ,  $p \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ .

Одной из основных трудностей при численном анализе задачи (1) является недифференцируемость члена  $g \nabla \cdot \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}$ . Для ее преодоления в работах [5, 6] были предложены различные варианты регуляризации задачи (1). Здесь мы будем использовать  $\varepsilon$ -регуляризацию следующего вида:

$$-\nu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \rho (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}^\varepsilon - g \nabla \cdot \frac{D(\mathbf{u}^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + |D(\mathbf{u}^\varepsilon)|^2}} + \nabla p^\varepsilon = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0, \quad \mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Близость решений задач (1) и (2) установлена при  $\rho = 0$  в работе [5].

Дискретный аналог задачи (2) представляет собой следующую нелинейную задачу с седловым оператором:

$$A(u) + Bp = f, \quad B^T u = 0, \quad u \in U, \quad p \in P. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: smilyutin@inbox.ru

Здесь  $U$  и  $P$  — конечномерные аналоги пространств  $V$  и  $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$  размерностей  $N_U$  и  $N_P$  ( $N_U \geq N_P$ ). Оператор  $A : U \rightarrow U$  представим в виде  $A(u) = Su + N(u, u) + M(u)$ , где  $S$  — линейный самосопряженный положительно определенный оператор, а  $N$  и  $M$  — нелинейные операторы. Отметим, что  $S$ ,  $N$  и  $M$  — конечномерные аппроксимации дифференциальных операторов  $-\nu \Delta u^\varepsilon$ ,  $\rho \left( (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon + \nabla \cdot u^\varepsilon \frac{u^\varepsilon}{2} \right)$  и  $-g \nabla \cdot \frac{D(u^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + |D(u^\varepsilon)|^2}}$  соответственно, а оператор  $B$  — конечномерная аппроксимация  $\nabla p^\varepsilon$ .

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$(N(u, v), v) = 0 \quad \forall u, v \in U, \tag{4}$$

$$\left| (N(u, v), w) \right| \leq C_N \|u\|_S \|v\|_S \|w\|_S \quad \forall u, v, w \in U, \tag{5}$$

$$\left| (N_u v, v) \right| \leq d_N \|u\|_S \|v\|_S^2 \quad \forall u, v \in U, \tag{6}$$

$$0 \leq (M(v), v) \quad \forall v \in U, \tag{7}$$

$$M_u = M_u^T \geq 0, \quad 0 \leq M_u \leq \sigma S, \tag{8}$$

$$\kappa(p, p) \leq \sup_{u \in U} \frac{(Bp, u)}{\|u\|_S} \quad \forall p \in P. \tag{9}$$

Здесь  $N_u$  и  $M_u$  — производные операторов  $N$  и  $M$  в точке  $u$ , а  $C_N$ ,  $d_N$  и  $\kappa$  — сеточно-независимые константы. Символом  $(\cdot, \cdot)$  выше обозначено скалярное произведение,  $\|v\|_S^2 = (Sv, v)$ .

Для решения задачи (3) будем использовать трехпараметрический итерационный метод

$$\begin{aligned} Q \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + A(u^k) + \beta BC^{-1} B^T u^k + Bp^k &= f, \\ -\alpha C(p^{k+1} - p^k) + B^T u^{k+1} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где  $z^k = (u^k; p^k)$  и  $z^{k+1} = (u^{k+1}; p^{k+1})$  — приближения  $(u; p)$  на  $k$ -й и  $(k+1)$ -й итерациях к решению  $\bar{z} = (\bar{u}; \bar{p})$  задачи (3) соответственно;  $\tau$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  — независимые итерационные параметры, причем  $\tau > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha > 0$ ;  $Q : U \rightarrow U$  и  $C : P \rightarrow P$  — положительно определенные самосопряженные операторы. Будем предполагать, что для задачи (3) и метода (10) выполнены условия

$$0 < \theta Q \leq S \leq \Theta Q, \tag{11}$$

$$0 < \gamma C \leq B^T Q^{-1} B \leq \Gamma C, \tag{12}$$

где  $0 < \theta \leq \Theta$  и  $0 < \gamma \leq \Gamma$  — сеточно-независимые константы.

В работе [2] доказана теорема существования решения задачи (3) при условии выполнения соотношений (4)–(9), а также доказана локальная теорема сходимости.

**Теорема.** *Зафиксируем некоторое  $r > 0$ . Пусть будут выполнены условия  $\beta \geq 0$  и*

$$\theta - \Theta^{3/2} d_N (\|\bar{z}\|_{\mathcal{R}} + r) - \frac{\Gamma}{\alpha} > 0, \quad 0 < \tau < \min \left\{ \frac{\alpha}{2\Gamma}, \frac{1}{\theta - \Theta^{3/2} d_N (\|\bar{z}\|_{\mathcal{R}} + r)}, \frac{1}{\Theta + \sigma\Theta + \beta\Gamma} \right\},$$

где  $\|\bar{z}\|_{\mathcal{R}} = \|(\bar{u}, \bar{p})\|_{\mathcal{R}} = \sqrt{(Q\bar{u}, \bar{u}) + \alpha\tau(C\bar{p}, \bar{p})}$ . Тогда для любого начального приближения  $z^0 \in B_r(\bar{z})$  метод (10) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $0 < q < 1$  в норме  $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$  т.е. выполняется неравенство  $\|z^k - \bar{z}\|_{\mathcal{R}} \leq q^k \|z^0 - \bar{z}\|_{\mathcal{R}}$ , где

$$q = \max \left\{ \left( 1 + \frac{\tau\Gamma}{\alpha} \right) \left( 1 - \tau \left( \theta - \Theta^{3/2} d_N (\|\bar{z}\|_{\mathcal{R}} + r) \right) \right), \sqrt{1 - \frac{\tau\gamma}{\alpha} + 2 \left( \frac{\tau\gamma}{\alpha} \right)^2}, \sqrt{1 - \frac{\tau\Gamma}{\alpha} + 2 \left( \frac{\tau\Gamma}{\alpha} \right)^2} \right\} < 1.$$

С практической точки зрения основной трудностью при реализации метода (10) является поиск оптимальных параметров  $\tau$ ,  $\beta$  и  $\alpha$ . При фиксированных  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $g$  “оптимальными” мы будем называть такие итерационные параметры, при которых норма невязки убывает в заданное количество раз за минимальное число итераций.

**3. Процедура нахождения оптимальных итерационных параметров.** Опишем алгоритм, с помощью которого нам удалось численно найти оптимальные итерационные параметры трехпараметрического метода. Сделаем несколько предварительных замечаний.

1) Метод (10) крайне чувствителен к изменению итерационных параметров  $\tau$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е. уже в небольшой окрестности оптимальных параметров метод перестает сходиться либо сходится с очень маленькой скоростью.

2) При небольших изменениях параметров  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $g$  оптимальные значения  $\tau$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  меняются незначительно, что позволяет нам при малом изменении  $\nu$ ,  $\rho$ ,  $g$  локализовать окрестность поиска новых  $\tau$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

Исходя из этих замечаний, алгоритм поиска оптимальных  $\tau$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  будет выглядеть следующим образом. Предположим, что удалось найти оптимальные значения  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  для некоторых  $\nu_0$ ,  $\rho_0$ ,  $g_0$ . Обозначим их через  $\tau_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ . На следующем шаге рассмотрим  $\nu_1 = \nu_0 + \Delta\nu$ ,  $\rho_1 = \rho_0 + \Delta\rho$ ,  $g_1 = g_0 + \Delta g$  и с помощью циклического метода покоординатного спуска найдем новые оптимальные значения  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , причем область поиска сузим до некоторого  $B_R(\tau_0, \alpha_0, \beta_0)$ -шара радиуса  $R$  с центром в  $\tau_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ . Отметим, что конкретные значения  $\Delta\nu$ ,  $\Delta\rho$  и  $\Delta g$ , а также  $R$  подбираются для каждой задачи экспериментально. Соответственно, на следующем шаге данного алгоритма рассматриваются  $\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu$ ,  $\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho$ ,  $g_2 = g_1 + \Delta g$  и уже для них находятся оптимальные итерационные параметры. В качестве отправной точки предложенного алгоритма может служить задача Стокса ( $\rho = 0$ ,  $g = 0$ ), так как для нее в работе [1] были получены аналитические формулы оптимальных параметров  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

**4. Модельная задача I.** В этом разделе мы будем рассматривать задачу (2) с фиксированными параметрами  $\nu$  и  $\rho$ , равными 1 и 0 соответственно. Нас будет интересовать поведение трехпараметрического метода при изменении параметра  $g$ .

Для дискретизации задачи (2) воспользуемся методом конечных элементов. В качестве  $\Omega$  будем рассматривать единичный квадрат. Зафиксируем некоторое  $h$ , такое, что  $hN = 1$  (где  $N$  — натуральное число), и рассмотрим “северо-восточную” триангуляцию  $T_h$  области  $\Omega$  прямоугольными треугольниками с длинами катетов, равными  $h$ . Затем каждый треугольник триангуляции  $T_h$  разобьем средними линиями на четыре треугольника и полученную триангуляцию обозначим  $T_{h/2}$ . Пространства  $U$  и  $P$  определим следующим образом:

$$U = \left\{ u \mid u \in (C(\bar{\Omega}))^2, \quad u|_T \in (P_1)^2 \quad \forall T \in T_{h/2}, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$P = \left\{ p \mid p \in C(\bar{\Omega}), \quad p|_T \in P_0 \quad \forall T \in T_h, \quad \int_{\Omega} p \, dx \, dy = 0 \right\}.$$

Сходимость трехпараметрического метода (10) зависит от выполнения условия (9), известного как ЛВВ-условие [7]. Отметим, что рассматриваемая схема конечных элементов является ЛВВ-устойчивой, т.е. для нее выполнено неравенство (9).

Функция  $f$  бралась таким образом, чтобы можно было продемонстрировать сходимость трехпараметрического метода к точному решению задачи (2), а именно: рассматривалась функция тока  $\Psi = (x(1-x)y(1-y))^2$ . По функции тока строились компоненты вектора скорости:  $u_1^\varepsilon = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $u_2^\varepsilon = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ .

Функция давления бралась в виде  $p^\varepsilon(x, y) = x + y + c$ , где константа  $c$  выбиралась из условия ортогональности единице:  $\int_{\Omega} p^\varepsilon \, dx \, dy = 0$ . По функциям  $u_1^\varepsilon$ ,  $u_2^\varepsilon$  и  $p^\varepsilon$  строилась правая часть  $f$ , после чего

трехпараметрическим методом находилось численное решение  $u_h = (u_h^1, u_h^2)$ ,  $p_h$  задачи (3). При таком построении функции  $f$  мы знаем точное решение задачи (2). Во всех приведенных ниже численных экспериментах в качестве матрицы  $C$  бралась единичная матрица, а в качестве  $Q$  — матрица  $S$ . Оптимальные итерационные параметры трехпараметрического метода вычислялись с помощью процедуры, описанной в предыдущем разделе при  $\Delta g = 0.01$  и  $R = 0.8$ . Критерием окончания итераций трехпараметрического метода было уменьшение сеточной  $L_2$ -нормы невязки в  $10^5$  раз. В качестве начального приближения рассматривалось численное решение задачи Стокса с нормой невязки, меньшей  $10^{-10}$ . Параметр  $\varepsilon$  брался равным 0.01.

Таблица 1

$g$	0	1	200	500	800
$\tau$	0.8541	0.069113	0.00036257	0.0001448	0.00009301
$\alpha$	0.7639	0.005025	0.0000001396	0.00000002231	0.00000000924
$\beta$	0.0000	-4.40102	-802.561324	-1995.4856621	-3059.04394

В табл. 1 приведены оптимальные итерационные параметры, посчитанные при различных  $g$ . Отметим, что эти параметры были найдены в случае  $h = 1/4$ .

Таблица 2

$g$	0	1	200	500	800
$h = 1/4$	16	27	27	29	31
$h = 1/8$	18	35	35	39	40
$h = 1/16$	23	40	40	41	46
$h = 1/32$	26	46	47	49	55
$h = 1/64$	31	50	51	51	56

Таблица 2 иллюстрирует зависимость числа итераций от размерности задачи. При построении табл. 2 мы использовали параметры  $\tau, \alpha, \beta$  из табл. 1, после чего смотрели, как изменится число итераций при изменении размерности задачи. На основе табл. 2 можно сделать важный вывод: в качестве оптимальных параметров задачи большой размерности можно использовать оптимальные параметры, вычисленные для задачи меньшей размерности. Отметим, что это замечание значительно упрощает поиск оптимальных параметров.

Численные результаты, демонстрирующие сходимость трехпараметрического метода к точному решению задачи (2), приведены в табл. 3.

Таблица 3

$h$	$\ u_1^\varepsilon - u_h^1\ _{L_2}$	$\ u_2^\varepsilon - u_h^2\ _{L_2}$	$\ \Psi - \Psi_h\ _{L_2}$	$\ p^\varepsilon - p_h\ _{L_2}$
1/4	$7.26 \times 10^{-4}$	$7.21 \times 10^{-4}$	$6.12 \times 10^{-4}$	$2.78 \times 10^{-2}$
1/8	$2.44 \times 10^{-4}$	$2.42 \times 10^{-4}$	$2.41 \times 10^{-4}$	$2.26 \times 10^{-2}$
1/16	$6.62 \times 10^{-5}$	$6.56 \times 10^{-5}$	$1.24 \times 10^{-4}$	$1.32 \times 10^{-2}$
1/32	$1.68 \times 10^{-5}$	$1.66 \times 10^{-5}$	$4.95 \times 10^{-5}$	$6.98 \times 10^{-3}$
1/64	$4.22 \times 10^{-6}$	$4.18 \times 10^{-6}$	$1.31 \times 10^{-5}$	$3.57 \times 10^{-3}$

При построении табл. 3 параметр  $g$  брался равным 200.0. В качестве  $\tau, \alpha, \beta$  выбирались их оптимальные значения из табл. 1. Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что норма ошибки для компонент скорости убывает как  $O(h^2)$ , а для давления — почти как  $O(h)$ .

**5. Модельная задача II.** В этом разделе мы приведем результаты численных расчетов задачи о каверне для бингамовской жидкости, т.е. задачи (2) с условиями на границе вида  $u_1^\varepsilon|_{x=0} = u_1^\varepsilon|_{x=1} = 0$ ,  $u_1^\varepsilon|_{y=0} = 0$ ,  $u_1^\varepsilon|_{y=1} = 1$ ,  $u_2^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$ . Для дискретизации задачи (2) мы использовали те же конечные элементы, что и в предыдущем разделе. Как и ранее, мы фиксировали  $\nu$  и  $\rho$  равными 1 и 0 соответственно, и нас интересовало поведение трехпараметрического метода при изменении параметра  $g$ . Матрицы  $C$  и  $Q$ , а также критерий окончания итераций и начальное приближение брались такими же, как и в предыдущем разделе. Параметр  $\varepsilon$  брался равным 0.01.

Таблица 4

$g$	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$\tau$	0.8101	0.2824	0.1319	0.0641	0.0416	0.0304	0.0241
$\alpha$	0.6490	0.1827	0.0713	0.0321	0.0230	0.0178	0.0141
$\beta$	-0.0989	0.2208	1.0020	0.6310	0.0501	0.2693	-0.8616
итерации	18	49	111	157	234	307	371

Результаты численных расчетов задачи о каверне (оптимальные итерационные параметры при различных значениях  $g$ , а также количество итераций трехпараметрического метода при найденных оптимальных параметрах) при  $N = 32$  приведены в табл. 4. Оптимальные параметры находились с помощью процедуры, описанной выше, с шагом  $\Delta g = 0.01$  и  $R = 1.2$ . Отметим, что в отличие от задачи, рассмотренной в предыдущем разделе, найденные нами оптимальные значения  $\tau, \alpha, \beta$  для задачи о каверне зависят от размерности задачи, что не позволяет в качестве оптимальных параметров для задачи большой размерности рассматривать оптимальные параметры, найденные при небольших  $N$ .

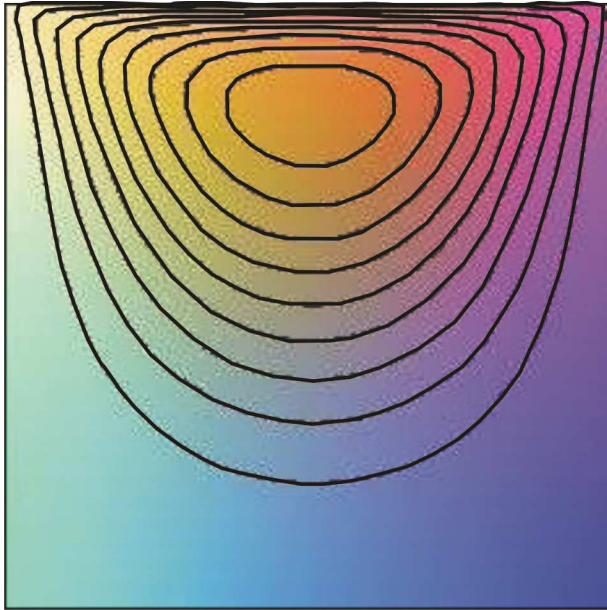


Рис. 1

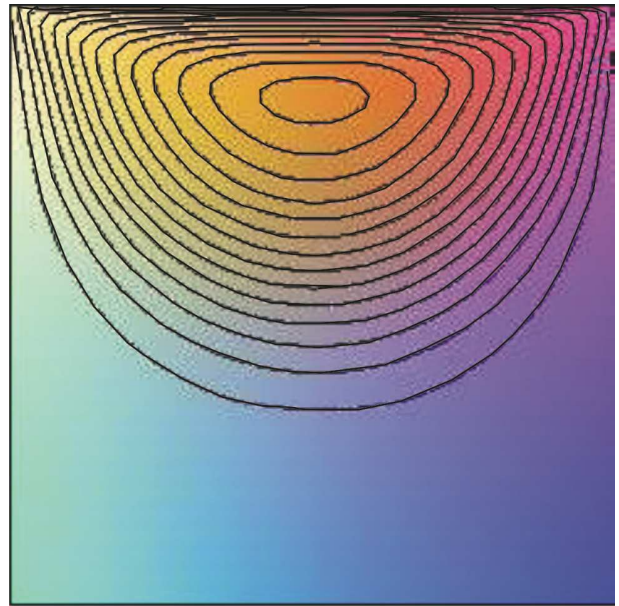


Рис. 2

Для визуализации полученных в табл. 4 результатов мы использовали функцию тока  $\Psi$  (рис. 1 и 2), построенную для задачи о каверне. Рисунок 1 соответствует параметру  $g = 0.5$ , а рис. 2 — параметру  $g = 5.0$ . Из рисунков следует, что при увеличении параметра  $g$  так называемые застойные области (расположены внизу рис. 1 и 2) увеличиваются, что полностью согласуется с физическим смыслом параметра  $g$ .

**6. Модельная задача III.** В этом разделе мы исследуем практическую применимость трехпараметрического метода к уравнению Навье–Стокса, т.е. уравнению из задачи (2) при  $g = 0$ . Отметим, что этот вопрос уже рассматривался в работе [8] для случая задачи о каверне. Мы же будем исследовать поведение трехпараметрического метода для задачи (2) с  $g = 0$  при изменении параметра  $\rho$ . Для дискретизации уравнений воспользуемся аппроксимацией на смещенных сетках, применяемой в работе [8]. Отметим, что используемая схема удовлетворяет LBB-условию [9]. В качестве матрицы  $C$ , как и ранее, возьмем единичную матрицу, а в качестве  $Q$  — матрицу  $S$ . Оптимальные параметры трехпараметрического метода вычислялись с помощью процедуры, описанной в разделе 2 с  $\Delta\rho = 0.1$  и  $R = 1.2$ . Критерием окончания итераций трехпараметрического метода было уменьшение сеточной  $L_2$ -нормы невязки в  $10^5$  раз. В качестве начального приближения рассматривалось численное решение задачи Стокса с нормой невязки, меньшей  $10^{-10}$ .

В табл. 5 приведены оптимальные параметры, найденные при  $h = 1/4$ .

Таблица 5

$\rho$	0	10	400	800	1200	1600
$\tau$	0.9613	0.9853	0.6880	0.6801	0.4822	0.4052
$\alpha$	0.6442	0.8441	0.3690	0.3697	0.1440	0.0948
$\beta$	0.0000	0.0016	0.4500	0.6500	1.1000	1.4500

Таблица 6 является аналогом табл. 2 и демонстрирует зависимость числа итераций от размерности задачи (табл. 6 построена для параметров  $\tau$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , взятых из табл. 5). Как и для модельной задачи I, в данном случае при небольших  $\rho$  поиск оптимальных параметров можно значительно упростить путем их поиска для задачи меньшей размерности.

Прокомментируем прочерки, присутствующие в табл. 6. При увеличении  $\rho$  окрестность оптимальных параметров  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  (при фиксированном  $h$ ), в которой метод (10) сходится, уменьшается. Оптимальные параметры из табл. 5, вычисленные при  $h = 1/4$ , не являются оптимальными для случая других  $h$ , поскольку  $\kappa_h$  (константа из неравенства (9)) и соответственно  $\gamma_h$  из (12) различны при различных  $h$  (при этом, согласно LBB-условию, все  $\kappa_h$  ограничены снизу  $\kappa$ -сеточно независимой константой). Таким образом, наличие прочерков в табл. 6 означает, что при достаточно больших  $\rho$  оптимальные  $\tau$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  для  $h = 1/4$  не принадлежат окрестности оптимальных итерационных параметров для случая  $h = 1/16$  (и

Таблица 6

$\rho$	0	10	400	800	1200	1600
$h = 1/4$	8	8	19	28	36	40
$h = 1/8$	12	12	21	39	56	65
$h = 1/16$	19	19	23	44	63	—
$h = 1/32$	22	26	24	67	—	—

$h = 1/32$ ), в которой бы метод (10) сходил.

**Заклучение.** Исследована практическая реализация трехпараметрического итерационного метода расчета течений бингамовской жидкости. Отметим, что по сложности реализации и объему вычислений данный метод не отличается от известного метода Эрроу–Гурвица, однако превосходит его в скорости сходимости и области применимости. Основная трудность возникает при нахождении оптимальных (или близких к оптимальным) итерационных параметров. Предложен алгоритм нахождения оптимальных итерационных параметров, а также обсуждены вопросы его практической реализации.

Автор благодарен Е. В. Чижонкову за постановку задачи и полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быченков Ю.В.* Исследование и оптимизация многопараметрических алгоритмов для решения задач с седловыми операторами. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2003.
2. *Милютин С.В.* К расчету течений бингамовской жидкости // Материалы VII Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения". Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2007. 200–205.
3. *Кобельков Г.М.* О численных методах решения уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление // Вычислительные процессы и системы. Вып. 8. М.: Наука, 1991. 204–236.
4. *Duvaut G., Lions J.L.* Inequalities in mechanics and physics. Berlin: Springer, 1976.
5. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Наука, 1979.
6. *Dean E.J., Glowinski R.* Operator-splitting methods for the simulation of Bingham viscoplastic flow // Chin. Ann. of Math. **В.** 2002. N 23. 187–204.
7. *Gunzburger M.* Finite element methods for viscous incompressible flow: a guide to theory, practice and algorithms. Boston: Academic, 1989.
8. *Быченков Ю.В.* Об одном трехпараметрическом методе решения уравнений Навье–Стокса // Журн. вычислительной матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 9. 1405–1412.
9. *Лебедев В.И.* Метод сеток для уравнений типа Соболева // Докл. АН СССР. 1956. **114**, № 6. 1166–1169.

Поступила в редакцию  
22.01.2008