

УДК 517.958:532

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДА К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ**П. Е. Морозов¹, М. Х. Хайруллин¹, М. Н. Шамсиев¹**

На основе численного моделирования трехмерного притока жидкости к горизонтальной скважине (ГС) и регуляризирующих итерационных алгоритмов предложен подход для интерпретации результатов гидродинамических исследований ГС. Задача нестационарного притока жидкости к ГС решается методом конечных элементов. Построение конечно-элементной сетки осуществляется с помощью алгоритма триангуляции Делоне. Для решения систем линейных алгебраических уравнений используются методы подпространств Крылова с предобуславливанием.

1. Введение. В настоящее время при разработке месторождений широко применяется технология бурения горизонтальных скважин. Горизонтальные скважины имеют значительно бóльшую область дренирования, чем вертикальные. Длина горизонтальных стволов может достигать нескольких сотен метров. Они являются неотъемлемым элементом разработки многих месторождений, особенно расположенных на шельфе.

Одним из основных методов определения фильтрационно-емкостных параметров пласта являются гидродинамические исследования скважин. В большинстве практически интересных случаев изменение давления при работе вертикальной скважины в конечном открытом пласте в течение длительного времени носит логарифмический характер. Для случая притока флюида к горизонтальной скважине получаются более сложные зависимости изменения давления от времени, связанные с особенностями фильтрационного течения. Несмотря на хорошо развитую теорию интерпретации кривых восстановления давления (КВД) в горизонтальных скважинах по идентифицированным режимам [1], при обработке реальных КВД возникают затруднения. Начало и окончание периодов, соответствующих отдельным режимам течения, зависят не только от параметров пласта, но и от скин-эффекта (степени загрязнения призабойной зоны пласта), эффективной длины горизонтального ствола, от его положения относительно кровли и подошвы, степени искривленности и т.д.

В работе предлагается новый подход к интерпретации результатов гидродинамических исследований горизонтальных скважин на основе методов регуляризации [2, 3]. В отличие от существующих графоаналитических методов не требуется идентификации режимов течения. Приток флюида к стволу горизонтальной скважины моделируется численно, т.е. решается трехмерная задача фильтрации.

2. Моделирование притока флюида к горизонтальной скважине. Для расчета гидродинамических характеристик и режимов работы горизонтальных скважин были предложены различные аналитические формулы [4, 5], а также подходы, основанные на численном моделировании притока жидкости к ГС. Один из распространенных подходов численного моделирования горизонтальной скважины основан на сопряжении конечно-разностной аппроксимации течения в пласте и аналитической модели течения в окрестности скважины [6]. В работе [7] для моделирования ГС, имеющей произвольную траекторию в пласте, используется рh-адаптивный метод конечных элементов. При этом ГС моделируется в виде трубы из пористого материала с большой проницаемостью (10^8 мкм²). В работе [8] рассматривается решение стационарной задачи фильтрации флюида к ГС в анизотропном пласте методом граничных элементов.

Процесс нестационарной фильтрации флюида в анизотропном пласте, вскрытом горизонтальной скважиной (рис. 1), описывается дифференциальным уравнением [5]

$$\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla(\bar{s} \nabla p), \quad (x, y, z) \in V, \quad t_0 < t < T, \quad (1)$$

при следующих начальном $p(x, y, z, t)|_{t=t_0} = p_0(x, y, z)$ и граничных условиях:

$$p|_{\partial V_1} = p_k, \quad (2)$$

¹ Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, г. Казань; e-mail: morozov@mail.knc.ru, khairullin@mail.knc.ru, shamsiev@mail.knc.ru

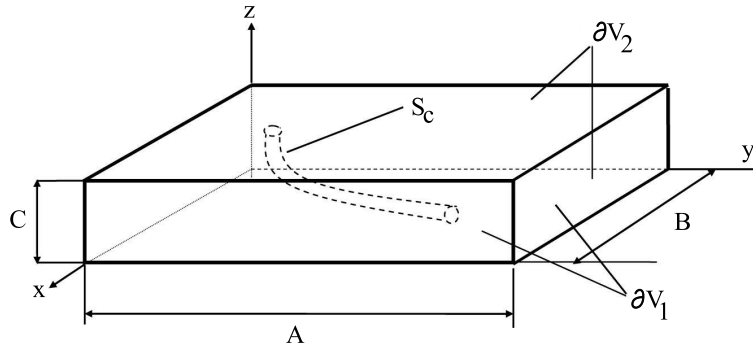


Рис. 1. Схема пласта, вскрытого горизонтальной скважиной

$$(\bar{s} \nabla p, \mathbf{n})|_{\partial V_2} = 0, \tag{3}$$

$$p|_{S_c} = p_c. \tag{4}$$

Здесь $\bar{s} = \bar{k}/\mu$, \bar{k} — тензор коэффициентов проницаемости в главных осях, μ — коэффициент динамической вязкости флюида, β^* — коэффициент упругоэластичности, p_k — пластовое давление, p_c — забойное давление, S_c — поверхность ГС, $\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2$ — внешняя граница области V (рис. 1), \mathbf{n} — единичный вектор нормали.

Задача (1)–(4) соответствует случаю, когда на ГС задано забойное давление. Если на ГС задан расход, то в этом случае граничное условие задается в виде

$$-(\bar{s} \nabla p, \mathbf{n})|_{S_c} = q(x, y, z, t), \tag{5}$$

где $q(x, y, z, t)$ — приток флюида, приходящийся на единицу поверхности ствола ГС. Приток $q(x, y, z, t)$ в условии (5) вычисляется из предположения, что давление на поверхности ствола горизонтальной скважины постоянно и $Q(t) = \int_{S_c} q(x, y, z, t) d\sigma$, где $Q(t)$ — дебит горизонтальной скважины.

Пласт, вскрытый горизонтальной скважиной, моделируется двухсвязной областью. Для разбиения области фильтрации V на элементы используется алгоритм Боуэра–Уотсона (Bowyer–Watson) [9], основанный на идее последовательного добавления точек в частично построенную триангуляцию Делоне.

Внутренняя граница представляется в виде цилиндрической полости, повторяющей траекторию скважины. Скважина разбивается на сегменты (см. рис. 2а). На основании каждого сегмента строится вписанный правильный многоугольник (рис. 2б), вершины которого принадлежат множеству узлов области. В результате триангуляции всей области поверхность скважины разбивается на треугольники (основания примыкающих к скважине тетраэдров).

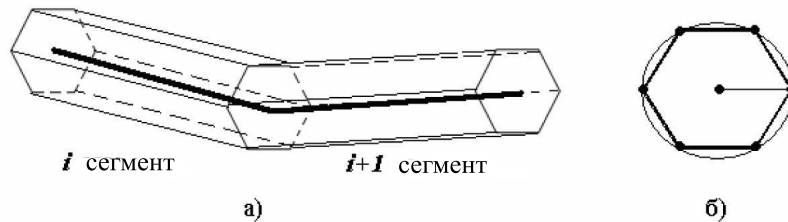


Рис. 2. Моделирование ГС: а) разбиение ГС на сегменты, б) основание сегмента

Для построения системы алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений используется процедура МКЭ в форме метода Галеркина [10]. Согласно этому методу неизвестная переменная p аппроксимируется на элементе V^e в виде $p \approx p^e = \sum_{i=1}^n p_i^e N_i^e$, где p^e — аппроксимация решения

на элементе V^e , p_i^e — неизвестные значения функции p в узлах элемента, N_i^e — базисные функции, ассоциированные с элементом.

В случае стационарной фильтрации получается система линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в виде $[K]\bar{p} = \bar{f}$, $\bar{p} = \{p_1^e, p_2^e, \dots, p_n^e\}^T$, где $K = \{k_{i,j}\}$ — глобальная матрица проводимости, \bar{p} — вектор решения, \bar{f} — вектор правой части. Дебит скважины Q можно представить как сумму притоков, приходящих на узлы, принадлежащих поверхности ствола скважины:

$$Q = \sum_{i \in S} f_i = \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^n k_{i,j} p_j. \text{ Здесь } S \text{ — множество номеров узлов на поверхности скважины.}$$

Условие постоянства давления на поверхности скважины учитывается в виде дополнительного уравнения, связывающего дебит, давление в скважине (забойное давление p_c) и давление в близлежащих узлах. Это уравнение получается суммированием строк с номерами из множества S матрицы проводимости. Коэффициенты дополнительного уравнения вычисляются следующим образом: $k_{n+1,j}^* = \sum_{i \in S} k_{i,j}$, $j = \overline{1, n}$,

$k_{n+1,n+1}^* = \sum_{j=1}^n k_{n+1,j}^*$. Отметим, что с введением дополнительного уравнения расширенная матрица становится несимметричной.

$$j \begin{bmatrix} k_{1,1} & \dots & \dots & k_{1,n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n,1} & \dots & \dots & k_{n,n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_j \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} k_{1,1} \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ k_{n,1} \end{bmatrix}} \right\} \text{ для узла на скважине } p_j = p_c$$

$$n+1 \begin{bmatrix} k_{n+1,1}^* & \dots & k_{n+1,j}^* & \dots & k_{n+1,n+1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} k_{n+1,1}^* \\ \dots \\ k_{n+1,j}^* \\ \dots \\ k_{n+1,n+1}^* \end{bmatrix}} \right\} \text{ дополнительное уравнение}$$

Граничное условие (3) удовлетворяется автоматически. Граничные условия первого рода (2), (4) соответствуют случаю, когда давление на контуре питания или на скважине задано. В результирующей матрице они учитываются обычным способом. Например, если i -й узел — узел, в котором давление задано, то в i -ю строку матрицы вносятся нули за исключением диагональной позиции, в которую помещается 1, а в i -ю позицию вектора свободных членов помещается известное значение давления.

Результирующая матрица является разреженной, положительно определенной и несимметричной в силу учета граничных условий. Для решения системы линейных алгебраических уравнений используются методы подпространств Крылова с предобуславливанием [11, 12]: метод сопряженных градиентов (CG), метод бисопряженных градиентов (Bi-CG), квадратичный метод сопряженных градиентов (CGS), метод квазиминимальных невязок (QMR), метод обобщенных минимальных невязок (GMRES), стабилизированный метод бисопряженных градиентов (Bi-CGSTAB).

Пример 1. Модельный пласт имеет следующие данные: длина и ширина пласта $A = B = 500$ м, толщина пласта $C = 25$ м, $k_x = k_y = 0,02$ мкм², $k_z = 0,01$ мкм², $\mu = 25$ мПа·с, давление на контуре $p_k = 5$ МПа, подошва и кровля пласта непроницаемы. Требуется определить забойное давление при условии, что ГС работает с постоянным дебитом $Q = 10$ м³/сут. Скважина имеет волнообразный профиль, длина ствола скважины $l = 300$ м, радиус скважины $r_c = 0,1$ м.

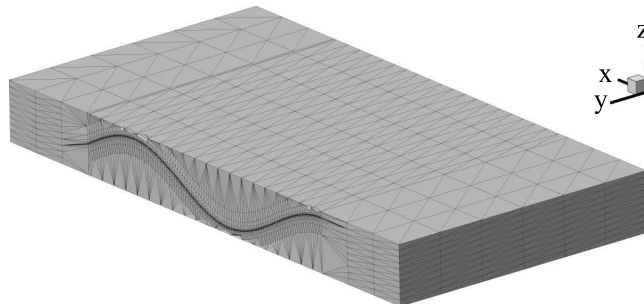


Рис. 3. Разбиение пласта на элементы

В расчетной области была построена сгущающаяся к скважине тетраэдральная сетка (рис. 3), состоящая из 66 665 элементов. Результирующая система линейных алгебраических уравнений решается методами CGS, BiCG, BiCGSTAB, BiCGSTAB-P, GMRES и QMR с предобуславливанием [12]. В качестве предобуславливающей матрицы M используется точечный предобуславливатель Якоби ($M = D$) и предобуславливатель, основанный на неполной факторизации матрицы системы уравнений ($M = ILU(0)$) [12].

Применение указанных предобусловливателей не требует больших вычислительных затрат и в большинстве случаев улучшает сходимость итерационных методов. Кроме того, рассматривается случай решения системы линейных уравнений без предобусловливателя ($M = E$).

В табл. 1 приводится расчетное время решения системы линейных уравнений и количество итераций для достижения заданной точности. Знак * в таблице означает, что количество итераций превышает заданное максимальное число итераций (бралось равным количеству неизвестных), ** — метод расходится, *** — предобусловливатель “несовместим” с данным методом.

Таблица 1

Результаты расчетов

M		CGS	BiCG	BiCGSTAB	BiCGSTAB-P	GMRES	QMR
E	итерации	**	5267	*	*	*	4447
	время (сек.)	**	34	*	*	*	59
D	итерации	*	1765	1333	1225	3833	***
	время (сек.)	*	12	11	11	180	***
$ILU(0)$	итерации	621	675	579	560	1129	***
	время (сек.)	9	10	9	9	25	***

На рис. 4 приводятся графики сходимости для методов BiCGSTAB, BiCGSTAB-P, GMRES(150). Они показывают поведение невязки решения $\|r^n\| = \|b - Ap^n\|$ в зависимости от итераций. Как следует из рис. 4, для данной задачи методы BiCGSTAB, BiCGSTAB-P с предобусловливателем $ILU(0)$ являются наиболее эффективными.

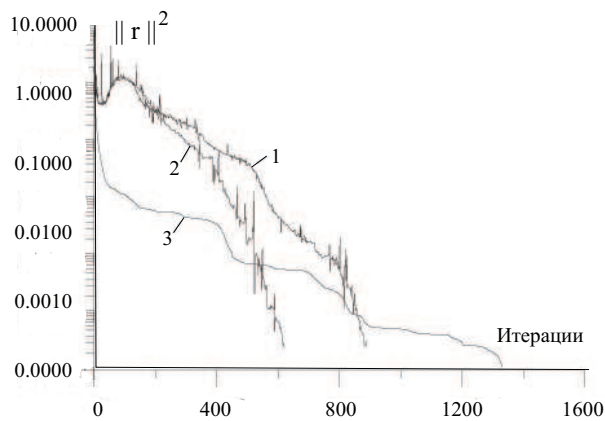


Рис. 4. Сходимость методов:
1 — BiCGSTAB, 2 — BiCGSTAB-P, 3 — GMRES

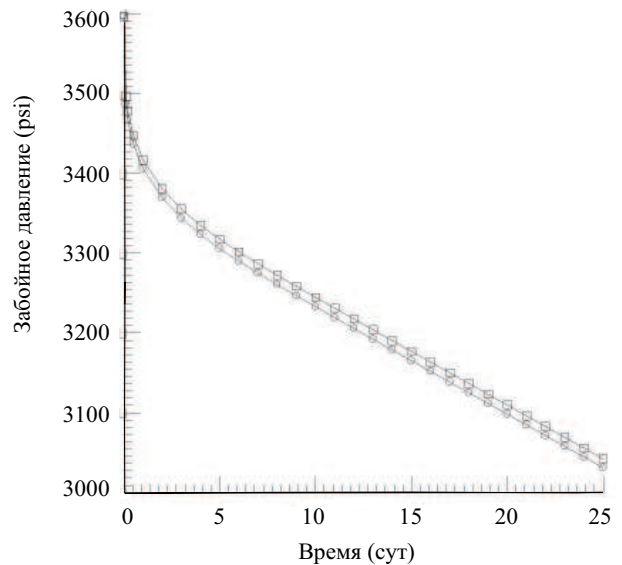


Рис. 5. Вычисленные кривые падения давления: \square — на основе МКЭ, \circ — Eclipse-100

Если профиль скважины является горизонтальным, то для моделирования притока флюида к ГС эффективным является метод конечных разностей. В этом случае ГС аппроксимируется параллелепипедом, площадь поверхности которого совпадает с площадью поверхности ствола скважины. Область фильтрации покрывается конечно-разностной сеткой, сгущающейся к стволу скважины. Система линейных алгебраических уравнений, которая получается в результате аппроксимации задачи, решается методом неполной факторизации Булеева [13].

Другой подход заключается в замене двухсвязной области фильтрации односвязной. Он состоит в сопряжении конечно-разностной аппроксимации течения в пласте и аналитической модели течения в окрестности скважины. При этом используется равномерная сетка, где для расчета притока флюида из блока (i, j, k) в скважину применяется модель Писмана для анизотропного пласта (скважина параллельна

оси x) [14]:

$$q_{i,j,k} = \frac{2\pi\sqrt{k_y k_z} \Delta x (p_{i,j,k} - p_c)}{\mu \ln(r_e/r_c)}, \quad r_e = 0,28 \frac{[(k_z/k_y)^{1/2} \Delta y^2 + (k_y/k_z)^{1/2} \Delta z^2]^{1/2}}{(k_z/k_y)^{1/4} + (k_y/k_z)^{1/4}},$$

где $p_{i,j,k}$ — значение давления в расчетном блоке, p_c — забойное давление, r_e — эквивалентный радиус, на котором давление равно $p_{i,j,k}$.

Пример 2. Рассматривается модельный пласт с данными примера 1. Скважина расположена в центре пласта параллельно кровле и подошве. Требуется вычислить дебит ГС при условии, что скважина работает с постоянным забойным давлением $p_c = 4$ МПа.

Таблица 2

Результаты расчетов

Количество узлов сетки	Модель Писмана Q , м ³ /сут	МКР Q , м ³ /сут	МКЭ Q , м ³ /сут
5040	6,535	7,454	7,502
10560	6,585	7,068	7,094
20944	6,618	6,870	6,905

В табл. 2. приводятся результаты расчетов методом конечных разностей и конечных элементов в зависимости от количества узлов сетки. В расчетах для двухсвязной области использовалась сгущающаяся к стволу скважины сетка узлов. При расчетах по модели Писмана использовалась равномерная сетка узлов.

При нестационарной фильтрации результирующая система уравнений запишется в виде

$$\left([K] + \frac{[C]}{\Delta t_n} \right) \bar{p}^{n+1} = \frac{[C]}{\Delta t_n} \bar{p}^n + \bar{f}, \quad \bar{p} = \{p_1^e, p_2^e, \dots, p_n^e\}^T,$$

где $C = \{c_{i,j}\}$ — матрица демпфирования, Δt_n — шаг по времени.

Далее выполняется сравнение результатов численного решения задачи нестационарной фильтрации флюида к ГС, полученных с помощью метода конечных элементов и пакета ECLIPSE-100.

Пример 3. Предполагается, что добывающая горизонтальная скважина находится в центре изолированного пласта, имеющего форму параллелепипеда. Скважина частично вскрывает пласт в направлении оси x . Параметры пласта и скважины, используемые при моделировании, были взяты из работы [6].

На рис. 5 представлены результаты расчетов, полученные на основе МКЭ и с помощью коммерческого пакета ECLIPSE-100. Результаты расчетов хорошо согласуются.

3. Постановка и метод решения обратной коэффициентной задачи. Рассматривается обратная задача определения главных значений тензора проводимости $\bar{s} = \bar{k}/\mu$ в случае, когда процесс фильтрации в области V описывается системой уравнений (1)–(3), (5). Дополнительно на скважине известно изменение давления:

$$p|_{S_c} = \phi(t). \quad (6)$$

Решение обратной задачи (1)–(3), (5), (6) сводится к минимизации функционала

$$J(\bar{s}) = \int_0^T (\phi(t) - p^B(t))^2 dt, \quad (7)$$

где $\phi(t)$ — наблюдаемые значения забойного давления, $p^B(t)$ — вычисленные значения забойного давления.

Итерационная последовательность для минимизации функционала (7) строится градиентным методом [2]:

$$s^{n+1} = s^n + \alpha^n d^n, \quad s^n = [s_x^n, s_y^n, s_z^n],$$

где d^n — направление спуска, α^n — шаг спуска, который вычисляется из условия $\min_{\alpha^n} J(s^n + \alpha^n d^n)$.

От задачи минимизации (7) при условии выполнения (1)–(3), (5) перейдем к задаче безусловной минимизации при помощи функционала Лагранжа ($\psi(x, y, z, t)$ — множитель Лагранжа):

$$\Phi(\bar{s}) = J(\bar{s}) + \int_0^T \int_V \psi \left(\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla(\bar{s} \nabla p) \right) dV dt.$$

Используя условие стационарности функционала Лагранжа $\delta\Phi(\bar{s}) = 0$, получим следующую систему уравнений, определяющую сопряженную краевую задачу:

$$\begin{aligned} \beta^* \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\nabla(\bar{s} \nabla \psi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (x, y, z) \in V, \\ \psi(x, y, z, T) &= 0, \quad \psi|_{\partial V_1} = 0, \\ (\bar{s} \nabla \psi, \mathbf{n})|_{\partial V_1} &= 0, \quad (\bar{s} \nabla \psi, \mathbf{n})|_{S_c} = q^*(x, y, z, t), \end{aligned}$$

где величина $q^*(x, y, z, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{S_c} q^*(x, y, z, t) d\sigma = -2(\phi(t) - p^B(t)).$$

Формулы для градиентов функционала невязки относительно главных значений тензора проводимости имеют вид

$$J'_{s_x} = - \int_0^T \int_V \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dV dt, \quad J'_{s_y} = - \int_0^T \int_V \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} dV dt, \quad J'_{s_z} = - \int_0^T \int_V \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dV dt.$$

Если два из трех главных значений тензора проводимости совпадают, например $s_h = s_x = s_y$, но $s_h \neq s_v = s_z$, то, как известно, среда называется поперечно-изотропной, или трансверсально-изотропной. В этом случае составляющие градиента функционала невязки имеют вид

$$J'_{s_h} = - \int_0^T \int_V \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dV dt, \quad J'_{s_v} = - \int_0^T \int_V \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dV dt.$$

Для однородного пласта $s_x = s_y = s_z = s$ и выражение для градиента функционала имеет вид

$$J'_s = - \int_0^T \int_V (\nabla p, \nabla \psi) dV dt.$$

Для исследования устойчивости предложенного алгоритма в модельную КВД вводились случайным образом погрешности. Результаты численных экспериментов показали, что предложенный вычислительный алгоритм устойчив относительно погрешностей исходной информации и позволяет оценить фильтрационные свойства пласта с достаточной для практики точностью. Далее рассматривается пример интерпретации результатов гидродинамических исследований в горизонтальной скважине № 1947 (Сиреневское месторождение, Татарстан).

Пример 4. При расчетах использовались следующие значения величин: длина пласта $A = 510$ м; ширина пласта $B = 400$ м; толщина пласта $C = 31$ м; пластовое давление $p_c = 3,37$ МПа; дебит скважины $Q = 8,6$ м³/сут; упругоемкость пласта $\beta^* = 2 \cdot 10^{-4}$ 1/МПа; время исследования скважины $T = 21$ сут; количество измерений забойных давлений — 23.

На рис. 6 представлен профиль скважины в продуктивном пласте. Длина горизонтальной части ствола составляет 310 м.

Результаты интерпретации кривой откачки представлены на рис. 7. Оценка параметра проводимости для однородного пласта составила $s = 5,62 \cdot 10^{-4}$ мкм²/мПа·с, для анизотропного пласта

$$s_x = s_y = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ мкм}^2/\text{мПа} \cdot \text{с}, \quad s_z = 2,9 \times 10^{-4} \text{ мкм}^2/\text{мПа} \cdot \text{с}.$$

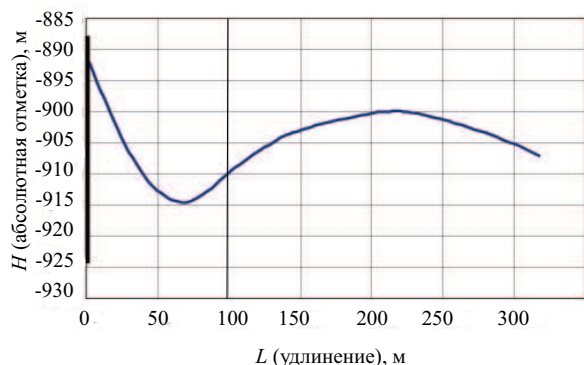
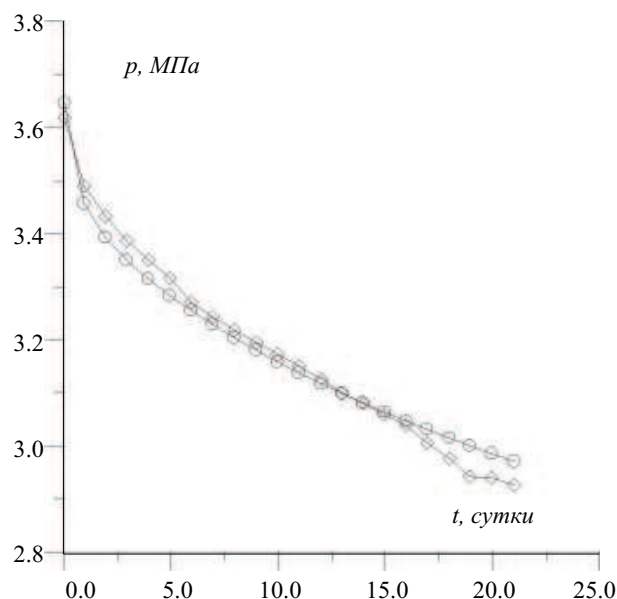


Рис. 6. Траектория ГС № 1947

Рис. 7. ГС № 1947. Интерпретация кривой откачки: \diamond — экспериментальная кривая, \circ — вычисленная кривая

4. Заключение. В данной работе предлагается подход для расчета гидродинамических характеристик ГС, основанный на моделировании горизонтального ствола скважины конечно-разностной или конечно-элементной сеткой. При интерпретации результатов гидродинамических исследований ГС данный подход позволяет оценить анизотропию пласта и не требует, в отличие от графоаналитических методов, идентификации режимов течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuchuk F.J., Goode P.A., Brice B.W., et al. Pressure transient analysis and inflow performance for horizontal wells // JPT. 1990. Aug. 974–1031.
2. Алифанов О.М., Артюгин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
3. Морозов П.Е., Садовников Р.В., Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н. Оценка фильтрационных параметров пласта по данным нестационарных исследований горизонтальных скважин // ПМТФ. 2005. № 2. 109–114.
4. Joshi S.D. Horizontal well technology. Tulsa: Pennwell Publ. Comp., 1991.
5. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
6. Wan J., Penmatcha V.R., Arabi S., Aziz K. Effects of grid systems on predicting horizontal well productivity // SPE J. 2000. Sept. 309–314.
7. Reddy M.P., Deb M.K., Bass J.M., Ning H. Numerical simulation of non-conventional wells using adaptive finite element analysis // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 1997. **150**, N 2. 109–124.
8. Ding Y., Ha-Duong T., Giroire J., Moumas V. Modelling of single-phase flow for horizontal wells in a stratified medium // Computers & Fluids. 2004. **33**, N 5. 715–727.
9. Golias N.A., Dutton R.W. Delaunay triangulation and 3D adaptive mesh generation // Fin. Elem. in Anal. and Des. 1997. **25**, N 4. 331–341.
10. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
11. Cao J., Lay J.-H. Numerical experiments of some Krylov subspace methods for black oil model // Comp. and Math. with Appl. 2002. **44**. 125–141.
12. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Boston: PWS Publishing, 2000.
13. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995.
14. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // SPE J. 1983. June. 531–543.

Поступила в редакцию
01.06.2005