УДК 519.6; 514.174.6

О ПУТЕВОМ КОДИРОВАНИИ k-ГРАНЕЙ В n-КУБЕ

Г. Г. Рябов[1]

Многие конструкции построения топологических объектов в виде кубических комплексов связаны с отображениями в n-мерный куб. Описания таких отображений являются практической основой для алгоритмов при компьютерной реализации рассматриваемых построений. Комбинаторный характер используемых при этом объектов существенно повышает важность формы машинного представления информации о структурных единицах различной размерности. Обсуждаются некоторые варианты такого рода представлений относительно n-мерного куба.

Пусть $\mathbb{I}^n$ — единичный n-куб в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а вектор $\boldsymbol{f}(\mathbb{I}^n)$ задан в виде $\boldsymbol{f}(\mathbb{I}^n) = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$, где f_k — число граней размерности k (k-граней). Для $\mathbb{I}^n$ имеем

$$f_k = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

Обозначим через $V(n,k,l)$ числа в пирамиде Паскаля, которые являются триномиальными коэффициентами в разложении тринома $(x+y+z)^n$ [1]. Поскольку $V(n,k,l) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l}$,

$$\sum_{l=1}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l} = \binom{n}{k}\sum_{l=1}^{n-k}\binom{n-k}{l} =$$

$$= \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{l=1}^{n-k} V(n,k,l),$$

то

$$f_k = \sum_{l=1}^{n-k} V(n,k,l).$$

Геометрическая интерпретация этого равенства представлена на рис. 1 и 2.

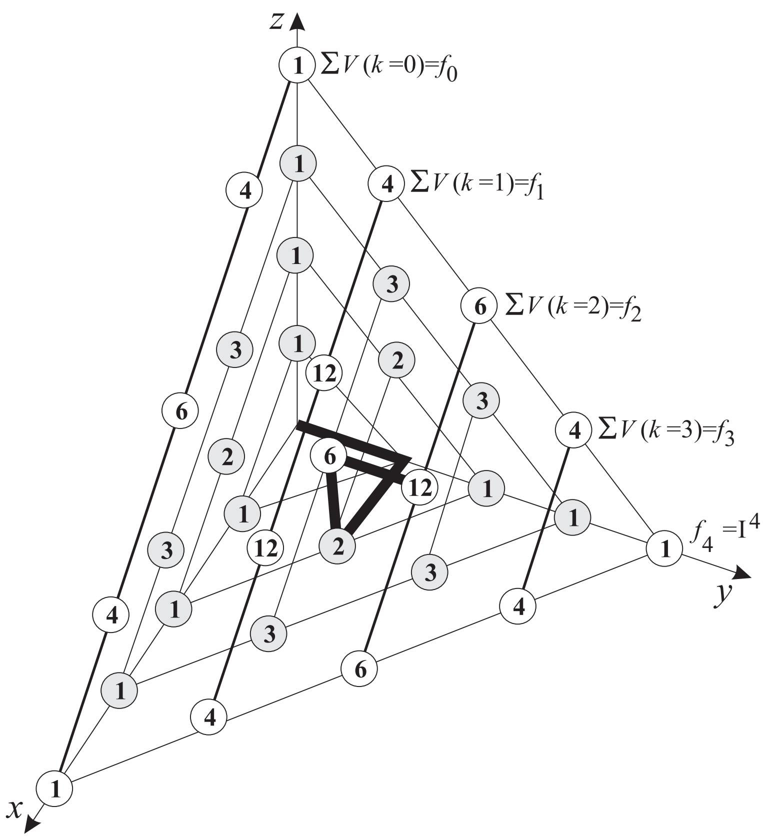


Рис. 1. Пирамида Паскаля со слоем $n = 4$ (соответствует $\mathbb{I}^4$); толстой линией показан кратчайший путь по целым точкам, соответствующий 2-грани с кодом 2120

С другой стороны, $V(n,k,l)$ — число кратчайших путей по единичным ребрам 3d-решетки из вершины пирамиды с декартовыми координатами (0,0,0) в вершину с координатами (x,y,z), для которых выполнено $l = x$, $k = y$ и $n = x+y+z$. Отсюда следует, что каждой k-грани в кубе $\mathbb{I}^n$ соответствует единственный кратчайший путь в 3d-решетке, который может быть закодирован троичным кодом. Тем самым, сумма всех чисел в n-м слое пирамиды Паскаля равна 3^n и, следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k = 3^n$. Следует заметить, что при анализе фундаментальных соотношений Дена–Соммервиля и уравнения Эйлера обычно рассматривается вектор $\boldsymbol{f}$ с компонентами $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$. В нашем же случае всегда $f_n = 1$.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы; e-mail: gen-ryabov@yandex.ru

Рассмотрим множество всех троичных n-разрядных кодов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $a_i \in \{0, 1, 2\}$. Положим, что "двойки" соответствуют ребрам, а номер разряда с "двойкой" — номеру единичного базисного вектора, коллинеарного данному ребру. Число двоек в коде равно размерности грани. "Оставшаяся" часть кода из 0 и 1 соответствует трансляции этой грани из вершины $(0, 0, \dots, 0)$ в соответствующую вершину куба $\mathbb{I}^n$. Так, для $\mathbb{I}^4$ код 2021 соответствует квадрату (двумерной грани), образованному декартовым произведением $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_4$ (квадрат с вершинами (0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,0,1,0), (1,0,1,0)) и транслируемому в вершину (0,0,0,1), т.е. имеющему вершины (0,0,0,1), (1,0,0,1), (0,0,1,1), (1,0,1,1) (см. рис. 3).

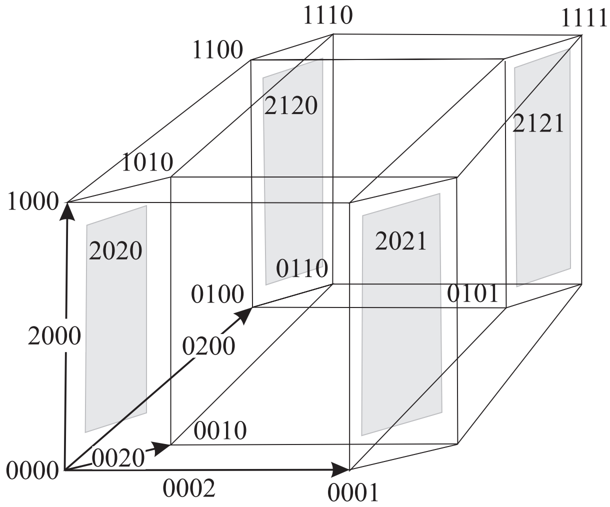
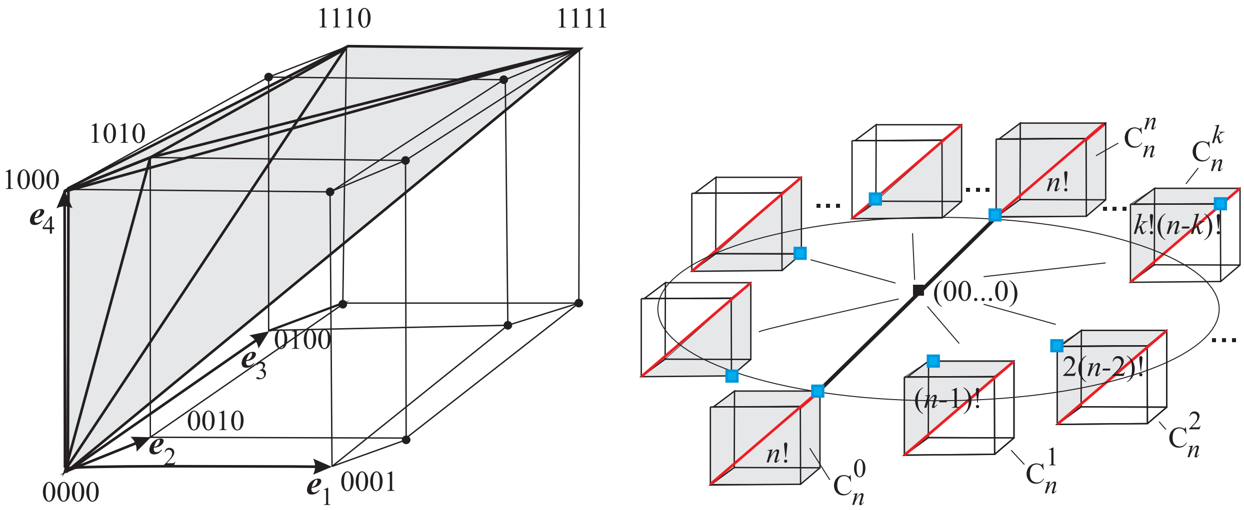


Рис. 2. Положение 2-граней в $\mathbb{I}^4$ с кодами 2020, 2021, 2120 и 2121

Троичные коды, не содержащие "двоек", соответствуют вершинам n-куба в традиционной кодировке.

Расположение всех n-разрядных троичных кодов в порядке возрастания образует вполне упорядоченное множество кодов k-граней куба $\mathbb{I}^n$. Такое кодирование можно назвать *путевым кодированием*.

Легко видеть, что простейшие логические операции над любой парой таких кодов дают ответ на вопросы наличия общих вершин, ребер и граней разной размерности, что эффективно при компьютерных представлениях.



a) b)

Рис. 3. a) Примитивная триангуляция $\mathbb{I}^4$ — построение симплекса методом путевых симплексов для перестановки 4231 (более толстые линии); b) схема вклада симплексов в звезду вершины $(0, 0, \dots, 0)$ со стороны n-кубов, содержащих $(0, 0, \dots, 0)$

Заметим также, что такое кодирование более компактно, чем кодирование k-граней двойным двоичным кодом, где первый n-разрядный двоичный код отражает, каким k базисным векторам коллинеарны ребра данной k-грани (единицы в разрядах кода соответствуют номерам базисных векторов). Второй n-разрядный двоичный код — это код трансляции в соответствующую вершину n-куба. Так, для 2-грани с путевым троичным кодом 2120 в этом представлении будет соответствовать восьмиразрядный код 10100100. Если расположить в порядке возрастания все $2n$-разрядные коды, то среди них будет $2^{2n} - 3^n$ кодов, не соответствующих никаким k-граням.

Во многих комбинаторных конструкциях существенную роль играют триангуляции n-куба. В [2] рассматривается примитивная триангуляция, определенная как разбиение куба $\mathbb{I}^n$ на симплексы равного объема $1/n!$. В соответствие каждому симплексу из числа $n!$ ставится подстановка из симметрической группы Sn по следующему правилу.

Пусть имеется ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$: $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Для подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ определим последовательность обхода вершин n-куба как соответствующую последовательности векторов: $\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2}, \boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2}+\boldsymbol{e}_{i_3}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2}+\boldsymbol{e}_{i_3}+\ldots+\boldsymbol{e}_{i_n}$.

По мере обхода в таком порядке вершин строятся ребра симплекса путем соединения текущей вершины со всеми предыдущими в этой последовательности. Такой метод построения был назван *методом путевых симплексов*. В работе [2] также доказывается, что так перечисляются все симплексы примитивной триангуляции и в этой связи каждому симплексу примитивной триангуляции можно поставить в соответствие перестановку целых чисел от 1 до n. Расположив все такие перестановки в лексикографическом порядке и присвоив каждой из них соответствующий порядковый номер, в дальнейшем можно считать этот номер кодом соответствующего симплекса.

Здесь удобно воспользоваться факториальной системой счисления [3, 4], когда число s представляется как $(d_m, d_{m-1}, \ldots, d_1)$, где d_k взяты из разложения $s = \sum_{k=1}^{m} d_k k!$, $(d_k \leqslant k)$.

Так, для $\mathbb{I}^4$ число симплексов в триангуляции равно 24, т.е. достаточно 5-разрядного двоичного кода. Поэтому симплексу на вершинах (0,0,0,0), (1,0,0,0), (1,0,1,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1) соответствует перестановка (4231), которая в свою очередь имеет порядковый номер 21 (перестановка (1234) имеет номер 0) и соответствующий двоичный код 10101 или код (3,1,1) в факториальной записи во вполне упорядоченной последовательности симплексов примитивной триангуляции куба $\mathbb{I}^4$ (рис. 3). Факториальная запись удобна для восстановления по ней самой перестановки. Так, первое число в перестановке равно $d_m + 1$, на втором месте $(d_{m-1}+1)$-е число из оставшихся, расположенных по порядку, и т.д.

При компьютерных комбинаторно-топологических построениях и преобразованиях важную роль играет машинное представление структуры звезды вершины как полиэдра [5, 6]. В случае примитивной триангуляции пространства $\mathbb{R}^n$ при заданном ортонормированном базисе звезда каждой вершины представляет транслируемый полиэдр. Он образован как симплициальный комплекс, включающий в себя симплексы из всех "октантов" (n-кубов), которые содержат эту вершину (целую точку). Число таких октантов-кубов равно 2^n. Из каждого такого куба в этот комплекс входят только те симплексы, которые содержат эту общую вершину при рассматриваемой триангуляции. Будем считать, что каждому из таких кубов придана "местная система координат" — кодировка вершин куба $\mathbb{I}^n$. Обозначим через $W(k)$ число вершин n-куба с длиной кратчайшего пути, равного k, от вершины $(0, 0, \ldots, 0)$ до них, а число симплексов с одной из таких вершин — через $S(k)$. Из метода путевых симплексов следует, что $S(k) = k!(n-k)!$. Поскольку $W(k) = \binom{n}{k}$, то общее число симплексов в звезде представляется в виде $S = \sum_{k=0}^{n} W(k)S(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(n-k)! = (n+1)!$. Отсюда следует возможность такого же приема кодирования для симплексов в звезде, как и для n-куба. Кроме того, отсюда же получается следующая формула для объема транслируемого звезды-полиэдра в $\mathbb{R}^n$: $Q(P_n) = (n+1)!\,\dfrac{1}{n!} = n+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмин О.В.* Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения // Соровский образовательный журнал. 2000. № 5. 101–109.
2. *Steingrimsson E.* Permutations statistics of indexed and poset permutations. Cambridge: MIT-Press, 1992.
3. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
4. *Гашков С.Б.* Системы счисления и их применения. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
5. *Рябов Г.Г.* Алгоритмические основы топологического процессора (топокарты) // Труды Всероссийской конф. "Методы и средства обработки информации". М., 2005 (http://lvk.cs.msu.ru).
6. *Ryabov G., Serov V.* Simplicial-lattice model and metric-topological constructions // Proc. of the Ninth Conf. on Pattern Recognition and Information Processing. Minsk, 2007. Vol. 2. 135–140.

Поступила в редакцию
09.01.2008