

УДК 519.6

УЧЕТ АПРИОРНОЙ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ

А. В. Елесин¹, А. Ш. Кадырова¹

Предлагается новый алгоритм минимизации функции невязки, учитывающий априорную сравнительную информацию о значениях параметров. Алгоритм используется при решении задачи идентификации коэффициента фильтрации трехмерного напорного пласта. Проведено сравнение алгоритмов, построенных с учетом и без учета априорной сравнительной информации.

Введение. Рассматривается задача идентификации коэффициента фильтрации трехмерного анизотропного пласта по замерам напора в наблюдательных точках в условиях однофазной стационарной фильтрации жидкости. Стандартным методом решения этой задачи является определение идентифицируемых параметров из минимума функции невязки $J = \frac{1}{2} R^T R$, где $R^T = (h_1 - h_1^*, \dots, h_L - h_L^*)$ — вектор невязки, h_j, h_j^* — вычисленные и заданные значения напора в наблюдательных точках, L — число наблюдательных точек. Задача идентификации коэффициента фильтрации относится к классу некорректно поставленных задач [1–5]. Учет различного рода априорной информации о значениях идентифицируемых параметров является одним из регуляризирующих элементов, повышающим устойчивость решения задач [1].

В настоящей статье предлагается алгоритм минимизации функции невязки, учитывающий сравнительную информацию о значениях идентифицируемых параметров K_{xyk}, K_{zk} , полученную по результатам геофизических и геологических исследований:

$$K_{xy1} \leq K_{xy2} \leq \dots \leq K_{xyN}, \quad K_{z1} \leq K_{z2} \leq \dots \leq K_{zN}, \quad (1)$$

где $2N$ — число идентифицируемых параметров. Упорядоченность параметров (1) сохраняется в течение всего процесса минимизации. Другой особенностью этого алгоритма является то, что переменные минимизации могут не совпадать с идентифицируемыми параметрами. Группе идентифицируемых параметров может быть поставлена в соответствие одна переменная минимизации. В ходе итерационного процесса число переменных минимизации меняется. Предлагаемый алгоритм относится к методам квази-ньютонского типа, в основе которых лежит уравнение [5–7]

$$Hs = g, \quad (2)$$

где $H = A^T A$ — приближенная матрица вторых производных, $A = \left\{ \frac{\partial h_i}{\partial X_j} \right\}$ — матрица чувствительности, X_1, \dots, X_{2M} — переменные минимизации, $2M$ — число переменных минимизации ($M \leq N$), $s = (s_1, \dots, s_{2M})$ — вектор отклонений Гаусса–Ньютона, $g = (g_1, \dots, g_{2M})$ — градиент функции невязки, $g_i = \frac{\partial J}{\partial X_i}$ — производная функции невязки по i -й переменной. Новые значения переменных минимизации $X = (X_1, \dots, X_{2M})$ на каждой итерации представляются в виде $X^{\text{new}} = X - \rho s$, где ρ — величина шага.

При построении алгоритма минимизации используются запасы чувствительности [8, 9]. Запишем приближенное приращение функции невязки между текущей точкой X и точкой минимума $X - s$:

$$J(X - s) - J(X) \approx -g^T(X)s + \frac{1}{2} s^T G(X)s, \quad (3)$$

где $G(X) = \left\{ \frac{\partial^2 J}{\partial X_i \partial X_j} \right\}$ — матрица Гессе. Для вектора отклонений Ньютона $s^N = G^{-1}(X)g(X)$ в окрестности минимума $J(X - s) = 0$ формула (3) приобретает вид $J(X) \approx \frac{1}{2} g^T s^N$ или

$$R^T R \approx g^T s^N = \sum_{i=1}^{2M} g_i s_i^N. \quad (4)$$

¹ Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, Казань; e-mail: elesin@mail.knc.ru, kadyirova@mail.knc.ru

Каждое слагаемое $g_i s_i^N$ в (4) характеризует приращение квадрата вектора невязки $R^T R$ за счет i -й переменной. При приближении к точке минимума функции невязки при ограниченных производных $\frac{\partial^2 h_j}{\partial X_i \partial X_i}$ имеем

$$G \rightarrow H. \tag{5}$$

Запасом чувствительности i -й переменной называется величина $P_i = s_i g_i$, где s_i — отклонения Гаусса–Ньютона. Из (4), (5) следует, что в окрестности минимума функции невязки запас чувствительности P_i характеризует потенциальную возможность i -й переменной к минимизации функции невязки. Если матрица A квадратная и невырожденная, то сумма запасов чувствительности всех переменных минимизации равна квадрату вектора невязки. Из (2) имеем $s = H^{-1}g = (A^{-1}R)^T A^T R = A^{-1}R$; тогда

$$P = \sum_{i=1}^{2M} P_i = \sum_{i=1}^{2M} s_i g_i = s^T g = (A^{-1}R)^T (A^T R) = R^T R = 2J.$$

В случае $L > 2M$ (число наблюдений больше числа переменных минимизации) сумма запасов чувствительности P не больше квадрата вектора невязки.

Алгоритм минимизации функции невязки, учитывающий сравнительную информацию.

В начале процесса минимизации $M = 1$, группе идентифицируемых параметров $\{K_{xyk}\}_{k=1}^N$ ставится в соответствие одна переменная минимизации, а группе идентифицируемых параметров $\{K_{zk}\}_{k=1}^N$ — вторая переменная. В начале каждой итерации имеются упорядоченные наборы переменных минимизации

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_M, \quad X_{M+1} \leq X_{M+2} \leq \dots \leq X_{2M}, \tag{6}$$

где каждой переменной X_j соответствует группа упорядоченных идентифицируемых параметров из (1), имеющих одинаковые значения. При выполнении условия

$$P > 2\varepsilon J, \tag{7}$$

где ε — задаваемая константа, наборы переменных (6) берутся с предыдущей итерации. Если условие (7) не выполняется, то число переменных минимизации увеличивается по сравнению с началом предыдущей итерации за счет деления каждой группы идентифицируемых параметров на две подгруппы. По переменным X_j вычисляется матрица чувствительности $A = \left\{ \frac{\partial h_i}{\partial X_j} \right\}$.

В процессе итерации переменные минимизации пересматриваются. Всем переменным минимизации X_{j_1}, \dots, X_{j_2} , имеющим одинаковые значения, ставится в соответствие одна переменная минимизации Y_j , где j_1 и j_2 — первый и последний номер переменных минимизации (6) с одинаковыми значениями. Затем последовательно перебираются допустимые разбиения каждого набора $(X_{j_1}, \dots, X_{j_2})$ на две части: $(X_{j_1}, \dots, X_{j_c})$ и $(X_{j_{c+1}}, \dots, X_{j_2})$, где $j_1 \leq j_c \leq j_2$. Разбиение считается недопустимым, если любое смещение новых переменных минимизации Y_j по отклонениям, вычисленным из уравнения (2) для Y_j , приводит к нарушению упорядоченности. Из всех допустимых разбиений выбирается разбиение с максимальным запасом чувствительности. Процедура увеличения числа переменных минимизации Y_j повторяется до тех пор, пока возрастает запас чувствительности. Все необходимые производные по переменным Y_j формируются из вычисленных производных по переменным X_j .

На каждой итерации методом золотого сечения [10] определяется минимум функции невязки $J(Y - \rho s)$ по шагу $0 \leq \rho \leq 1$ вдоль отклонений s , вычисленных из уравнения (2) для набора переменных $Y = \{Y_j\}$. В методе золотого сечения отрезок, содержащий минимум функции невязки, последовательно сокращается по результатам сравнения значений функции невязки в двух внутренних точках. В качестве внутренних точек выбираются точки золотого сечения (отношение длины всего отрезка к его большей части равно отношению большей части к меньшей). Для сохранения упорядоченности параметров контролируется условие

$$Y_j - \rho s_j \leq Y_{j+1} - \rho s_{j+1}, \tag{8}$$

где s_j — отклонение для переменной Y_j . В случае нарушения условия (8) для некоторого шага ρ из последовательности шагов, получаемой методом золотого сечения, функция невязки вычисляется следующим образом. Переменные минимизации сначала смещаются с шагом $\tilde{\rho} = \min_j \frac{Y_{j+1} - Y_j}{s_{j+1} - s_j}$ при условии $s_{j+1} - s_j > 0$, где $\tilde{\rho}$ — максимальное значение шага, при котором условие (8) не нарушается. Переменные

минимизации, принявшие одинаковые значения, объединяются, и проводится пересчет отклонений. Смещение и объединение переменных минимизации повторяется до тех пор, пока сумма выполненных шагов не станет равной ρ .

Численные примеры. Решалась модельная задача идентификации коэффициента фильтрации трехмерного неоднородного напорного пласта Ω в условиях однофазной стационарной фильтрации жидкости, описываемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0, \quad (9)$$

где K_{xy} , K_z — коэффициенты фильтрации, $h = h(x, y, z)$ — напор. Пласт Ω пятислойный (≈ 40 км \times 30 км \times 200 м), слои зонально-неоднородные. Первый слой пласта и слои со второго по пятый состоят соответственно из 11 и 15 зон однородности: $\Omega = \bigcup_{k=1}^{71} \Omega_k$. Каждая зона однородности Ω_k характеризуется двумя значениями коэффициента фильтрации K_{xyk}^{tr} и K_{zk}^{tr} . Значения коэффициента фильтрации K_{xyk}^{tr} ($k = 1, \dots, 71$) брались в пределах от $0.1 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$ до $100 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$, а значения K_{zk}^{tr} ($k = 1, \dots, 71$) — в пределах от $0.0001 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$ до $0.02 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$. В каждой зоне расположены по две наблюдательные точки. На кровле пласта заданы граничные условия 2-го рода (от $-9.2 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$ до $2 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$). Подошва и боковая поверхность непроницаемы, за исключением участка боковой поверхности пятого слоя, на котором заданы граничные условия 1-го рода: $h = 80$ м. Для дискретизации уравнения (9) использовался метод конечных элементов. Полученная в результате дискретизации система линейных алгебраических уравнений решалась методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей в виде неполного разложения Холесского [11].

Из решения уравнения (9) при заданных значениях коэффициентов фильтрации K_{xyk}^{tr} и K_{zk}^{tr} определялись значения напора в наблюдательных точках h_j^{tr} ($j = 1, \dots, L$). Затем по значениям напора $h_j^* = h_j^{\text{tr}} + \delta_j$ (δ_j — задаваемая погрешность) восстанавливались логарифмы значений коэффициента фильтрации $K = \{K_i\}_{i=1}^{142} = \{\ln K_{xyk}, \ln K_{zk}\}_{k=1}^{71}$. В процессе идентификации параметры K_{xyk}^{tr} , K_{zk}^{tr} и значения погрешностей δ_j считались неизвестными. Искомые значения идентифицируемых параметров искались при ограничениях: $0.02 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1} \leq K_{xyk} \leq 500 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$, $0.00002 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1} \leq K_{zk} \leq 0.1 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$. Начальные значения коэффициента фильтрации $K_{xy}^0 = 24.17 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$ и $K_z^0 = 0.0023 \text{ м} \cdot \text{сут}^{-1}$ определялись из минимума функции невязки при условии однородности пласта. Процесс минимизации прерывался при выполнении одного из двух критериев: 1) медленная сходимость итерационного процесса: $J(K^n) - J(K^{n+1}) < 0.01J(K^n)$ в течение трех итераций, 2) достижение заданной точности по напору в наблюдательных точках: $\Delta h_m = \max_j |h_j(K^n) - h_j^*| < 10^{-6}$ м. Условие (7) в предложенном алгоритме бралось с $\varepsilon = 0.01$.

Ниже приведены результаты сравнения предложенного (далее базового) алгоритма с одним из вариантов метода Левенберга–Марквардта [5, 10]. Для решения задачи идентификации используются различные модификации этого метода [5, 6, 10, 12].

В данной работе значения параметров на каждой итерации в методе Левенберга–Марквардта определялись по формуле $X^{\text{new}} = X - (H + \mu^k E)^{-1}g$, $\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{2}$, где μ^k — параметр Марквардта, E — единичная матрица, при этом каждая переменная минимизации соответствовала одному идентифицируемому параметру. При нарушении условия $J(X - (H + \mu^k E)^{-1}g) < J(X)$ коэффициент μ^k увеличивался в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится. Начальное значение параметра μ^0 бралось на порядок больше максимального диагонального элемента матрицы H . В начале процесса минимизации при больших значениях параметра μ^k метод Левенберга–Марквардта по своим свойствам близок к методу наискорейшего спуска. В ходе итерационного процесса по мере уменьшения параметра μ^k метод Левенберга–Марквардта приближается по своим свойствам к методу Гаусса–Ньютона.

На рис. 1–5 приведены значения функции невязки J и среднеквадратического отклонения логарифмов значений коэффициента фильтрации от истинных значений

$$\Delta \ln K_{xyz}^n = \left[\sum_{k=1}^{71} \frac{(\ln K_{xyk}^{\text{tr}} - \ln K_{xyk}^n)^2 + (\ln K_{zk}^{\text{tr}} - \ln K_{zk}^n)^2}{142} \right]^{1/2}$$

по итерациям для задач без погрешности ($\delta_j = 0$) и с погрешностями $\delta_j = 0.1, 0.01, -0.1, -0.01: 1$ — метод Левенберга–Марквардта (■), 2 — базовый алгоритм (◆), 3 — алгоритм А1 (●). Алгоритм А1 отличается

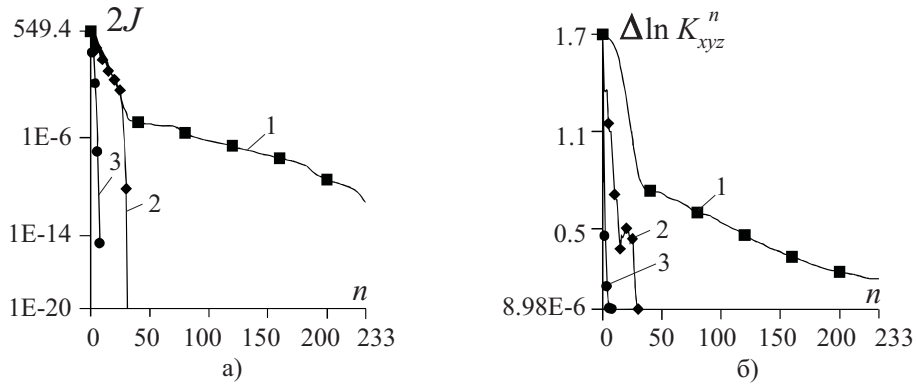


Рис. 1. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднее квадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^n$, полученные при погрешности $\delta_j = 0$

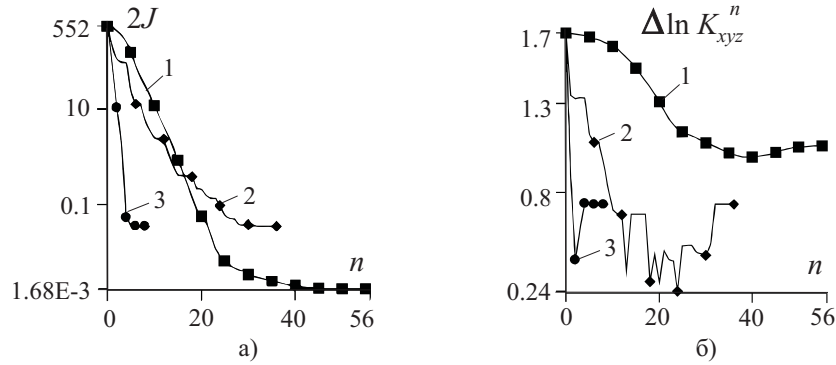


Рис. 2. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднее квадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^n$, полученные при погрешности $\delta_j = 0.1$

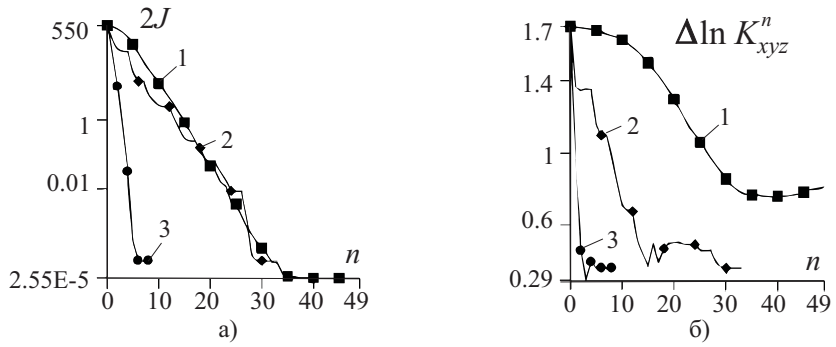


Рис. 3. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднее квадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^n$, полученные при погрешности $\delta_j = 0.01$

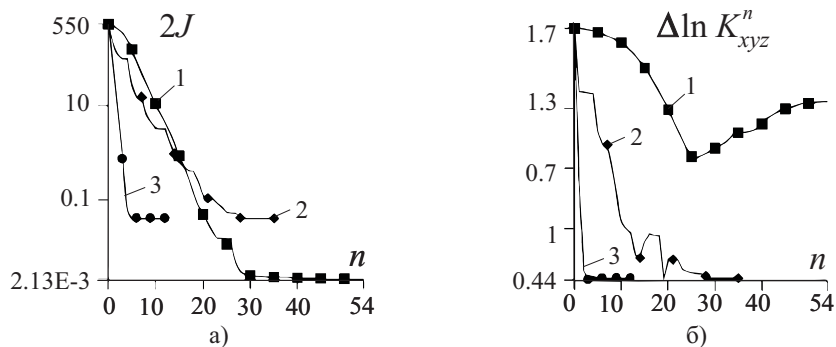


Рис. 4. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднее квадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^n$, полученные при погрешности $\delta_j = -0.1$

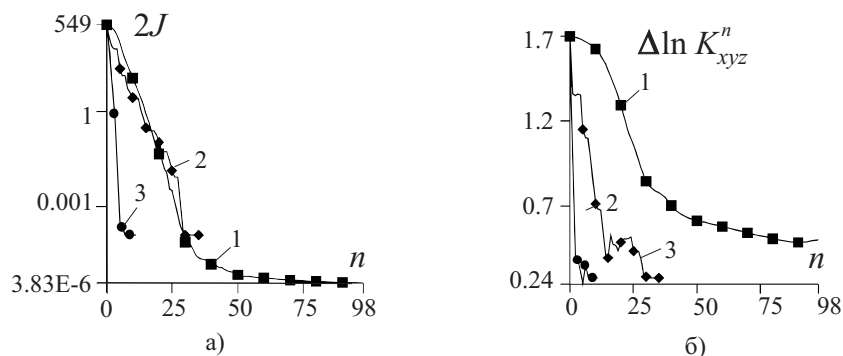


Рис. 5. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднее квадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^n$, полученные при погрешности $\delta_j = -0.01$ от базового тем, что в начале процесса минимизации $M = N$, а каждому идентифицируемому параметру ставится в соответствие одна переменная минимизации.

Из приведенных на рис. 1–5 результатов видно, что решения, полученные с учетом априорной сравнительной информации, более устойчивы к погрешностям в замерах напора по сравнению с решениями, полученными методом Левенберга–Марквардта.

Различные изменения базового алгоритма к существенному улучшению результатов не привели. В качестве примера на рис. 6–8 приведены результаты, полученные по алгоритмам А2 и А3 без погрешности ($\delta_j = 0$) и с погрешностями $\delta_j = 0.1, 0.01$. Алгоритм А2 отличается тем, что из всех допустимых разбиений наборов переменных минимизации выбирается разбиение с максимальной суммой абсолютных значений производных функции невязки $\left| \frac{\partial J}{\partial Y_{k_1}} \right| + \left| \frac{\partial J}{\partial Y_{k_2}} \right|$, где Y_{k_1} и Y_{k_2} получены из переменной Y_k . Вариант А3 отличается тем, что в начале каждой итерации переменные минимизации с одинаковыми значениями не объединяются в группы: 1 — алгоритм А3 (■), 2 — алгоритм А2 (◆), 3 — базовый алгоритм (●).

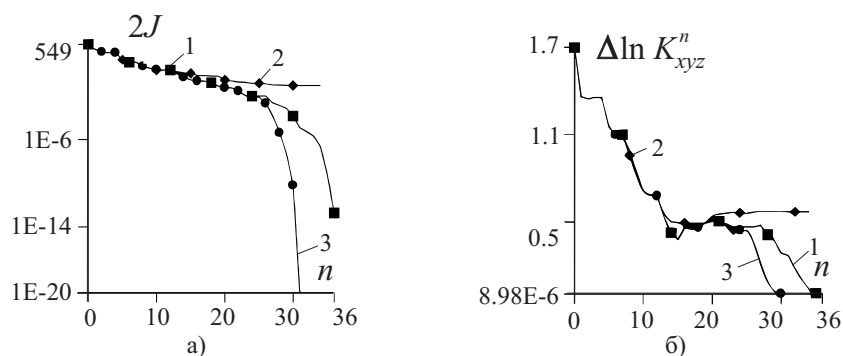


Рис. 6. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднее квадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^n$, полученные при погрешности $\delta_j = 0$

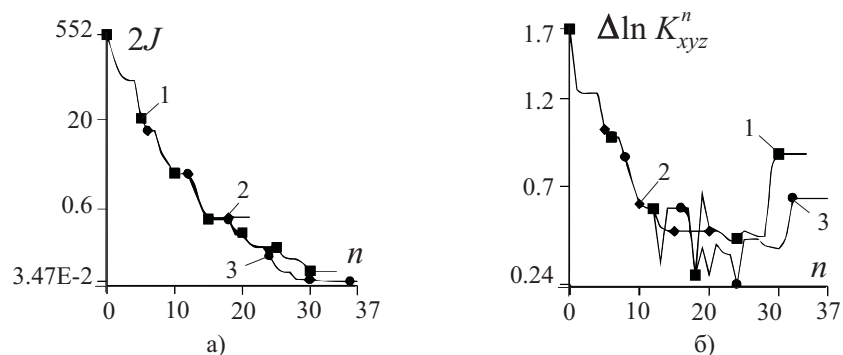


Рис. 7. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднее квадратическое отклонение $\Delta \ln K_{xyz}^n$, полученные при погрешности $\delta_j = 0.1$

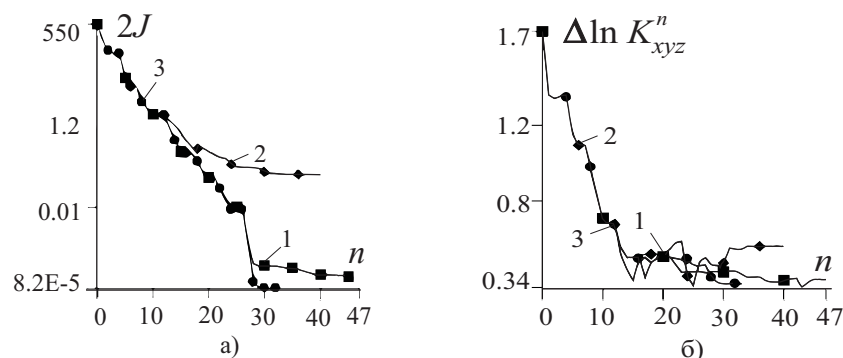


Рис. 8. Удвоенная функция невязки $2J$ и среднеквадратическое отклонение $\Delta \ln K^{\ln}_{xyz}$, полученные при погрешности $\delta_j = 0.01$

Заключение. В работе предложен новый алгоритм минимизации функции невязки квазиньютоновского типа, учитывающий упорядоченность значений параметров. Особенностью этого алгоритма является то, что упорядоченность параметров сохраняется в течение всего процесса минимизации. Число переменных минимизации может быть значительно меньше числа идентифицируемых параметров и увеличиваться постепенно в процессе минимизации. При большом числе идентифицируемых параметров это позволяет существенно уменьшить время решения задачи.

Предложенный алгоритм апробирован при численном решении модельных задач идентификации коэффициента фильтрации трехмерного неоднородного пласта в случае напорной фильтрации жидкости. Значения коэффициента фильтрации определялись итерационно по значениям напора в наблюдательных точках в процессе минимизации функции невязки. Применение предложенного алгоритма, учитывающего упорядоченность параметров, позволяет улучшить достоверность результатов идентификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М: Наука, 1986.
3. Морозов В.А. Алгоритмические основы методов решения некорректно поставленных задач // Вычислительные методы и программирование. 2003. 4, № 1. 134–145.
4. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: Едиториал, 2002.
5. Sun N.-Z. Inverse problems in groundwater modeling. Dordrecht: Kluwer, 1994.
6. Дэниелс Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
7. Yeh W.W-G. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: the inverse problem // Water Resour. Res. 1986. 22, N 2. 95–108.
8. Мазуров П.А., Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш. Запасы чувствительности в задачах идентификации коэффициента фильтрации трехмерных пластов // Вычислительные методы и программирование. 2004. 5, № 1. 50–61.
9. Мазуров П.А., Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш. К расположению наблюдательных точек в задачах идентификации коэффициента фильтрации неоднородного пласта // Вычислительные методы и программирование. 2005. 6, № 1. 105–114.
10. Летова Т.А., Пантелеев А.В. Экстремум функций в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 1998.
11. Hill M.C. Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure // Water Resour. Res. 1990. 26, N 9. 1961–1969.
12. Hill M.C. Methods and guidelines for effective model calibration. US Geological Survey Water-Resource Investigations, Report 98–4005. Denver, Colorado, 1998.

Поступила в редакцию
28.11.2007