УДК 517.958:519.633.6

О ПРИБЛИЖЕННЫХ УСЛОВИЯХ НА ОТКРЫТОЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

А. Р. Майков[1]

При численном моделировании нестационарных процессов в пространственно-неограниченных областях в ряде случаев удается свести исходную задачу к задаче в ограниченной подобласти, поставив некоторые условия на так называемой открытой границе, которая отделяет подобласть от остальной части области. Это позволяет существенно снизить требования к ресурсам вычислительной системы. Один из перспективных подходов к построению таких условий основан на аппроксимации ядер операторов свертки по времени в точных соотношениях, связывающих решение исходной задачи и его производные на открытой границе. С обоснованием корректности получаемых в результате приближенных условий, а также с выбором численных методов и оптимальных параметров для их реализации связан ряд вопросов, требующих аналитического исследования. Эти вопросы рассматриваются в статье на примере модельной задачи.

1. Начально-краевые задачи в неограниченных областях и условия на открытой границе. Необходимость применения численных методов для решения уравнений и систем уравнений эволюционного типа в неограниченных областях пространства $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ возникает при моделировании физических процессов различной природы. Сеточные методы позволяют использовать при численных расчетах достаточно общие физические модели, не прибегая к не всегда оправданным предположениям о механизмах моделируемых процессов. Однако неограниченность пространственной области (будем называть ее Ω) делает, как правило, невозможной непосредственную реализацию сеточных методов на сетках, покрывающих всю Ω. В тех случаях, когда скорость распространения возмущений в системе конечна, а начальные возмущения и источники локальны, можно, в принципе, использовать сетки с переменным числом ячеек, расширяющиеся вместе с фронтом волны, но требования к ресурсам вычислительной системы при этом нередко оказываются неприемлемо высокими. Во многих случаях, однако, оказывается возможным свести исходную задачу к вспомогательной задаче в некоторой фиксированной ограниченной подобласти $\Omega_0 \in \Omega$, поставив на $S_{\text{open}} = \partial\Omega_0 \backslash \partial\Omega$ те или иные граничные условия. Эту "нефизическую" часть границы Ω_0 называют обычно *фиктивной*, или *открытой*, или *искусственной* границей, а соответствующие условия — *условиями на открытой границе*, или *условиями излучения*, или *безотражательными*, а также *условиями полной прозрачности* либо *искусственными граничными условиями*. Подчеркнем, что при таком подходе решение исходной задачи, поставленной в Ω, может быть отлично от нуля в $\Omega_1 := \Omega \backslash \overline{\Omega}_0$.

Вопросы постановки условий на открытой границе и построения алгоритмов их численной реализации рассматривались для уравнений и систем уравнений гиперболического типа и для уравнений параболического типа — см. обзоры [20, 21, 25], а также [5, 12, 2, 9, 16]. Значительная часть такого рода исследований относится к случаям, когда в Ω_1 система описывается уравнением вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + \gamma^2 U = 0 \quad (\gamma \geqslant 0), \tag{1}$$

которое служит линейной моделью для нестационарных волновых процессов в средах различной физической природы с дисперсией ($\gamma > 0$ — уравнение Клейна–Гордона) или без дисперсии ($\gamma = 0$ — волновое уравнение) [19, 18, 11, 2, 15, 25, 24].

Точные условия на открытой границе являются, как правило, нелокальными как по пространственным переменным, так и по времени. По этой причине их непосредственная реализация в численных расчетах приводит к тем же проблемам, что и использование сеток, расширяющихся вместе с фронтом волны (подробнее об этом см. в п. 1.2). На практике вместо точных условий чаще используются те или иные

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Воробьевы горы, 119992, г. Москва; e-mail: a_maikov@phys.msu.ru

приближенные. Известен целый ряд вариантов приближенных условий на открытой границе. Настоящая работа посвящена одному из подходов к построению таких условий. Следуя [24, 21, 23], поясним вкратце его идею.

1.1. Пусть $T \in (0, \infty]$ и $U(\boldsymbol{x}, t)$ — решение (возможно, слабое) некоторой начально-краевой задачи в $\Omega \times (0, T)$, которую в дальнейшем будем называть задачей I, причем известно, что $U(\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяет в $\Omega_1 \times (0, T)$ уравнению (1), начальным условиям

$$U(\boldsymbol{x}, 0)\Big|_{\boldsymbol{x}\in\Omega_1} = \frac{\partial U}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0)\Big|_{\boldsymbol{x}\in\Omega_1} \equiv 0 \tag{2}$$

и линейным однородным граничным условиям с постоянными коэффициентами на $\partial\Omega_1 \backslash S_{\text{open}}$. Вид уравнений, описывающих $U(\boldsymbol{x}, t)$ в Ω_0, уточнять пока не будем, поскольку он существен для обоснования, но не для самой постановки условий на открытой границе.

Предположим, что $\partial\Omega_1$ представляет собой координатную поверхность в одной из систем координат — прямоугольной декартовой (x^1, x^2, x^3), цилиндрической (ρ, φ, z) или сферической (r, θ, φ), и что уравнение (1) может быть сведено в Ω_1 методом разделения переменных к последовательности уравнений вида[2]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \Big(\gamma_j^2 + \frac{\mu_j^2 - 1/4}{x^2}\Big) u_j = 0 \quad (x > x_1, \quad t \in (0, T); \quad \gamma_j, \mu_j \geqslant 0), \tag{3}$$

где $x = x^1$, $x = \rho$ или $x = r$ — “продольная” координата в Ω_1, $u_j(x, t)$ — коэффициенты разложения соответственно U, $\sqrt{\rho}\, U$ или $r\, U$ по подходящей системе собственных функций, связанной в каждом случае с операторами дифференцирования по остальным, “поперечным” координатам. Открытой границе при этом соответствует значение $x = x_1$. Из (2) следует, что

$$u_j(x, 0) = \frac{\partial u_j}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (x > x_1). \tag{4}$$

1.2. Пусть γ, $\mu \geqslant 0$ и $x > 0$. Можно показать (см. также п. 2.2), что при условии достаточной гладкости решения (3), (4) и их производные связаны следующими соотношениями:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial u_j}{\partial x}(x_1, t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(t - \tau; x_1, \gamma_j, \mu_j) u_j(x_1, \tau)\, d\tau = 0, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \mu) := (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \mathfrak{K}(s; x_1, \gamma, \mu)\, ds \tag{6}$$

и $\mathfrak{K}(s; x, \gamma, \mu)$ — аналитическая при $\operatorname{Im} s > 0$ и непрерывная при $\operatorname{Im} s \geqslant 0$ функция, заданная при $s > \gamma$ равенством

$$(2\pi)^{1/2} \mathfrak{K}(s; x_1, \gamma, \mu) := \sqrt{s^2 - \gamma^2}\, \frac{H^{(1)}_{\mu+1}\big(\sqrt{s^2 - \gamma^2}\, x\big)}{H^{(1)}_{\mu}\big(\sqrt{s^2 - \gamma^2}\, x\big)} + i\, s - \frac{\mu + 1/2}{x},$$

в котором для всех входящих в него многозначных функций берутся значения их главных ветвей. Отметим сразу, что

$$\mathfrak{K}(-s; x_1, \gamma, \mu) = \overline{\mathfrak{K}(s; x_1, \gamma, \mu)} \tag{7}$$

для всех действительных s. Соотношения (5), (6) можно использовать в качестве точных условий на открытой границе при постановке начально-краевой задачи в Ω_0, дополнив ими исходные условия на

[2] Если $d = 3$ и U удовлетворяет на $\partial\Omega_1 \backslash S_{\text{open}}$ однородным условиям I, II или III рода, то примерами областей, для которых возможен переход от (1) к (3), служат в прямоугольных декартовых координатах полубесконечный регулярный волновод произвольного сечения, а в цилиндрических и сферических — полубесконечные рупоры; такой областью является и внешность шара $r > r_0$, а также полупространство $x^1 > 0$, если U удовлетворяет в этом полупространстве условиям периодичности по x^2 и по x^3. Если $d = 2$, то примерами могут служить плоские аналоги перечисленных областей.

"физической" части $\partial\Omega_0$ — поверхности $\partial\Omega_0 \backslash S_{\text{open}}$. Нелокальный характер условий (5), (6) выражается в том, что в них входят значения решения $U(\boldsymbol{x}, t)$ и его производных в различных точках открытой границы и в различные моменты времени $\tau \in [0, t]$. При реализации алгоритмов, основанных на непосредственной дискретизации интеграла свертки в (5), потребовалось бы хранить информацию о решении и его производных на открытой границе на всех предшествующих слоях временно́й сетки.

Более экономичными оказываются алгоритмы, основанные на аппроксимации ядер $\mathcal{K}^{(j)}(t; x_1, \gamma, \mu)$ функциями вида

$$\widetilde{\mathcal{K}}^{(j)}(t; x_1, \gamma, \mu) = \sum_{n=1}^{N^{(j)}} c_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu) e^{-\sigma_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu)t}, \tag{8}$$

где $c_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu)$ и $\sigma_n^{(j)}(x_1, \gamma, \mu)$ — комплексные константы. Рассмотрим в Ω_0 начально-краевую задачу для тех же уравнений и с теми же граничными условиями на $\partial\Omega_0 \backslash S_{\text{open}}$, что и в задаче I, но с приближенными условиями на S_{open}, получающимися из точных заменой $\mathcal{K}^{(j)}$ на $\widetilde{\mathcal{K}}^{(j)}$. Будем называть эту новую задачу задачей II и использовать для ее решений обозначения $\widetilde{V}$ и $\widetilde{v}_j$ вместо U и u_j.

Зададим вспомогательные функции $I_n^{(j)}(t)$ следующим образом: $I_n^{(j)}(t) := c_n^{(j)} \int\limits_0^t e^{-\sigma_n^{(j)}(t-\tau)} \widetilde{v}_j(x_1, \tau)\, d\tau$, $n = 1, \ldots, N^{(j)}$. Тогда, как нетрудно видеть, приближенные условия

$$\frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x}(x_1, t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{K}}^{(j)}(t-\tau) \widetilde{v}_j(x_1, \tau)\, d\tau = 0 \tag{9}$$

эквивалентны следующим равенствам:

$$\frac{dI_n^{(j)}}{dt} + \sigma_n^{(j)} I_n^{(j)} = c_n^{(j)} \widetilde{v}_j(x_1, t), \tag{10}$$

$$I_n^{(j)}(0) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial t}(x_1, t) + \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x}(x_1, t) + \sum_{n=1}^{N^{(j)}} I_n^{(j)}(t) = 0. \tag{12}$$

Это делает возможным при численном решении задачи II хранить информацию о значениях $I_n^{(j)}(t)$ только на ближайшем предшествующем слое (или нескольких ближайших слоях) временно́й сетки вместо того, чтобы хранить значения $u_j(x_1, t)$ на всех слоях, начиная с $t = 0$.

Замечание 1. Условия вида (5), (6), (9) или (10) – (12) могут быть построены не только для самого уравнения (1), но и для моделей, получаемых из него при дискретизации задачи I по пространственным переменным (см., например, [9, 24]).

Замечание 2. Помимо использования (10) – (12) известны также и другие способы "локализации" условий на открытой границе с приближенными ядрами (8) [21]. Подобную "локализацию" можно также осуществить, используя при аппроксимации ядра $\mathcal{K}$ системы функций иного, отличного от $\left\{e^{-\sigma_n t}\right\}_{n=1}^N$ вида [24, 23, 21].

1.3. При обосновании корректности приближенных условий вида (9) и построении алгоритмов их численной реализации возникает ряд вопросов, которые применительно к подобным граничным условиям не решались ранее ни в рамках общей теории начально-краевых задач, ни при исследовании более частных задач, связанных с различными физическими моделями. Сформулируем здесь два из них.

1. Следует ли из существования и единственности решения $U(\boldsymbol{x}, t)$ задачи I, обладающего некоторой гладкостью, существование и единственность решения $\widetilde{V}(\boldsymbol{x}, t)$ задачи II с той же (и если иной, то какой именно) гладкостью?

2. По отношению к норме какого пространства B_{bound} функций, заданных на $(0, T)$, должна строиться аппроксимация ядра $\mathcal{K}$, чтобы из $\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{B_{\text{bound}}} \to 0$ следовала сходимость $\widetilde{V}$ к U в норме того или иного пространства B функций на $\Omega \times (0, T)$? Отметим сразу, что оценки, связывающие различные нормы сверток вида $\big(\widetilde{\mathcal{K}}(t; x_1, \gamma, \mu) - \mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \mu)\big) u(x_1, t)$ с нормами $\widetilde{\mathcal{K}}(t; x_1, \gamma, \mu) - \mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \mu)$ (см., например, [21)], важны для понимания проблемы, но не могут дать ее исчерпывающего решения, так как равенства (5)

и (9) не являются самостоятельными уравнениями, но каждое из них входит в начально-краевую задачу в качестве граничного условия.

От ответа на первый вопрос зависит выбор методов для численного решения уравнений задачи II. Ответ на второй вопрос принципиален для выбора значений коэффициентов $c_n^{(j)}$ и $\sigma_n^{(j)}$ в (8).

Перечисленные вопросы рассматривались в [23] применительно к начально-краевой задаче, поставленной на полупрямой $\Omega \equiv (x_0, \infty)$ для уравнения

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + Q(x)u = f(x,t), \tag{13}$$

где $Q(x) = \gamma^2 + q(x)$ и

$$\rho(x)\big|_{x>x_1} = k(x)\big|_{x>x_1} \equiv 1, \quad q(x)\big|_{x>x_1} \equiv 0 \tag{14}$$

(роль открытой границы при этом играет точка $x = x_1$). Цель данной работы состоит в том, чтобы обобщить результаты [23], распространив их на случай, когда функция $Q(x)$ в (13) имеет вид

$$Q(x) = \gamma^2 + \frac{\mu^2 - 1/4}{x^2} + q(x). \tag{15}$$

Задача I может сводиться в Ω к последовательности начально-краевых задач для уравнения (13) (подобно тому, как (1) сводится к уравнениям (3)) в тех случаях, когда вся область Ω имеет координатную границу того же типа, что и Ω_1, а функция U описывается в Ω_0 уравнением

$$\rho\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \operatorname{grad}(k \operatorname{div} U) + (\gamma^2 + q)U = F$$

с коэффициентами ρ, k и q, зависящими только от "продольной" координаты x (см. п. 1.1). Таким образом, начально-краевые задачи для (13)–(15) можно рассматривать как простейшие модельные задачи, исследование которых важно для лучшего понимания общих проблем корректности условий на открытой границе и выбора пространства B_{bound} при аппроксимации ядер $\mathcal{K}^{(j)}$.

2. Постановка модельной начально-краевой задачи. Точные и приближенные условия на открытой границе. Пусть V — некоторая область в $\mathbb{R}^d$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $m \in \mathbb{N}$. Через $W_p^m(V)$ будем обозначать пространство Соболева, состоящее из всех измеримых функций в V, которые вместе со своими частными производными до порядка m включительно принадлежат $L^p(V)$. Под $W_p^0(V)$ будем понимать само пространство $L^p(V)$. При этом $\|y\|_{W_p^m(V)} = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha y\|_{L^p(V)}$. Существенную точную верхнюю (нижнюю) грань измеримой функции y с областью определения M условимся обозначать через $\sup\limits_M y$ (соответственно $\inf\limits_M y$).

Через $\mathcal{F}[\cdot]$ будем обозначать как преобразование Фурье, осуществляющее изометрию $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, так и соответствующее преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Для обратных преобразований будем использовать обозначение $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$. Отметим сразу одно из свойств преобразования Фурье, которое будет использоваться в дальнейшем для получения ряда оценок.

Лемма 2.1. *Отображение $\varphi(s) \mapsto \mathcal{F}[\varphi(s)]$ представляет собой ограниченный оператор, действующий из $W_2^1(\mathbb{R})$ в $L^1(\mathbb{R})$.*

2.1. Пусть заданы константы $\gamma \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $x_0 > 0$, $x_1 \in (x_0, \infty)$, $\alpha_0 \in [0, \pi)$, $T \in (0, \infty)$, а также функции

$$\rho(x),\, q(x) \in L^\infty(x_0, \infty) \quad \text{и} \quad k(x) \in W_\infty^1(x_0, \infty), \tag{16}$$

удовлетворяющие условиям (14) и неравенствам

$$\inf_{x\in(x_0,x_1)} k(x) > 0, \qquad \inf_{x\in(x_0,x_1)} \rho(x) > 0. \tag{17}$$

Положим

$$L_x\eta := \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big) - \Big(\gamma^2 + \frac{\mu^2 - 1/4}{x^2} + q(x)\Big)\eta,$$

$$L\eta := \rho(x)\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - L_x\eta, \tag{18}$$

$$l\,[\eta] := -\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\sin\alpha_0 + \eta\cos\alpha_0. \tag{19}$$

Рассмотрим в $(x_0,\infty)\times(0,T)$ начально-краевую задачу вида

$$Lu(x,t)=f(x,t), \tag{20}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x), \tag{21}$$

$$l\,[u]\,(x_0,t)=g(t), \tag{22}$$

где

$$f(x,t)\in L^\infty\big((x_0,\infty)\times(0,T)\big),\quad g(t)\in C\big([0,T]\big),\quad u_0(x)\in C^1\big([x_0,\infty)\big),\quad u_1(x)\in C\big([x_0,\infty)\big) \tag{23}$$

являются заданными функциями, причем

$$f(x,t)\big|_{x\geqslant x_1}=u_0(x)\big|_{x\geqslant x_1}=u_1(x)\big|_{x\geqslant x_1}=0. \tag{24}$$

Как известно, решение этой задачи в $W^m_\infty\big((x_0,\infty)\times(0,T)\big)$ при $m\geqslant 2$ единственно [7]. Известны также достаточные условия существования таких решений (см. например, [7, 8]). Подчеркнем, однако, что результаты данного раздела не основываются на выполнении каких бы то ни было условий, кроме (16), (17) и самого существования решения $u(x,t)\in W^m_\infty\big((x_0,\infty)\times(0,T)\big)$.

2.2. Пусть функции $\mathfrak{K}(s;x_1,\gamma,\mu)$ и $\mathcal{K}(t;x_1,\gamma,\mu)$ определены так же, как в п. 1.2; условимся использовать для этих функций обозначения $\mathfrak{K}(s)$ и $\mathcal{K}(t)$ там, где это не вызывает недоразумений. В силу свойств функции Ханкеля [3] $\mathfrak{K}(s)$ непрерывна как функция действительной переменной s при фиксированных x_1,γ,μ и $\mathfrak{K}(s)=O(s^{-1})$ при $s\to\pm\infty$. Тем самым, $\mathfrak{K}(s)\in L^2(\mathbb{R})$, и функция $\mathcal{K}(t):=\mathcal{F}\big[\mathfrak{K}(s)\big]$ принадлежит $L^2(0,\infty)$. Но тогда $\mathcal{K}(t)\in L^1(0,T)$ для любого конечного $T>0$. Отсюда и из известной теоремы вложения для соболевских пространств видно, что равенство

$$\lambda\,[u]\,(x_1,t)=\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t)+\int\limits_0^t\mathcal{K}(t-\tau;x_1,\gamma,\mu)u(x_1,\tau)\,d\tau \tag{25}$$

при любом $T\in(0,\infty)$ задает ограниченный оператор, действующий из $W^2_\infty\big((x_0,x_1)\times(0,T)\big)$, а следовательно, и из $W^m_\infty\big((x_0,x_1)\times(0,T)\big)$ в $C\big([0,T]\big)$ при любом $m\geqslant 2$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.2. *Если ρ, k и q удовлетворяют условиям* (14), *f, g, u_0 и u_1 — условиям* (23), (24) *и функция $u(x,t)\in W^m_\infty\big((x_0,\infty)\times(0,T)\big)$ является решением* (20) – (22), *то для всех $t\in(0,T)$ выполнено равенство $\lambda\,[u]\,(x_1,t)=0$.*

Теорема 2.3. *Если выполнены условия* (16), (17), *а также условия теоремы* 2.2, *то решение задачи*

$$\begin{aligned}&Lv(x,t)=f(x,t),\\ &v(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\\ &l\,[v]\,(x_0,t)=g(t),\\ &\lambda\,[v]\,(x_1,t)=0\end{aligned} \tag{26}$$

с теми же f, g, u_0, u_1 существует и единственно в $W^m_\infty\big((x_0,x_1)\times(0,T)\big)$, причем $u(x,t)=v(x,t)$ при $x\in[x_0,x_1]\times[0,T]$.

Не приводя здесь доказательств, ограничимся лишь замечаниями о способах, которыми могут быть доказаны теоремы 2.2 и 2.3. При доказательстве первой автор использовал для $u(x,t)$ основанное на формуле Вебера [13] интегральное преобразование по переменной x (аналогично тому, как в [10] в частном случае $\mu=1/2$ использовалось преобразование Фурье), а при доказательстве второй — закон изменения энергии для уравнения, которому удовлетворяет функция $v_{\mathrm{I}}:=x^{-1/2}v$. Неположительность потока $\displaystyle\int\limits_0^T\frac{\partial v_{\mathrm{I}}}{\partial x}(x_1,t)\,\frac{\partial v_{\mathrm{I}}}{\partial t}(x_1,t)\,dt$ доказывается исходя из (26) с помощью теоремы Бохнера–Шварца. Поток $\displaystyle\Bigg(-\int\limits_0^T\frac{\partial v_{\mathrm{I}}}{\partial x}(x_0,t)\,\frac{\partial v_{\mathrm{I}}}{\partial t}(x_0,t)\,dt\Bigg)$ неположителен при $\alpha_0\in[0,\pi/2]$, но может быть положительным при

$\alpha_0 \in (\pi/2, \pi)$, однако в последнем случае для его вклада в баланс энергии имеют место оценки, сходные с использованными в § 5 гл. IV монографии [7]. Это позволяет установить единственность v, после чего остальные части утверждения теоремы 2.3 оказываются очевидными следствиями теоремы 2.2. Отметим также, что обоснование корректности использования (25), (26) в качестве точных условий на открытой границе было проведено иными способами на различном уровне строгости для многих частных случаев задачи (20) – (22) (см., например, обзорную статью [25], а также [15], [24] и [23]).

Перейдем к постановке задачи с приближенными условиями на открытой границе, которые получаются из точных условий (26) заменой $\mathcal{K}(t; x_1, \gamma, \nu)$ на некоторое приближенное ядро $\widetilde{\mathcal{K}}(t) \in L^1(0,T)$. Подчеркнем, что все результаты, приводимые в данной работе, имеют место для любых функций $\widetilde{\mathcal{K}}(t)$ из $L^1(0,T)$, хотя наибольший практический интерес представляет случай приближенных ядер вида (8) или несколько более общего вида, рассмотренного в [23].

Положим $X := (x_0, x_1)$ и

$$\widetilde{\lambda}\,[u]\,(x_1,t) := \frac{\partial u}{\partial t}\,(x_1,t) + \frac{\partial u}{\partial x}\,(x_1,t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{K}}(t-\tau) u(x_1,\tau)\, d\tau. \tag{27}$$

Равенство (27), как и (25), задает при целом $m \geqslant 2$ и любом конечном положительном T ограниченный оператор $W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big) \to C\big([0,T]\big)$. Задача с приближенными условиями на открытой границе имеет следующий вид:

$$L\widetilde{v}(x,t) = f(x,t), \tag{28}$$

$$\widetilde{v}(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t}\,(x,0) = u_1(x), \tag{29}$$

$$l\,[\,\widetilde{v}\,]\,(x_0,t) = g(t), \tag{30}$$

$$\widetilde{\lambda}\,[\,\widetilde{v}\,]\,(x_1,t) = 0. \tag{31}$$

Здесь f, u_0, u_1, g те же, что в (20) – (22).

2.3. Положим

$$B^m(T) := \Big\{ w(x,t) : \, w \in W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big), \quad \frac{\partial^j w}{\partial t^j}\,(x,0) = 0 \quad (j = 0, \ldots, m-1) \quad l\,[w]\,(x_0,t) = 0, \Big\},$$

$$B^m_{\text{bound}}(T) := \Big\{ h(t) : \, h \in W^m_\infty(0,T), \quad \frac{d^j h}{dt^j}(x,0) = 0 \quad (j = 0, \ldots, m-1) \Big\}.$$

Пространства $B^m_{\text{bound}}(T)$ и $B^m(T)$ представляют собой замкнутые подпространства пространств $W^m_\infty(0,T)$ и $W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ соответственно и поэтому являются банаховыми пространствами. Кроме того, оператор A_{imp} взятия следа функции $\varphi(x,t) \mapsto \varphi(x_1,t)$, действующий из $W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ в $W^{m-1}_\infty(0,T)$, компактен и $\|\, A_{\text{imp}} \,\| = 1$ для всех $T \in (0,\infty)$. При этом A_{imp} переводит $B^m(T)$ в $B^{m-1}_{\text{bound}}(T)$. Заметим также, что для любого решения $u \in W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ задачи (20) – (22) из (24) следует $u(x_1,t) \in B^{m-1}_{\text{bound}}(T)$.

Пусть $\mathcal{R} \in L^1(0,T)$ и $R\eta(t) := \displaystyle\int\limits_0^t \mathcal{R}(t-\tau)\eta(\tau)\, d\tau$. Нетрудно видеть, что это равенство задает в $B^m_{\text{bound}}(T)$ ограниченный оператор, причем $\|\, R \,\| = \|\, \mathcal{R} \,\|_{L^1(0,T)}$ для всех $m \geqslant 0$ и $T \in (0,\infty)$.

2.4. Положим $\widetilde{\ae}\eta(t) := \displaystyle\int\limits_0^t \big[\widetilde{\mathcal{K}}(t-\tau) - \mathcal{K}(t-\tau)\big]\eta(\tau)\, d\tau$, где $\mathcal{K}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}$ — ядра интегральных операторов точного (25) и приближенного (27) условий на открытой границе. Так как $\mathcal{K}, \widetilde{\mathcal{K}} \in L^1(0,T)$ (см. п. 2.2), то $\widetilde{\ae}$ представляет собой частный случай оператора, рассмотренного в предыдущем пункте.

Из теоремы 2.3 следует такое утверждение:

Лемма 2.4. *Пусть $u \in W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ — решение (20) – (22). Функция $\widetilde{v} \in W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ является решением задачи (28) – (31) в том и только том случае, если $w \equiv \widetilde{v} - u$ принадлежит $B^m(T)$ и удовлетворяет равенствам*

$$Lw = 0, \tag{32}$$

$$\lambda\,[w]\,(x_1,t) = -\widetilde{\ae}\, w(x_1,t) - \widetilde{\ae}\, u(x_1,t). \tag{33}$$

При исследовании задачи (32), (33) потребуется установить ряд свойств функции $\mathfrak{K}$, а также рассмотреть вспомогательную задачу с неоднородными точными условиями на открытой границе

$$Lw = 0, \tag{34}$$
$$\lambda\,[w]\,(x_1,t) = h(t), \tag{35}$$

где $h(t) \in B^{m-1}_{\text{bound}}(T)$ — некоторая заданная функция. Этому посвящены следующие два раздела статьи. Кроме того, в разделе 3 будет установлена существенная для выбора приближенного ядра $\widetilde{\mathcal{K}}(t)$ суммируемость $\mathcal{K}(t)$ на полупрямой $t > 0$.

3. Оценки $\mathfrak{K}(s)$ и суммируемость $\mathcal{K}(t)$. Всюду в данном разделе предполагается, что константы в оценках могут, вообще говоря, зависеть от параметров x_0, $x_1 > 0$, α_0, $\gamma \geqslant 0$ и $\mu \geqslant 0$.

3.1. Следующие две леммы сформулируем, не приводя их доказательств. Отметим лишь, что эти утверждения следуют из хорошо известных аналитических и асимптотических свойств функций Ханкеля (см., например, [3]) и $\sqrt{s^2-\gamma^2}$, а также (это относится к лемме 3.1) из того, что $H^{(1)}_\mu(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Лемма 3.1. *В полуплоскости* $\operatorname{Im} s \geqslant 0$ *функция* $\mathfrak{K}(s)$ *является непрерывной, аналитической при* $s \neq \pm\gamma$, *причем для* $n = 0, 1, \ldots$ *имеет место оценка вида* $\dfrac{\partial^n}{\partial s^n}\,\mathfrak{K}(s) = O\Big(\dfrac{1}{s^{n+1}}\Big)$, *равномерная относительно* $\arg s \in [0,\pi]$.

Лемма 3.2. *Существует такое* $\delta_0 > 0$, *что функция* $\mathfrak{K}(s)$ *разлагается при* $0 < |s-\gamma| \leqslant \delta_0$ *в ряды следующего вида:*

$$\mathfrak{K}(s) = \sum_{r=0}^{[\mu]} b_r (s-\gamma)^r + \sum_{r=0}^{\infty} d_r (s-\gamma)^{\beta_r}, \quad 0 < \mu \notin \mathbb{N}, \tag{36}$$

$$\mathfrak{K}(s) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{r} g_{rm} (s-\gamma)^r \ln^m (s-\gamma), \quad \mu \in \mathbb{N}, \tag{37}$$

$$\mathfrak{K}(s) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} h_{rm} (s-\gamma)^r \frac{1}{\ln^m (s-\gamma)}, \quad \mu = 0. \tag{38}$$

Здесь $[\mu]$ *означает целую часть* μ; β_r, b_r, d_r, g_{rm}, h_{rm} — *константы. При этом* $d_0 \neq 0$, β_r — *монотонно возрастающая неограниченная последовательность,* $\beta_0\big|_{\gamma>0} = \mu$, $\beta_0\big|_{\gamma=0} = 2\mu$. *Ряды можно дифференцировать почленно в области сходимости при* $s \neq \gamma$ *любое число раз. Как сами ряды* (36)–(38), *так и ряды, получаемые их почленным дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке вида* $0 < \delta \leqslant |s-\gamma| \leqslant \delta_0$ *и, кроме того, являются асимптотическими для соответствующих функций при* $s \to \gamma$.

3.2. Леммы 3.1 и 2.1 приводят к следующему утверждению:

Теорема 3.3. *Для любых* $x_1 > 0$, $\gamma \geqslant 0$ *и* $\mu \geqslant 0$ *функция* $\mathcal{K}(t) = \mathcal{F}\big[\mathfrak{K}(s)\big]$ *суммируема на полупрямой* $t > 0$.

В самом деле, пусть $\gamma > 0$, δ_0 — то же, что и в утверждении леммы 2.1, и $\chi(s)$ — любая вещественнозначная бесконечно-дифференцируемая функция на $[0,\infty)$, удовлетворяющая условиям $\chi(s)\big|_{s\in[0,1/2]} \equiv 1$ и $\chi(s)\big|_{s\geqslant 1} \equiv 0$. Функции $\mathfrak{K}^{(+\gamma)}$, $\mathfrak{K}^{(-\gamma)}$, $\mathfrak{K}^{(\infty)}$, $\mathcal{K}^{(+\gamma)}$, $\mathcal{K}^{(-\gamma)}$ и $\mathcal{K}^{(\infty)}$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}(s) := \chi\big(|s\mp\gamma|/\delta_0\big)\mathfrak{K}(s),$$
$$\mathfrak{K}^{(\infty)}(s) := \Big[1-\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)-\chi\big(|s+\gamma|/\delta_0\big)\Big]\mathfrak{K}(s),$$
$$\mathcal{K}^{(\pm\gamma)}(t) := \mathcal{F}\big[\mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}(s)\big], \quad \mathcal{K}^{(\infty)}(t) := \mathcal{F}\big[\mathfrak{K}^{(\infty)}(s)\big].$$

При этом, очевидно, $\mathcal{K}(t) = \mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) + \mathcal{K}^{(-\gamma)}(t) + \mathcal{K}^{(\infty)}(t)$. Из леммы 3.1 следует, что $\mathfrak{K}^{(\infty)}(s) \in W^1_2(\mathbb{R})$. Поэтому в силу леммы 2.1 имеем $\mathcal{K}^{(\infty)}(t) \in L^1(0,\infty)$.

Так как $\chi\big(|-s-\gamma|/\delta_0\big) = \chi\big(|s+\gamma|/\delta_0\big)$, то $\mathfrak{K}^{(-\gamma)}(s) = \overline{\mathfrak{K}^{(+\gamma)}(-s)}$ в силу (7). Поэтому $\mathcal{K}^{(-\gamma)}(t) = \overline{\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t)}$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 3.3 в случае $\gamma > 0$ остается убедиться в том, что $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(0,\infty)$.

Если $\mu = 0$, то функция $\mathfrak{K}(t)$ может быть выражена через интегралы вида

$$J^{(\pm)}(t) := \int_0^\infty \chi\big(|s'|/\delta_0\big) \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} h_{rm} (s')^r \,\frac{1}{\ln^m s'}\, e^{\mp i s' t}\, ds'.$$

Асимптотические оценки для $J^{(\pm)}(t)$ при $t \to \infty$ можно получить, основываясь на результатах [17] (см. также [14]) и утверждении леммы 3.2; оказывается, что такие рассуждения приводят к оценке

$$\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) = O\Big(\frac{1}{t\ln^2 t}\Big) \quad (t \to +\infty). \tag{39}$$

Так как для любых $\mu \geqslant 0$ справедливо

$$\mathfrak{K}^{(+\gamma)}(s) \in L^2(\mathbb{R}) \tag{40}$$

и, следовательно, $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(0,T)$, то из (39) получим, что $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ при $\mu = 0$.

В случае $\mu \in \mathbb{N}$ из леммы 3.2 следует, что $\dfrac{\partial}{\partial s}\,\mathfrak{K}(s) = O\big(\ln(s-\gamma)\big)$ при $s \to \gamma$ (чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать соответствующий ряд почленно). Отсюда и из (40) получим $\mathfrak{K}^{(+\gamma)}(s) \in W_2^1(\mathbb{R})$, поэтому $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ в силу леммы 2.1. Рассмотрим случай $0 < \mu \notin \mathbb{N}$. Положим

$$S_1(s) := \sum_{r=0}^{[\mu]} b_r(s-\gamma)^r, \quad S_2(s) := \sum_{\beta_r<1} d_r(s-\gamma)^{\beta_r}, \quad S_3(s) := \sum_{\beta_r \geqslant 1} d_r(s-\gamma)^{\beta_r}.$$

Из (36) видно, что $\mathfrak{K}(s) = S_1(s) + S_2(s) + S_3(s)$. Суммы $S_1(s)$ и $S_2(s)$ являются конечными; следовательно, ряд $S_3(s)$ обладает всеми свойствами ряда (36), перечисленными в формулировке леммы 3.2, и поэтому $\mathcal{F}\Big[\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)S_3(s)\Big] \in L^1(0,\infty)$ устанавливается аналогично тому, как было доказано $\mathcal{K}(t) \in L^1(0,\infty)$ в случае $\mu \in \mathbb{N}$ (см. выше). Суммируемость $\mathcal{F}\Big[\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)S_1(s)\Big]$ следует из теоремы Пэли–Винера. Чтобы доказать суммируемость $\mathcal{F}\Big[\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)S_2(s)\Big]$ на полупрямой $(0,\infty)$, достаточно заметить, что эта функция суммируема на $(0,T)$ для любого конечного T (поскольку $\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)S_2(s) \in L^2(\mathbb{R})$), и что $\mathcal{F}\Big[\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)(s-\gamma)^{\beta_r}\Big] = O(t^{-\beta_r-1})$ при $t \to +\infty$ (см., например, [14]). Итак, $\mathcal{K}^{(+\gamma)}(t) \in L^1(0,\infty)$ и в случае $0 < \mu \notin \mathbb{N}$. Тем самым утверждение теоремы 3.3 доказано для $\gamma > 0$. Случай $\gamma = 0$ может быть рассмотрен сходным образом, однако с тем отличием, что для представления $\mathfrak{K}$ вместо двух функций $\mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}$ потребуется одна функция аналогичного вида.

4. Задача с неоднородными точными условиями на открытой границе. Из теоремы 2.3 следует, что задача (34), (35) не может иметь в $B^m(T)$ более одного решения, если коэффициенты $\rho(x)$, $k(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям (14), (16) и (17). Теперь эти условия необходимо усилить с тем, чтобы гарантировать существование решений (34), (35) с нужными для исследования задачи (32), (33) свойствами.

4.1. Прежде всего, потребуем, чтобы вместо (16) имело место

$$\rho(x),\ k(x) \in C^2\big([x_0,x_1]\big), \quad q(x) \in C([x_0,x_1]). \tag{41}$$

Условия (14) и (17) по-прежнему будем предполагать выполненными. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d}{dx}\Big(k(x)\,\frac{dy}{dx}\Big) + \big(s^2\rho(x) - Q(x)\big)y = 0, \quad (x > x_0), \tag{42}$$

$$y(x_0,s) = \sin\alpha_0, \quad \frac{dy}{dx}\,(x_0,s) = \cos\alpha_0, \tag{43}$$

где $Q(x)$ имеет вид (15), α_0 то же, что и в (19). В силу (17) и (41) классическое решение $y(x,s)$ этой задачи Коши заведомо существует для всех $s \in \mathbb{C}$. Кроме того,

$$\frac{\partial^{j+m}y}{\partial s^j\,\partial x^m} \in C\big([x_0,x_1]\times\mathbb{C}\big) \quad (j \geqslant 0, \quad m = 0,1,2) \tag{44}$$

и $y(x,s)$ представляет собой целую функцию s при любом фиксированном $x \geqslant x_0$. Положим

$$\Lambda\,[\eta]\,(x,s) := \frac{\partial\eta}{\partial x}\,(x,s) - is\eta(x,s) + (2\pi)^{1/2}\mathfrak{K}(s)\eta(x,s).$$

Еще одно новое условие, налагаемое на $\rho(x)$, $k(x)$ и $q(x)$, имеет следующий вид:

$$\Lambda\,[y]\,(x_1,s) \neq 0 \quad \text{при} \quad s \in [0,\gamma] \quad \text{и} \quad s = ip \quad (p > 0). \tag{45}$$

Замечание 1. Из (14) следует, что при $s \neq \pm\gamma$ равенство

$$\Lambda\,[y]\,(x_1, s) = 0 \tag{46}$$

могло бы выполняться в том и только том случае, когда

$$y(x,s)\big|_{x>x_1} = C(s)\,\sqrt{x}\,H_\mu^{(1)}\big(\sqrt{s^2-\gamma^2}\,x\big), \tag{47}$$

где $C(s) \neq 0$ — некоторая константа и для многозначных функций берутся их главные ветви. Если $\operatorname{Im} s > 0$, то $y(x,s)$ вида (47) экспоненциально убывает при $x \to \infty$ и, как следует из (42) и (43), должна удовлетворять равенству

$$\int_{x_0}^{\infty} k\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|^2 dx + \int_{x_0}^{\infty} Q\,|y|^2\,dx + \frac{\sin 2\alpha_0}{2}\,k(x_0) = s^2\int_{x_0}^{\infty}\rho\,|y|^2\,dx.$$

Отсюда видно, что (46) не может иметь места при $\arg s \in (0,\pi/2)\bigcup(\pi/2,\pi)$. Если $s \in \mathbb{R}$, то решение (42) и (43) принимает только действительные значения и поэтому равенство (47) (а вместе с ним и (46)) не может выполняться при $|s| > \gamma$. Заметим также, что из (45) и (7) следует выполнение $\Lambda\,[y]\,(x,s) \neq 0$ при $s \in [-\gamma, 0)$. Из всего сказанного видно, что (45) является достаточным условием необращения $\Lambda\,[y]\,(x_1,s)$ в нуль во всей полуплоскости $\operatorname{Im} s \geqslant 0$.

Замечание 2. Физический смысл условия (45) может быть выражен требованием отсутствия резонансов в системе с локальными источниками, описываемой уравнением (20) и граничным условием (22).

4.2. Пусть выполнены условия (41), (17) и (45). Положим

$$\widehat{G}_{\mathrm{open}}(x,s) := \frac{y(x,s)}{\sqrt{2\pi}\,\Lambda\,[y]\,(x_1,s)}\,. \tag{48}$$

С помощью стандартных замены переменной

$$\xi(x) := \int_{x_0}^{x}\left[\frac{\rho(x')}{k(x')}\right]^{1/2} dx' \tag{49}$$

и подстановки $y(x,s) = \big(k(x)\,\rho(x)\big)^{-1/4} z\big(\xi(x),s\big)$ задача (42), (43) сводится к задаче Коши для уравнения вида

$$z'' + \big[s^2 - Q_1(\xi)\big]z = 0 \tag{50}$$

с $Q_1(\xi) \in C\big([x_0,x_1]\big)$. Нетрудно получить (см., например, [13]) оценки для $z(\xi,s)$ и $z'(\xi,s)$ при $\operatorname{Im} s \geqslant 0$ и $|s| \to \infty$. Вместе с оценкой леммы 3.1 для $\mathfrak{K}$ это приводит к следующему результату: $\widehat{G}_{\mathrm{open}}(x,s) = O\big(s^{-1}\big)$ при $\operatorname{Im} s \geqslant 0$ и $s \to \infty$ равномерно относительно $x \in [x_0,x_1]$ и $\arg s \in [0,\pi]$. Кроме того, из сказанного в п. 4.1 и леммы 3.1 видно, что функция $\widehat{G}_{\mathrm{open}}(x,s)$ является аналитической при $\operatorname{Im} s > 0$ для любого фиксированного x и непрерывной по совокупности переменных при $x \in [x_0,x_1]$ и $\operatorname{Im} s \geqslant 0$. Поэтому, во-первых, $\widehat{G}_{\mathrm{open}}(x,s) \in L^2(X \times \mathbb{R})$ и $\sup\limits_{x\in X}\big\|\widehat{G}_{\mathrm{open}}(x,s)\big\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$; во-вторых, функция

$$G_{\mathrm{open}}(x,t) := \mathcal{F}\big[\widehat{G}_{\mathrm{open}}(x,s)\big] \tag{51}$$

обращается в нуль при $t < 0$, причем $G_{\mathrm{open}}(x,t) \in L^2\big(X \times (0,\infty)\big)$ и $\sup\limits_{x\in X}\|\,G_{\mathrm{open}}(x,t)\,\|_{L^2(0,\infty)} < \infty$.

4.3. Обозначим через $\mathcal{G}$ подмножество $L^1(X\times\mathbb{R})$, состоящее из таких функций: $G(x,t)$: $G(x,t)\big|_{t<0} = 0$ и $\sup\limits_{x\in X}\big\|G(x,t)\big\|_{L^1(\mathbb{R})} \equiv C_G < \infty$. Норму $|||G|||$ такой функции в $\mathcal{G}$ зададим равной C_G.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* (41), (17) *и* (45), *функция* $\xi(x)$ *задана равенством* (49) *и* $\xi_1 := \xi(x_1)$. *Тогда* $G_{\mathrm{open}}(x,t) \in \mathcal{G}$ *и имеют место следующие представления:*

$$\frac{\partial^m G_{\mathrm{open}}}{\partial x^m} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\big[G_{m;\mathrm{sing}}(x,t) + G_{m;\mathrm{reg}}(x,t)\big] \quad (m = 1,2),$$
$$\frac{\partial G_{\mathrm{open}}}{\partial t} = G_{3;\mathrm{sing}}(x,t) + G_{3;\mathrm{reg}}(x,t),$$

где $G_{m;\mathrm{reg}}(x,t) \in \mathcal{G}$ *для любого* $m = 1,2,3$, *а* $G_{m;\mathrm{sing}}(x,t)$ *задается равенством вида*

$$G_{m;\mathrm{sing}}(x,t) = A_m^-(x)\delta\Big(t - \big(\xi_1 - \xi(x)\big)\Big) + A_m^+(x)\delta\Big(t - \big(\xi_1 + \xi(x)\big)\Big)$$

с некоторыми функциями $A_m^\pm(x) \in C\big([x_0.x_1]\big)$.

Не останавливаясь на технических деталях, поясним, как может быть доказано утверждение леммы 4.1. Равенство $G_{\mathrm{open}}(x,t)\big|_{t<0} = 0$ было установлено в п. 4.2. Пусть $\gamma > 0$. Функции $\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(\pm\gamma)}$, $\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(\infty)}$, $G_{\mathrm{open}}^{(\pm\gamma)}$ и $G_{\mathrm{open}}^{(\infty)}$ построим с помощью $\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)$ по $\widehat{G}_{\mathrm{open}}$ в точности так, как в п. 3.2 по $\mathfrak{K}$ были построены $\mathfrak{K}^{(\pm\gamma)}$, $\mathfrak{K}^{(\infty)}$, $\mathcal{K}^{(\pm\gamma)}$ и $\mathcal{K}^{(\infty)}$. Из (7) и (42), (43) следует, что $G_{\mathrm{open}}^{(-\gamma)}(x,t) = \overline{G_{\mathrm{open}}^{(+\gamma)}(x,t)}$, поэтому, как и в случае $\mathcal{K}$, достаточно рассмотреть $G_{\mathrm{open}}^{(+\gamma)}$ и $G_{\mathrm{open}}^{(\infty)}$. Обратимся сначала к $G_{\mathrm{open}}^{(+\gamma)}$.

Функцию $\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma)}(x,s) := \chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)\widehat{G}_{\mathrm{open}}(x,s)$ представим в виде $\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma)} = \widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;\Lambda)} \cdot \widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;y)}$, где

$$\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;\Lambda)}(s) := \frac{\chi\big(|s-\gamma|/\delta_0\big)}{\Lambda\,[y]\,(x_1,s)}, \quad \widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;y)}(x,s) := \chi\Big(\frac{|s-\gamma|}{2\delta_0}\Big)y(x,s).$$

Так как $\Lambda\,[y]\,(x_1,\gamma) \neq 0$ в силу (45), то $\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;\Lambda)}(s)$ разлагается в δ_0-окрестности γ в ряды такого же вида и с теми же свойствами, как (36) – (38), поэтому (см. п. 3.2)

$$G_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;\Lambda)} \in L^1(0,\infty). \tag{52}$$

Из (44) следует, что функции $\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}\,\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;y)}$ $(m = 0,1,2)$, $(-is)\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(+\gamma;y)}$, а также их частные производные по s непрерывны по совокупности переменных в $[x_0,x_1] \times \mathbb{R}$ и что для каждой из них $\sup\limits_{x\in X} \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ конечен. Вместе с леммой 2.1, (52) и неравенством Юнга это приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\,G_{\mathrm{open}}^{(+\gamma)} \in \mathcal{G}, \quad (m = 0,1,2), \quad \frac{\partial}{\partial t}\,G_{\mathrm{open}}^{(+\gamma)} \in \mathcal{G}. \tag{53}$$

Перейдем к функции $G_{\mathrm{open}}^{(\infty)}(x,t)$. Исследование асимптотики решения (50) и его производных $\dfrac{\partial^{j+n} z}{\partial s^j\,\partial x^n}$ $(j = 0,1;\ n = 0,1,2)$ вместе с хорошо известными асимптотическими оценками для функций Ханкеля [3] позволяет установить, что

$$\frac{\partial^m \widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(\infty)}}{\partial x^m} = \frac{(-is)^{m-1}}{\sqrt{2\pi}}\big[A_m^- e^{is(\xi_1-\xi(x))} + A_m^+ e^{is(\xi_1+\xi(x))} + \widehat{G}_m^{(\infty)}(x,t)\big] \quad (m = 1,2), \tag{54}$$

$$(-is)\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(\infty)}(x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[A_3^- e^{is(\xi_1-\xi(x))} + A_3^+ e^{is(\xi_1+\xi(x))}\big] + \widehat{G}_3^{(\infty)}(x,s), \tag{55}$$

где коэффициенты $A_m^-(x)$ и $A_m^+(x)$ $(m = 1,2,3)$ задаются следующим образом:

m	$2A_m^-$	$2A_m^+$
1	$\rho^{1/4}k^{-3/4}$	$\mp\rho^{1/4}k^{-3/4}$
2	$\rho^{3/4}k^{-5/4}$	$\pm\rho^{3/4}k^{-5/4}$
3	$k^{-1/4}\rho^{-1/4}$	$\pm\, k^{-1/4}\rho^{-1/4}$

Верхний знак в таблице относится к случаю $\sin\alpha_0 \neq 0$, нижний — к случаю $\sin\alpha_0 = 0$. При этом $\widehat{G}_m^{(\infty)}(x,s) \in C\big([x_0,x_1],\mathbb{R}\big)$ и

$$\sup_{x\in X}\big\|\widehat{G}_m^{(\infty)}(x,s)\big\|_{W_2^1(\mathbb{R})}, \quad \sup_{x\in X}\big\|\widehat{G}_{\mathrm{open}}^{(\infty)}(x,s)\big\|_{W_2^1(\mathbb{R})} < \infty. \tag{56}$$

Из (54) – (56), леммы 2.1, а также из (53) следует справедливость утверждения леммы 4.1 в случае $\gamma > 0$. Случай $\gamma = 0$ рассматривается аналогично.

4.4. Пусть $h(t) \in L^\infty(0,T)$ и $G(x,t) \in \mathcal{G}$, тогда, как следует из определения $\mathcal{G}$, интеграл

$$\int\limits_0^t G(x,t-\tau)h(\tau)\,d\tau \equiv V(x,t)$$

задает в $X \times (0,T)$ существенно ограниченную функцию, причем

$$\| V \|_{L^\infty(X\times(0,T))} \leqslant |||G||| \, \| h \|_{L^\infty(0,T)} . \tag{57}$$

Ту же функцию $V(x,t)$ можно получить, задав свертку $\{G(x,t)\}_{\rm ext} * \Big[\delta(x)\cdot\{h(t)\}_{\rm ext}\Big]$, в которой

$$\{G(x,t)\}_{\rm ext} := \begin{cases} G(x,t), & x\in[x_0,x_1],\\ 0, & x\notin[x_0,x_1], \end{cases} \qquad \{h(t)\}_{\rm ext} := \begin{cases} h(t), & t\in[0,T],\\ 0, & t\notin[0,T], \end{cases}$$

а точка обозначает прямое произведение обобщенных функций. Все сказанное о $V(x,t)$ является следствием общеизвестных свойств суммируемых функций и обобщенных функций (см., например, [4, 6]).

Далее через C будем обозначать различные, вообще говоря, константы, которые могут зависеть от x_0, x_1, α_0, γ, μ, ρ, k, q, но не зависят от T.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия* (41), (17), (45) *и* $G_{\rm open}(x,t)$ *— та же, что в* (51). *Тогда для любой* $h(t)\in B^1_{\rm bound}(T)$ *функция*

$$w(x,t) := \int_0^t G_{\rm open}(x,t-\tau)h(\tau)\,d\tau \tag{58}$$

принадлежит $W^2_\infty\big(X\times(0,T)\big)$, *причем* $\| w \|_{W^2_\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \, \| h \|_{W^1_\infty(0,T)}$.

Для доказательства леммы 4.2 достаточно убедиться в том, что свертка

$$W(x,t) = \{G_{\rm open}(x,t)\}_{\rm ext} * \Big[\delta(x)\cdot\{h(t)\}_{\rm ext}\Big],$$

а также ее слабые производные до второго порядка включительно принадлежат $L^\infty\big(X\times(0,T)\big)$, и оценить их нормы в этом пространстве. Поясним сначала, как это можно сделать для $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}$.

Так как $h(0)=0$ согласно определению $B^m_{\rm bound}(T)$, то

$$\frac{d}{dt}\{h(t)\}_{\rm ext} = \{h_1(t)\}_{\rm ext} + h(T)\delta(t), \tag{59}$$

где $h_1 = \dfrac{dh}{dt} \in L^\infty(0,T)$. Кроме того,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{G_{\rm open}\}_{\rm ext} = \Big\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,G_{\rm open}\Big\}_{\rm ext} + G', \tag{60}$$

где $G' \equiv G'(x,t)$ — некоторая обобщенная функция с носителем на объединении прямых $\{x_0\}\times\mathbb{R}$ и $\{x_1\}\times\mathbb{R}$.

Положим

$$I_{\rm sing}(x,t) := G_{2;\rm sing}(x,t) * \Big[\delta(x)\cdot\{h_1(t)\}_{\rm ext}\Big], \quad I_{\rm reg}(x,t) := G_{2;\rm reg}(x,t) * \Big[\delta(x)\cdot\{h_1(t)\}_{\rm ext}\Big]$$

(здесь $G_{2;\rm sing}$ и $G_{2;\rm reg}$ те же, что в формулировке леммы 4.1). Из (59), (60) и утверждения леммы 4.1 в силу общеизвестных правил дифференцирования свертки обобщенных функций следует, что в $X\times(0,T)$ выполнено равенство $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,W = I_{\rm sing}+I_{\rm reg}$. Так как

$$A_k^\pm(x)\delta\Big(t-\big(\xi_1\pm\xi(x)\big)\Big) * \Big[\delta(x)\cdot\{h_1(t)\}_{\rm ext}\Big] =$$

$$\begin{cases} A_k^\pm(x)h_1\Big(t-\big(\xi_1\pm\xi(x)\big)\Big)\sqrt{1+\Big[\dfrac{d\xi}{dx}(x)\Big]^2}, & \text{если } x_0\leqslant x\leqslant x_1 \text{ и } \xi\pm\xi(x)\leqslant t\leqslant T+\xi\pm\xi(x),\\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то из леммы 4.1 следует, что $I_{\rm sing}\in L^\infty(X\times(0,T))$ и что для некоторого $C<\infty$

$$\| I_{\rm sing} \|_{L^\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \, \| h_1 \|_{L^\infty(0,T)} \leqslant C \, \| h \|_{W^1_\infty(0,T)}$$

равномерно относительно $T \in (0,\infty)$. Оценка такого же вида для $I_{\rm reg}$ следует из (57) и того, что в силу леммы 4.1 $G_{2;\rm reg}(x,t) \in \mathcal{G}$. Таким образом, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \in L^\infty\big(X \times (0,T)\big)$ и

$$\left\| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \,\|\, h \,\|_{W^1_\infty(0,T)}\,. \tag{61}$$

Оценки вида (61) для других частных производных w устанавливаются аналогично. Для завершения доказательства леммы 4.2 остается заметить, что $G_{\rm open} \in \mathcal{G}$, и поэтому в силу (57)

$$\|\, w \,\|_{L^\infty(X\times(0,T))} \leqslant |||G_{\rm open}|||\, \|\, h \,\|_{W_1^\infty(0,T)}\,.$$

Из (42), (43) и (48) следует, что $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению (34) почти всюду на $X \times (0,T)$ и граничным условиям $l\,[w]\,(x_0,t) = 0$ и (35) при всех $t \in (0,T)$. В этом нетрудно убедиться, используя обычную технику преобразования Фурье обобщенных функций. Также нетрудно видеть, что $w(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям $w(x,0) = 0$ и $\dfrac{\partial w}{\partial t}\,(x,0) = 0$. Таким образом, справедлива

Лемма 4.3. *В условиях и обозначениях леммы* 4.2 *функция* $w(x,t)$ *принадлежит пространству* $B^2(T)$ *и является решением* (34), (35).

4.5. Пусть $m \geqslant 3$, $h \in B^{m-1}_{\rm bound}(T)$, функция $w(x,t)$ задается равенством (58) и $w^{(n)} \equiv \dfrac{\partial^n w}{\partial t^n}$. Рассуждения, аналогичные использованным при обосновании утверждений Лемм 4.2 и 4.3, показывают, что

$$w^{(n)} \in B^2(T), \tag{62}$$

$$Lw^{(n)} = 0, \tag{63}$$

$$\|w^{(n)}\|_{W^2_\infty\left(X\times(0,T)\right)} \leqslant C \left\| \frac{\partial^n h}{\partial t^n} \right\|_{W^1_\infty(0,T)} \leqslant C\|h\|_{W^{m-1}_\infty(0,T)} \tag{64}$$

для всех $n \leqslant m-2$. Предположим теперь, что в дополнение к (41), (17) и (45) выполнены условия

$$\rho(x),\, q(x) \in W^{m-2}_\infty(X), \quad k(x) \in W^{m-1}_\infty(X). \tag{65}$$

Тогда если $j \leqslant m-1$ и $w^{(n)}, w^{(n+1)} \in W^j_\infty\big(X \times (0,T)\big)$, то $w^{(n)} \in W^{j+1}_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ и

$$\|w^{(n)}\|_{W^{j+1}_\infty(X\times(0,T))} \leqslant C\Big(\|w^{(n)}\|_{W^j_\infty(X\times(0,T))} + \|w^{(n+1)}\|_{W^j_\infty(X\times(0,T))}\Big). \tag{66}$$

В сказанном нетрудно убедиться, продифференцировав (63) $j-1$ раз по x и выразив из полученного равенства $\dfrac{\partial^{j+1}}{\partial x^{j+1}}\, w^{(n)}$ через производные ρ, k, q, а также через $D^\alpha w^{(n)}$ и $D^\alpha w^{(n+1)}$ с $|\alpha| \leqslant j$. Благодаря (66) и (64) последовательно получим

$$w^{(n)} \in W^3_\infty\big(X \times (0,T)\big), \qquad \|\, w^{(n)} \,\|_{W^3_\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \,\|\, h \,\|_{W^{m-1}_\infty(X\times(0,T))} \qquad (n = 0, \dots, m-3);$$

$$w^{(n)} \in W^4_\infty\big(X \times (0,T)\big), \qquad \|\, w^{(n)} \,\|_{W^4_\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \,\|\, h \,\|_{W^{m-1}_\infty(X\times(0,T))} \qquad (n = 0, \dots, m-4);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$w^{(0)} \equiv w \in W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big), \quad \|\, w^{(n)} \,\|_{W^m_\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \,\|\, h \,\|_{W^{m-1}_\infty(X\times(0,T))}\,.$$

Выполнение начальных условий $\dfrac{\partial^j w}{\partial x^j}\,(x,0) = 0$ $(j = 0, \dots, m-1)$ является очевидным следствием (62). Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.4. *Пусть* $m \geqslant 2$, $h(t) \in B^{m-1}_{\rm bound}(T)$, *и выполнены условия* (41), (17), (45), *а при* $m \geqslant 3$ *также* (65). *Тогда для каждого* $T \in (0,\infty)$ *равенство* (58) *задает ограниченный оператор* $A_{\rm open}$, *сопоставляющий функции* $h \in B^{m-1}_{\rm bound}(T)$ *решение* (34), (35), *и такой, что* $B^{m-1}_{\rm bound}(T) \to B^m(T)$. *При этом* $\sup\limits_{T>0} \|\, A_{\rm open} \,\| < \infty$.

5. Существование, единственность и оценки решения задачи с приближенными условиями на открытой границе. Из теоремы 4.4, а также из свойств операторов $A_{\rm imp}$ и $\widetilde{\text{æ}}$ (см. п. 2.3), следует, что при любом $T < \infty$ оператор $A \equiv A_{\rm open}\, \widetilde{\text{æ}}\, A_{\rm imp} : B^m(T) \to B^m(T)$ компактен, причем

$$\|\, A \,\| \leqslant C \big\| \widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K} \big\|_{L^1(0,T)} \tag{67}$$

равномерно относительно T. Здесь, как и выше, через $\mathcal{K}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}$ обозначены ядра интегральных операторов точных и приближенных условий на открытой границе (см. п. 2.2). Рассмотрим уравнение вида

$$w + Aw = \varphi, \tag{68}$$

где $\varphi \in B^m(T)$ — некоторая заданная функция. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и (67) оператор A является сжимающим в $B^m\big(X \times (0,T_0)\big)$ по крайней мере для некоторого $T_0 \in (0,T]$. Следовательно, (68) не может иметь в $B^m(T)$ более одного решения. Вместе с компактностью A это приводит, как следует из альтернативы Фредгольма, к существованию решения (68). Итог сказанному подводит

Лемма 5.1. *Если $m \geqslant 2$, а ρ, k и q удовлетворяют условиям теоремы 4.4, то для любого $T > 0$, любых $\widetilde{\mathcal{K}} \in L^1(0,T)$ и $\varphi \in B^m(T)$ решение (68) в $B^m(T)$ существует и единственно.*

Кроме того, из (67) следует существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$\|\, w \,\|_{W^m_\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \,\|\, \varphi \,\|_{W^{m-1}_\infty(0,T)} \tag{69}$$

для любого T и любого решения (68), если только $\big\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\big\|_{L^1(0,T)} < \varepsilon$. В этом можно убедиться с помощью метода сжимающих отображений.

Пусть $u(x,t) \in W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ — решение исходной модельной задачи (20) – (22). Положим значение $\varphi_u(x,t) := A_{\text{open}}\, \widetilde{\text{æ}}\, u(x_1,t)$. Как следует из сказанного в п. 2.3 и теоремы 4.4, $\varphi_u \in B^m(T)$ и

$$\|\, \varphi_u \,\|_{W^m_\infty(X\times(0,T))} \leqslant C \,\big\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\big\|_{L^1(0,T)} \,\|\, u \,\|_{W^m_\infty(X\times(0,T))}\,.$$

Заметим теперь, что в силу единственности в $B^m(T)$ решения (34), (35) (см. п. 4.1) и теоремы 4.4 задача (32) и (33) эквивалентна уравнению (68) с $\varphi = \varphi_u$. В свою очередь, задача с приближенными условиями на открытой границе (31) эквивалентна (32), (33) (Лемма 2.4). Вместе с леммой 5.1 и оценкой (69) это приводит к следующему результату.

Теорема 5.2. *Пусть $m \geqslant 2$, коэффициенты ρ, k, q оператора* (18) *удовлетворяют условиям* (41), (17), (14), *а при $m \geqslant 3$ — также и условиям* (65). *Тогда*

1) *если при некотором $T > 0$ функции f, g, u_0, u_1 удовлетворяют* (23), (24) *и существует решение $u \in W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ задачи* (20) – (22), *то для любой $\widetilde{\mathcal{K}} \in L^1(0,T)$ решение $\widetilde{v}$ соответствующей задачи с приближенными условиями на открытой границе существует в $W^m_\infty\big(X \times (0,T)\big)$, причем эта задача не имеет в $W^2_\infty\big(X \times (0,T)\big)$ решений, отличных от $\widetilde{v}$;*

2) *при $\big\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\big\|_{L^1(0,T)} \to 0$ имеет место равномерная относительно $T \in (0,\infty)$ оценка*

$$\|\, \widetilde{v} - u \,\|_{W^m_\infty(X\times(0,T))} = O\Big(\big\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\big\|_{L^1(0,T)} \,\|\, u \,\|_{W^m_\infty(X\times(0,T))}\Big).$$

Замечание. Можно показать [26], что утверждение, аналогичное теореме 5.2, справедливо и для решений задачи (20) – (22) из $W^m_2\big(X \times (0,T)\big)$.

6. Заключительные замечания. Как уже было отмечено в п. 1.2, наибольший интерес для численного моделирования представляет частный случай приближенных ядер

$$\widetilde{\mathcal{K}}(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{i\sigma_n t}, \tag{70}$$

где $c_n, \sigma_n \in \mathbb{C}$. Из теоремы 5.2 видно, что использование в (27) этих ядер (а следовательно, и использование равенств вида (10) – (12) либо эквивалентных им соотношений в качестве условий на открытой границе) приводит к появлению относительной ошибки порядка $\big\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\big\|_{L^1(0,T)}$ в решении модельной задачи и его производных. Если же аппроксимация $\mathcal{K}$ функциями вида (70) строится так, что $\big\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\big\|_{L^1(0,\infty)} \to 0$, то величина относительной ошибки будет гарантирована независимо от величины временно́го интервала, на котором решается модельная задача. Возможность построения таких аппроксимаций следует из того, что линейная оболочка системы функций $\big\{e^{-i\sigma t}\big\}_{\operatorname{Im}\sigma>0}$ образует в $L^1(0,\infty)$ плотное подпространство [1].

В условиях теоремы 5.2 задача (28) – (31) всегда имеет (и притом единственное) решение $\widetilde{v}$, обладающее той же гладкостью, что и решение исходной задачи (20) – (22). Поэтому, во-первых, при численном решении задачи с приближенными условиями вида (10) – (12) дискретизация уравнения (28), начальных условий (29) и граничного условия (30) может осуществляться теми же способами, что и при численном решении (20) – (22). Во-вторых, известная гладкость $\widetilde{v}$ на открытой границе обеспечивает возможность контролировать ошибки, связанные с дискретизацией самих соотношений вида (10) – (12).

Изложенное позволяет надеяться на возможность такой реализации приближенных условий (10) – (12), что вносимая ими относительная ошибка будет находиться на уровне ошибок, связанных с дискретизацией задачи для любой величины временнóго интервала, на котором задача решается численно, и для всех решений исходной задачи. Возможность обобщения сформулированных результатов (прежде всего, теоремы 5.2) на важные для приложений случаи, когда не выполнено условие (45) и/или ρ, k, q не обладают гладкостью (41), и на пространственно-многомерный случай требует дополнительного исследования.

Автор выражает свою глубокую признательность А. Г. Свешникову за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и ряд важных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
2. *Бобылев Ю.В., Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Свешников А.Г.* Нестационарные парциальные условия излучения в задачах релятивистской сильноточной плазменной СВЧ-электроники // Физика плазмы. 1999. **25**, № 7. 615–620.
3. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Часть I. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949.
4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
5. *Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Сергеев А.С.* Установление автоколебаний в электронных СВЧ генераторах с дифракционным выводом излучения // Изв. ВУЗов, Сер. “Радиофизика”. 1986. **29**, № 1. 106–114.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
8. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953.
9. *Майков А.Р., Свешников А.Г.* Условия излучения для дискретных аналогов нестационарных уравнений Максвелла в случае неоднородной среды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. **35**, № 3. 412–426.
10. *Майков А.Р., Свешников А.Г., Якунин С.А.* Разностная схема для нестационарных уравнений Максвелла в волноводных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. **26**, № 7. 850–863.
11. *Сиренко Ю.К., Шестопалов В.П., Яшина Н.П.* Новые методы динамической линейной теории открытых волноводных резонаторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1997. **37**, № 7. 869–877.
12. *Урев М.В.* Граничные условия для уравнений Максвелла в случае произвольной зависимости от времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1997. **37**, № 12. 1489–1497.
13. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
14. *Федорюк М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
15. *Alpert B., Greengard L., Hagstrom T.* Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent wave equations // J. Comput. Phys. 2002. **180**. 270–296.
16. *Arnold A., Ehrhardt M.* Discrete transparent boundary conditions for wide angle parabolic equation in underwater acoustics // J. Comput. Phys. 1998. **145**. 611–638.
17. *Armstrong J.A., Bleistei N.* Asymptotic expansions of integrals with oscillatory kernels with logarithmic singularities // SIAM J. Math. Anal. 1980. **11**, N 2. 300–307.
18. *Givoli, D., Neta, B.* High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves // Wave Motion. 2003. **37**. 257–271.
19. *Givoli, D., Neta, B.* High-order Higdon non-reflecting boundary conditions for the shallow water equations // Naval Postgraduate School. Monterey, CA. 2002. NPS–MA–02–001.
20. *Hagstrom T.* Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves // Acta Numerica. 1999. **6**. 47–106.
21. *Hagstrom T.* New results on absorbing layers and radiation boundary conditions // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. 2003. **31**. 1–42.
22. *Van Joolen V., Givoli D., Neta B.* High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves in Cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems // Int. J. of Computational Fluid Dynamics. 2003. **17**, N 4. 263–274.
23. *Maikov A.R., Sveshnikov A.G.* On rigorous and approximate nonstationary partial radiation conditions // Journal of Communications Technology and Electronics. 2000. **45**, Suppl. 2. 196–211.
24. *Sofronov I.L.* Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation // J. Math. Anal. Appl. 1998. **221**. 92–115.
25. *Tsynkov, S. V.* Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Numer. Math. 1998. **27**. 465–532.
26. *Майков А.Р.* О приближенных условиях на открытой границе для одного класса гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. (в печати).

Поступила в редакцию
27.10.2005