

УДК 519.6

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ СО СГУЩАЮЩИМИСЯ УЧАСТКАМИ СЕТКИ**Д. А. Губайдуллин<sup>1</sup>, П. А. Мазуров<sup>1</sup>, А. В. Цепаев<sup>1</sup>

Разработан численный алгоритм решения трехмерных задач стационарной фильтрации жидкости в напорно-безнапорном пласте со сгущающимися участками сетки для многопроцессорных вычислительных систем. Показана эффективность алгоритма, которая возрастает с увеличением числа сгущающихся участков сетки.

**1. Введение.** С развитием компьютерной техники появилась возможность использования многопроцессорных вычислительных систем для решения сложных математических задач [1]. К таким задачам относятся задачи фильтрации жидкости в трехмерных пластах. Основная трудность заключается в решении систем уравнений большой размерности из-за трехмерности объекта и необходимости сгущения сетки в прискважинных зонах. При этом часто размерность сгущающихся сеток достигает размерности грубой сетки. В связи с этим встает вопрос создания алгоритмов, пригодных для распараллеливания вычислений. Одним из развивающихся направлений решения задач большой размерности является разработка методов разделения области [2–7]. Различают методы, в которых исходная область разбивается на подобласти, имеющие лишь общую границу [2–5], и методы с пересекающимися подобластями [5–7].

Для решения задач напорно-безнапорной фильтрации жидкости в трехмерных пластах с большим числом скважин, требующих сгущения сетки в прискважинных подобластях, разработан алгоритм, в котором прискважинные подобласти имеют нулевое пресечение. Алгоритм основан на независимом решении систем уравнений на сгущающихся участках сетки и новом типе согласования этих решений с решением на грубой сетке. Согласование решений достигается за счет введения дополнительных грубых сеток на сгущающихся участках. Основная грубая сетка и сгущающиеся сетки покрывают многосвязную область, а основная грубая сетка и дополнительные грубые сетки покрывают односвязную область. Положение депрессионных поверхностей на участках безнапорного режима неизвестно и определяется в процессе решения. Алгоритм построен таким образом, что при итерационном процессе все дополнительные грубые сетки обесточиваются, и итерационный процесс сходится к решению исходной задачи. Алгоритм тестировался при решении модельных задач с различным числом скважин на многопроцессорной вычислительной системе МВС-1000.

Подобный алгоритм использовался ранее при решении трехмерных задач напорной фильтрации с линейным и нелинейным законами фильтрации [8–11]. Алгоритм имеет общий характер и может быть использован в других задачах с большим числом особенностей, требующих сгущения сетки.

**2. Описание алгоритма решения задачи напорно-безнапорной фильтрации на сетках со сгущающимися участками.** На рис. 1 приведен упрощенный фрагмент области решения трехмерной задачи напорно-безнапорной фильтрации. Область решения в напорной части ограничена сверху кровлей, в безнапорной части — депрессионной поверхностью. Область решения представлена многосвязной областью, внутренние поверхности которой определены интервалами вскрытия скважин. Интервалы вскрытия скважин являются особенностями задачи, требующими сгущения сетки. Диаметр скважины на  $5 \div 6$  порядков, а толщина пласта на  $2 \div 3$  порядка меньше характерных размеров пласта в горизонтальной плоскости.

Значения напора определяются из решения уравнения фильтрации

$$\operatorname{div} K \operatorname{grad} h = 0,$$

где  $h = h(x, y, z)$  — напор,  $K = K(x, y, z)$  — коэффициент фильтрации [12]. Напор  $h$  приведен к нулевой отметке геометрической высоты  $z$ . На верхней поверхности области решения задаются граничные условия второго рода, на боковой поверхности и подошве пласта — граничные условия первого или второго рода.

<sup>1</sup> Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, г. Казань; e-mail: gubajdullin@mail.knc.ru, mazurov@mail.knc.ru, tsepaev@mail.knc.ru

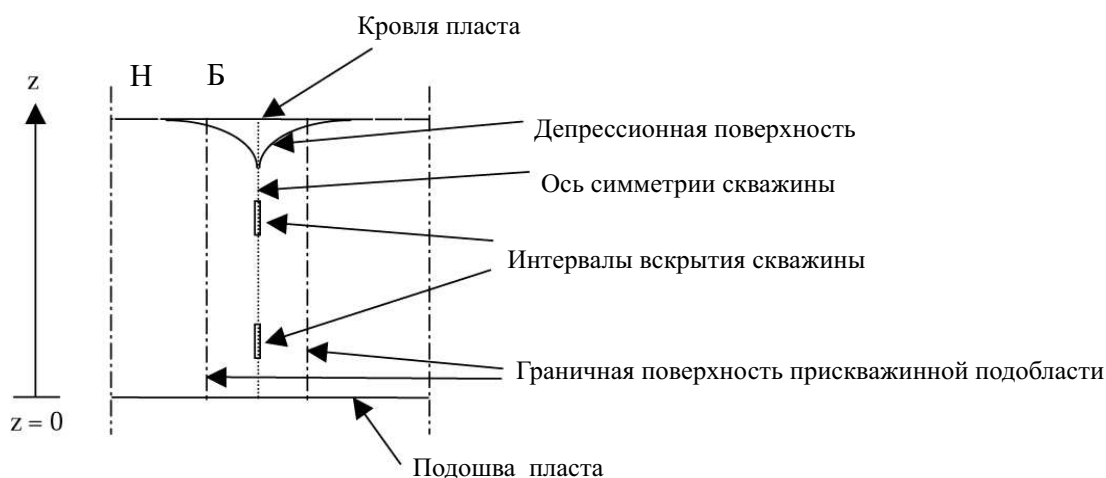


Рис. 1. Упрощенный фрагмент области решения трехмерной задачи напорно-безнапорной фильтрации: Н — напорный режим, Б — безнапорный режим,  $z$  — геометрическая высота

На поверхности напорной части выполняется условие  $h > z$ . Дополнительным условием для определения депрессионной поверхности (кроме граничных условий второго рода) является равенство напора  $h$  геометрической высоте  $z$ . Участки безнапорной фильтрации заранее неизвестны и определяются в процессе решения. Весь пласт, рассматриваемый как односвязная область, от кровли до подошвы покрывается грубой конечно-элементной сеткой. Выделяются прискважинные подобласти. От узлов грубой сетки, расположенных на граничной поверхности прискважинных подобластей, строятся сетки, сгущающиеся к интервалам вскрытия скважин. На поверхности интервалов вскрытия задаются напоры или суммарные расходы при равенстве напоров в узлах указанной поверхности. Грубая сетка вне сгущающихся участков является основной грубой сеткой, а грубые сетки на сгущающихся участках считаются дополнительными грубыми сетками. Для получения начальных значений решается задача на грубой сетке в предположении, что пласт является напорным. В каждой прискважинной подобласти решение представляется в виде суперпозиции двух решений. Одно решение определено на сгущающейся сетке, другое — на дополнительной грубой сетке. Суперпозиция решений достигается за счет расщепления напоров в общих узлах дополнительной грубой и сгущающейся сеток, расположенных на граничной поверхности прискважинной поверхности. Решение на сгущающейся сетке — с источниками, решение на дополнительной грубой сетке — без источников. В данной задаче источниками являются скважины, которые имитируются интервалами вскрытия. На каждой итерации значения напоров в указанных общих граничных узлах сносятся с дополнительных грубых сеток на сгущающиеся сетки. Далее независимо решаются системы уравнений для сгущающихся участков сетки, затем совместно решается система уравнений для основной и дополнительных грубых сеток. При этом по полученным напорам определяются участки верхней поверхности, на которой  $h < z$ , уточняются координаты  $z$  депрессионной поверхности из условия  $z = h$  и все сетки перестраиваются от депрессионной поверхности. В итерационном процессе критерий перехода от решения на грубой сетке к решению на сгущающихся сетках и наоборот основан на поведении дисбаланса уравнений основной сетки в общих узлах основной и дополнительных грубых сеток.

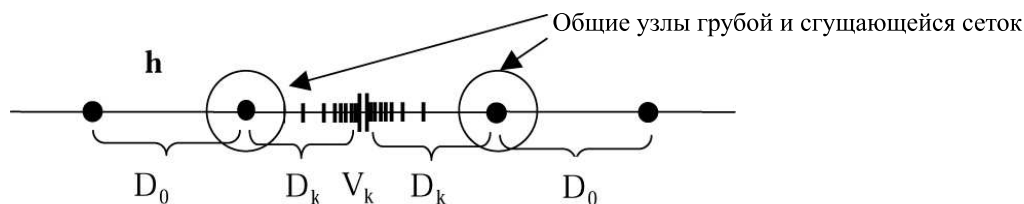


Рис. 2. Фрагмент основной сетки со сгущающимся участком для построения исходной системы уравнений:  $h$  — решение сеточной системы алгебраических уравнений,  $\bullet$  — узел грубой сетки,  $\mathbf{I}$  — узел сгущающегося участка сетки,  $D_0$  — подобласть грубой сетки,  $D_k$  — подобласть  $k$ -го сгущающегося участка сетки,  $V_k$  — подобласть интервала вскрытия скважины,  $k = 1, \dots, N$ ,  $N$  — число сгущающихся участков сетки

**3. Схема решения сеточной системы алгебраических уравнений на сетках со сгущающимися участками.** Для более ясного понимания алгоритма решения задачи напорно-безнапорной фильтрации ниже описывается алгоритм решения сеточной системы алгебраических уравнений со сгущающимися участками сетки для частного случая задачи напорной фильтрации. Описание приведено на примере упрощенной схемы; однако этот пример адекватен процедуре решения сеточной системы алгебраических уравнений в трехмерном случае. Для описания алгоритма будет достаточно фрагмента основной сетки со сгущающимся участком (рис. 2).

В процессе решения сеточной системы алгебраических уравнений необходимо определить с заданной балансовой точностью  $\varepsilon$  значения  $h$  в узлах сетки (рис. 2). Каждому неизвестному узловому значению  $h$  соответствует алгебраическое уравнение, составленное из условия выполнения балансовых соотношений в окрестности данного узла.

Решение  $h$  в подобласти  $D_0$  обозначим через  $h_1$ , а вне подобласти  $D_0$  представим в виде суперпозиции двух решений  $h_{2k}$  и  $h_{3k}$  на каждом сгущающемся участке  $k = 1, \dots, N$  (рис. 3). Значения решений  $h_{2k}$  и  $h_{3k}$  в общих узлах являются граничными условиями для этих решений.

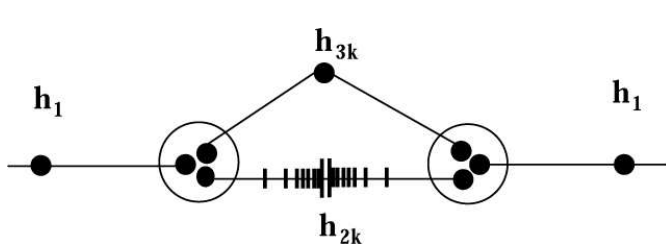


Рис. 3. Фрагмент исходной сетки с дополнительной грубой сеткой:  $h_1$  — решение на основной грубой сетке,  $h_{2k}$  — решение на сгущающейся сетке,  $h_{3k}$  — решение на дополнительной грубой сетке

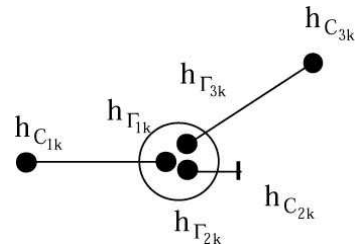


Рис. 4. Сеточный шаблон для построения балансового уравнения в общем узле, где  $h_{\Gamma_{1k}} = h_{\Gamma_{2k}} + h_{\Gamma_{3k}}$ ;  $h_{\Gamma_{1k}}, h_{\Gamma_{2k}}, h_{\Gamma_{3k}}$  — граничные значения решений  $h_1, h_{2k}, h_{3k}$  в общем узле  $k$ -го сгущающегося участка;  $h_{C_{1k}}, h_{C_{2k}}, h_{C_{3k}}$  — значения  $h_1, h_{2k}, h_{3k}$ , входящие в балансовое уравнение для общего узла

Сетка решения  $h_{3k}$  имеет размеры ячеек, сравнимые с размером ячеек подобласти  $D_0$ , и строится в односвязной области  $D_k \cup V_k$ . Типовое балансовое уравнение, соответствующее общему узлу (рис. 4), записывается в виде

$$\beta_1(h_{\Gamma_{1k}} - h_{C_{1k}}) + \beta_2(h_{\Gamma_{2k}} - h_{C_{2k}}) + \beta_3(h_{\Gamma_{3k}} - h_{C_{3k}}) = 0,$$

где  $h_{\Gamma_{1k}} = h_{\Gamma_{2k}} + h_{\Gamma_{3k}}$ ,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — коэффициенты сеточной системы алгебраических уравнений.

Система алгебраических уравнений на сетке (рис. 3) имеет множество решений в зависимости от значений  $h_{\Gamma_{3k}}$ . При  $h_{\Gamma_{3k}} = 0$  решение системы на основной сетке (рис. 3) является решением исходной системы алгебраических уравнений на сетке (рис. 2). Сеточная система алгебраических уравнений (рис. 3) решается итерационным методом, при котором на каждой итерации граничные значения  $h_{\Gamma_{3k}}$  сносятся на граничные значения  $h_{\Gamma_{2k}}$ .

В начальном состоянии решения  $h_{2k}$  на сгущающихся участках полагаются нулевыми ( $h_{2k}^0 = 0$ ), а решения  $h_1^0$  и  $h_{3k}^0$  определяются совместно на сетке (рис. 5). При этом балансовое уравнение для общего узла (рис. 4) имеет вид  $\beta_1(h_{\Gamma_{1k}}^0 - h_{C_{1k}}^0) + \beta_3(h_{\Gamma_{3k}}^0 - h_{C_{3k}}^0) = 0$ .

На  $i$ -й итерации независимо решается  $N$  систем алгебраических уравнений для определения узловых значений  $h_{2k}^i$  (рис. 6) при известных граничных значениях в общих узлах  $h_{\Gamma_{2k}}^i = h_{\Gamma_{2k}}^{i-1} + h_{\Gamma_{3k}}^{i-1}$ .

Для определения узловых значений  $h_1^i, h_{3k}^i$  решается система уравнений на грубой сетке (рис. 7) при фиксированных значениях решений  $h_{2k}^i$  в узлах сгущающихся сеток.

Балансовое уравнение для общего узла (рис. 4) при этом имеет вид  $\beta_1(h_{\Gamma_{1k}}^i - h_{C_{1k}}^i) + \beta_3(h_{\Gamma_{3k}}^i - h_{C_{3k}}^i) = C_1^i$ , где  $h_{\Gamma_{1k}}^i - h_{\Gamma_{3k}}^i = C_2^i, C_1^i, C_2^i$  — константы:  $C_1^i = -\beta_2(h_{\Gamma_{2k}}^i - h_{C_{2k}}^i), C_2^i = h_{\Gamma_{2k}}^i$ .

Итерационный процесс для определения решений  $h_{2k}^i$  (рис. 6) прерывается на  $n$ -й итерации при вы-

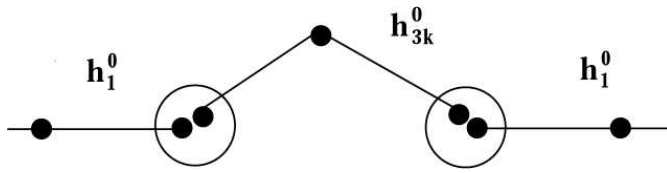


Рис. 5. Фрагмент грубой сетки для определения решений  $h_1^0$  и  $h_{3k}^0$  начального состояния

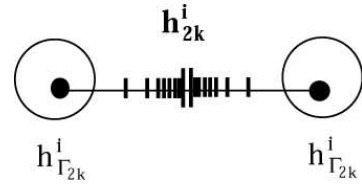


Рис. 6. Фрагмент  $k$ -го сгущающегося участка сетки для определения решения  $h_{2k}^i$  на  $i$ -й итерации

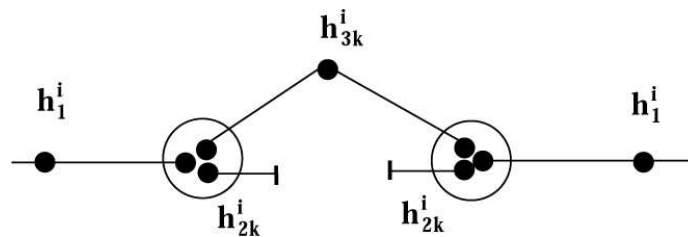


Рис. 7. Фрагмент сетки для определения решений  $h_1^i$  и  $h_{3k}^i$  на  $i$ -й итерации при фиксированных значениях решений  $h_{2k}^i$

полнении одного из следующих критериев в общих узлах грубой и сгущающейся сеток:

$$\frac{|d(h_1^{i-1}, h_{2k}^{i,n}) - d(h_1^{i-1}, h_{2k}^{i,n-1})|}{|d(h_1^{i-1}, h_{2k}^{i,n-1})|} < \alpha \quad \text{или} \quad |d(h_1^{i-1}, h_{2k}^{i,n})| < \varepsilon,$$

где  $d(h_1^{i-1}, h_{2k}^{i,n}) = \beta_1(h_{\Gamma_{2k}}^{i,n} - h_{C_{1k}}^{i-1}) + \beta_2(h_{\Gamma_{2k}}^{i,n} - h_{C_{2k}}^{i,n})$  — дисбаланс исходной системы уравнений в общем узле (рис. 2) при значении решения в общем узле, равном  $h_{\Gamma_{2k}}^{i,n}$ ;  $n$  — номер итерации при решении системы (рис. 6);  $\alpha \in (0, 1)$  — итерационный параметр. После этого полагается  $h_{2k}^i = h_{2k}^{i,n}$ . Аналогично, итерационный процесс для определения решений  $h_1^i, h_{3k}^i$  (рис. 7) прерывается на  $n$ -й итерации при выполнении одного из следующих критериев в общих узлах грубой и сгущающейся сеток:

$$\frac{|d(h_1^{i,n}, h_{2k}^i) - d(h_1^{i,n-1}, h_{2k}^i)|}{|d(h_1^{i,n-1}, h_{2k}^i)|} < \alpha \quad \text{или} \quad |d(h_1^{i,n}, h_{2k}^i)| < \varepsilon,$$

где  $d(h_1^{i,n}, h_{2k}^i) = \beta_1(h_{\Gamma_{1k}}^{i,n} - h_{C_{1k}}^{i,n}) + \beta_2(h_{\Gamma_{1k}}^{i,n} - h_{C_{2k}}^i)$  — дисбаланс исходной системы уравнений в общем узле (рис. 2) при значении решения в общем узле, равном  $h_{\Gamma_{1k}}^{i,n}$ ;  $n$  — номер итерации при решении системы (рис. 7). После этого полагается  $h_1^i = h_1^{i,n}$ ,  $h_{3k}^i = h_{3k}^{i,n}$ . В остальных узлах (рис. 2) балансовая точность проверяется при выполнении условия  $|d(h_1^{i-1}, h_{2k}^{i,n})| < \varepsilon$  или  $|d(h_1^{i,n}, h_{2k}^i)| < \varepsilon$  в общих узлах грубой и сгущающейся сеток. Итерационный процесс решения системы алгебраических уравнений (рис. 3) прерывается при достижении заданной балансовой точности  $\varepsilon$  исходной системы алгебраических уравнений (рис. 2).

**4. Постановка задачи напорно-безнапорной фильтрации.** Фильтрационное течение считается стационарным, однофазным и напорно-безнапорным. Задача решается в допустимой области  $\bar{D}$ , представляющей собой пласт, ограниченный кровлей, подошвой, боковыми поверхностями и поверхностями интервалов вскрытия скважин  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Объединение  $\bigcup_{k=1}^N V_k$  является дополнением многосвязной области  $\bar{D}$  до односвязной области. В частном случае напорной фильтрации ( $D = \bar{D}$ ) на участках  $\bar{\Gamma}_1$  и  $\bar{\Gamma}_2$  границы  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_2$  области  $\bar{D}$  задаются граничные условия соответственно первого и второго рода. Верхняя граница области  $\bar{D}$  является частью границы  $\bar{\Gamma}_2$ . При наличии участков безнапорной фильтрации верхняя граница  $\Gamma_{нб}$  области решения  $D \subset \bar{D}$  с учетом положения депрессионной поверхности определяется в процессе решения. При этом  $\Gamma_{нб} = \Gamma_n + \Gamma_6$ , где  $h > z$  на  $\Gamma_n$ ,  $h = z$  на  $\Gamma_6$ ,  $h$  — напор, приведенный к нулевой отметке  $z$ ,  $z$  — геометрическая высота. Участки  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы  $\Gamma$  области  $D$  для задания граничных условий первого и второго рода определяются положением границы  $\Gamma_{нб}$  и участков  $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ . Задача решается в следующей постановке: требуется определить область  $D \subset \bar{D}$  и поле напоров  $h$  в  $D$  из

решения уравнения

$$\operatorname{div} K \operatorname{grad} h = 0 \quad \text{в } D \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} h &= h_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_1, \\ -K \frac{\partial h}{\partial n} &= q_n \quad \text{на } \Gamma_2, \\ h &> z \quad \text{на } \Gamma_n, \quad h = z \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \quad \Gamma_n + \Gamma_\sigma = \Gamma_{n\sigma} \subset \Gamma_2, \\ \int_{S_k} -K \frac{\partial h}{\partial n} &= Q_k \quad \text{при } h|_{S_k} = \operatorname{const} \quad \text{или } h|_{S_k} = H_k, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $K$  — коэффициент фильтрации,  $h_\Gamma$  и  $H_k$  — заданные напоры,  $q_n$  — заданное значение нормальной составляющей скорости фильтрации,  $S_k$  — суммарная поверхность интервалов вскрытия  $k$ -й скважины,  $Q_k$  — расход  $k$ -й скважины,  $N$  — число скважин. Сеточную функцию  $h_\Omega$  требуется определить из решения системы (1), (2) с заданной балансовой погрешностью  $\varepsilon$  на сетке  $\Omega$ , сгущающейся в прискважинных подобластях  $D_k$  к поверхности интервалов вскрытия скважин. При этом область  $D$  представляется в виде  $D = D_0 \cup (\bigcup_{k=1}^N D_k)$ ,  $D_i \cap D_j = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $D_0 \cap D_k = \gamma_k$ . Для допустимой области  $\bar{D}$  имеют место аналогичные соотношения:  $\bar{D} = \bar{D}_0 \cup (\bigcup_{k=1}^N \bar{D}_k)$ ,  $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = 0$ ,  $i \neq j$ ,  $\bar{D}_0 \cap \bar{D}_k = \bar{\gamma}_k$ . При этом  $D_0 = \bar{D}_0 \cap D$ ,  $D_k = \bar{D}_k \cap D$ ,  $\gamma_k = \bar{\gamma}_k \cap D_k$ .

**5. Алгоритм решения задачи напорно-безнапорной фильтрации с разделением области.**

Односвязная область  $D \cup (\bigcup_{k=1}^N V_k)$  покрывается грубой конечно-элементной сеткой. Выделяются прискважинные подобласти  $D_k$ , от внешних границ которых строятся сетки, сгущающиеся к интервалам вскрытия скважин. Грубая сетка в области  $D_0$  и сгущающиеся сетки считаются основной сеткой  $\Omega$ . Грубые сетки  $\omega_k$ , покрывающие подобласти  $D_k \cup V_k$ , считаются дополнительными. Решение  $h$  в области  $D_0$  представим как  $h_1$ , а вне области  $D_0$  — как сумму двух решений  $h_{2k}$  и  $h_{3k}$ . Решения  $h_{2k}$  определяются на сетке  $\Omega$  в подобластях  $D_k$ , решения  $h_{3k}$  — на сетках  $\omega_k$  в подобластях  $D_k \cup V_k$ . Запишем постановки задач для определения решений  $h_1$ ,  $h_{2k}$ ,  $h_{3k}$ .

Постановка задачи для определения  $h_1$  на сетке  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} K \operatorname{grad} h_1 &= 0 \quad \text{в } D_0, \\ h_1 &= h_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_1 \cap D_0, \\ -K \frac{\partial h_1}{\partial n} &= q_n \quad \text{на } \Gamma_2 \cap D_0, \\ h_1 &= h_{\Gamma_{1k}} \quad \text{на } \gamma_k, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3}$$

Постановка задачи для определения  $h_{2k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) на сетке  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} K \operatorname{grad} h_{2k} &= 0 \quad \text{в } D_k, \\ h_{2k} &= h_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_1 \cap D_k, \\ -K \frac{\partial h_{2k}}{\partial n} &= q_n \quad \text{на } \Gamma_2 \cap D_k, \\ \int_{S_k} -K \frac{\partial h_{2k}}{\partial n} &= Q_k \quad \text{при } h_{2k}|_{S_k} = \operatorname{const} \quad \text{или } h_{2k}|_{S_k} = H_k, \\ h_{2k} &> z \quad \text{на } \Gamma_n \cap D_k, \quad h_{2k} = z \quad \text{на } \Gamma_\sigma \cap D_k, \quad h_{2k} = h_{\Gamma_{2k}} \quad \text{на } \gamma_k. \end{aligned} \tag{4}$$

Постановка задачи для определения  $h_{3k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) на сетках  $\omega_k$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} K \operatorname{grad} h_{3k} &= 0 \quad \text{в } D_k \cup V_k, \\ h_{3k} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cap (D_k \cup V_k), \\ -K \frac{\partial h_{3k}}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \cap (D_k \cup V_k), \\ h_{3k} &= h_{\Gamma_{3k}} \quad \text{на } \gamma_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Решения  $h_1$ ,  $h_{2k}$  и  $h_{3k}$  при известных граничных значениях  $h_{\Gamma_{1k}}$ ,  $h_{\Gamma_{2k}}$ ,  $h_{\Gamma_{3k}}$  независимо определяются из систем уравнений (3), (4) и (5) соответственно. При выполнении условий на границах раздела  $\gamma_k$  относительно напоров  $h_{\Gamma_{1k}} = h_{\Gamma_{2k}} + h_{\Gamma_{3k}}$  и относительно нормальных составляющих скоростей фильтрации  $q_{1kn} + q_{2kn} + q_{3kn} = 0$  для определения решений  $h_1$ ,  $h_{2k}$  и  $h_{3k}$  достаточно задания граничных значений  $h_{\Gamma_{3k}}$ . При значениях  $h_{\Gamma_{3k}} = 0$  система уравнений (3)–(5) эквивалентна исходной системе уравнений (1), (2). Таким образом, для получения решения исходной системы уравнений необходимо построить алгоритм решения системы (3)–(5), в котором  $h_{3k} \rightarrow 0$ .

В начальном приближении имеем  $h_{2k}^0 = 0$ , а функции  $h_1^0$ ,  $h_{3k}^0$  определяются совместно из решения системы уравнений (1), (2) на грубой сетке, состоящей из сеток  $\omega_k$  под областей  $\bar{D}_k \cup V_k$  и сетки  $\Omega$  области  $\bar{D}_0$ . Скважины на сетках  $\omega_k$  имитируются точечными источниками. Подобласти решений  $D_k^0$  для функций  $h_{2k}^0$  в начальном состоянии определяются как  $\bar{D}_k$ . На каждой итерации  $i \geq 1$  в под областях  $D_k^{i-1}$  независимо определяются  $h_{2k}^i$  ( $k = 1, \dots, N$ ) из решения задач (4) с граничными значениями на  $\gamma_k$ :

$$h_{\Gamma_{2k}}^i = h_{\Gamma_{2k}}^{i-1} + h_{\Gamma_{3k}}^{i-1}. \quad (6)$$

В случае  $h_{2k}^i < z$  уточняются координаты  $z$  узловых точек депрессионной поверхности  $\Gamma_6^i$  из условия  $z = h_{2k}^i$ . Области решения для функций  $h_{2k}^i$  с уточненной депрессионной поверхностью  $\Gamma_6^i$  определяются как  $D_k^i$ . Для определения решений  $h_1^i$  и  $h_{3k}^i$  совместно решаются системы уравнений (3), (5) на грубой сетке с дополнительными условиями  $h_{\Gamma_{1k}}^i - h_{\Gamma_{3k}}^i = h_{\Gamma_{2k}}^i$  и  $q_{1kn} + q_{3kn} = -q_{2kn}$  на  $\gamma_k$  при фиксированных узловых значениях функций  $h_{2k}^i$ . Верхняя поверхность области  $D_0^i$ , в точках которой  $h_1^i < z$ , подправляется из условия  $z = h_1^i$ . В вычислительном процессе, построенном таким образом, граничные значения  $h_{\Gamma_{3k}}^i$  сносятся после каждой итерации по правилу (6) на граничные значения  $h_{\Gamma_{2k}}^i$ . Процесс решения прерывается при выполнении условия  $d(h_\Omega^i) < \varepsilon$ , где  $d(h_\Omega^i)$  — максимальная по модулю невязка сеточной системы уравнений (1), (2). Каждая из задач (4) для получения решений  $h_{2k}^i$  прерывается на  $n$ -й итерации при выполнении одного из следующих критериев:  $\max_{j \in \gamma_k} \frac{|d_j(h_\Omega^{i,n}) - d_j(h_\Omega^{i,n-1})|}{d_j(h_\Omega^{i,n-1})} < \alpha$  или

$\max_{j \in \gamma_k} |d_j(h_\Omega^{i,n})| < \varepsilon$ . Задача (3), (5) для получения решений  $h_1^i$ ,  $h_{3k}^i$  прерывается на  $n$ -й итерации по критерию

$\max_{j \in \forall \gamma_k} \frac{|d_j(h_\Omega^{i,n}) - d_j(h_\Omega^{i,n-1})|}{d_j(h_\Omega^{i,n-1})} < \alpha$  или по критерию  $\max_{j \in \forall \gamma_k} |d_j(h_\Omega^{i,n})| < \varepsilon$ , где  $d_j(h_\Omega^{i,n})$  — модуль невязки,

соответствующей  $j$ -у узлу  $\gamma_k$  сеточной системы уравнений (1), (2),  $\alpha$  — итерационный параметр,  $n$  — номер внутренних итераций,  $h_\Omega^{i,n}$  — значения функции  $h^{i,n}$  в узлах сетки  $\Omega$ . При решении задач (4) имеем  $h^{i,n} = h_1^{i-1}$  в  $D_0/\gamma_k$ ,  $h^{i,n} = h_{2k}^{i-1}$  в  $D_k^{i-1}$ , а при решении задачи (3), (5) имеем  $h^{i,n} = h_1^{i,n}$  в  $D_0$  и  $h^{i,n} = h_{2k}^i$  в  $D_k^i/\gamma_k$ . Условие  $d(h_\Omega^i) < \varepsilon$  проверяется, когда  $\max_{j \in \forall \gamma_k} d_j(h_\Omega^i) < \varepsilon$ , при этом значения сеточной функции  $h_\Omega^i$  в узлах на депрессионной поверхности принимаются равными координате  $z$ .

**6. Результаты численных экспериментов.** Предложенный алгоритм тестировался при решении модельной трехмерной задачи фильтрации жидкости с различным числом вертикальных откачивающих скважин. Рассматривался пятислойный пласт ( $\approx 50 \text{ км} \times 40 \text{ км} \times 0.27 \text{ км}$ ) с толщинами слоев  $d_1 = 30 \text{ м}$ ,  $d_2 = 110 \text{ м}$ ,  $d_3 = 45 \text{ м}$ ,  $d_4 = 15 \text{ м}$ ,  $d_5 = 70 \text{ м}$  и коэффициентами фильтрации  $K_1 = 2 \text{ м/сут}$ ,  $K_2 = 15 \text{ м/сут}$ ,  $K_3 = 8 \text{ м/сут}$ ,  $K_4 = 0.1 \text{ м/сут}$ ,  $K_5 = 25 \text{ м/сут}$  соответственно. Пласт считался непроницаемым за исключением кровли, на которой задавалось граничное условие второго рода  $q_n = 3.4 \times 10^{-4} \text{ м/сут}$ , и противоположных участков боковой поверхности пятого слоя с граничными условиями первого рода 300 м и 400 м. На скважинах задавались расходы  $Q_k = 5000 \text{ м}^3/\text{сут}$ . Каждая скважина моделировалась призмой с правильным шестиугольным основанием. Радиус окружности, описывающей шестиугольное основание, брался равным 0.11 м. Поверхность скважины считалась непроницаемой за исключением двух интервалов вскрытия длиной 5 м каждый во втором и пятом слоях. Пласт покрывался конечно-элементной тетраэдральной сеткой, сгущающейся к интервалам вскрытия по убывающей геометрической прогрессии. Ячейки каждого слоя во внескважинной области имели размеры в горизонтальной плоскости порядка 1 км, а по высоте бралась равными толщине слоя. Ячейки, примыкающие к интервалам вскрытия, имели размеры порядка 0.11 м как в горизонтальной плоскости, так и по высоте. Количество узлов на грубой сетке бралось примерно равным 12000, на каждом сгущающемся участке — 6500.

Все системы алгебраических уравнений решались методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей, для построения которой использовалось неполное разложение Холесского [13, 14]. Системы уравнений решались до достижения балансовой точности  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Итерационный параметр  $\alpha$  при решении задачи по предложенному алгоритму брался равным 0.5. Время решения практически не менялось для  $\alpha = 0.3 \div 0.6$ .

Ниже в таблице приведено время решения задачи с различным числом сгущающихся участков и процессоров.

Таблица  
Время решения задачи с разделением и без разделения области с различным числом сгущающихся участков и процессоров

Число сгущающихся участков сетки	Число узлов	Число процессоров	Решение задачи по предложенному алгоритму с разделением области	Решение задачи без разделения области
1	18962	1	7 сек	8 сек
50	328546	1	5 мин 21 сек	9 мин 41 сек
		5	2 мин 20 сек	
		24	1 мин 22 сек	
100	644546	1	15 мин. 40 сек	26 мин 33 сек
		5	6 мин 50 сек	
		24	5 мин 10 сек	

При решении задачи без разделения области депрессионная поверхность уточнялась по тем же правилам, что и в алгоритме с разделением области.

На рис. 8 приведено расчетное время решения по предложенному алгоритму с числом процессоров, равным числу сгущающихся участков. Расчетное время определялось по результатам решения на одном и 24-х процессорах.

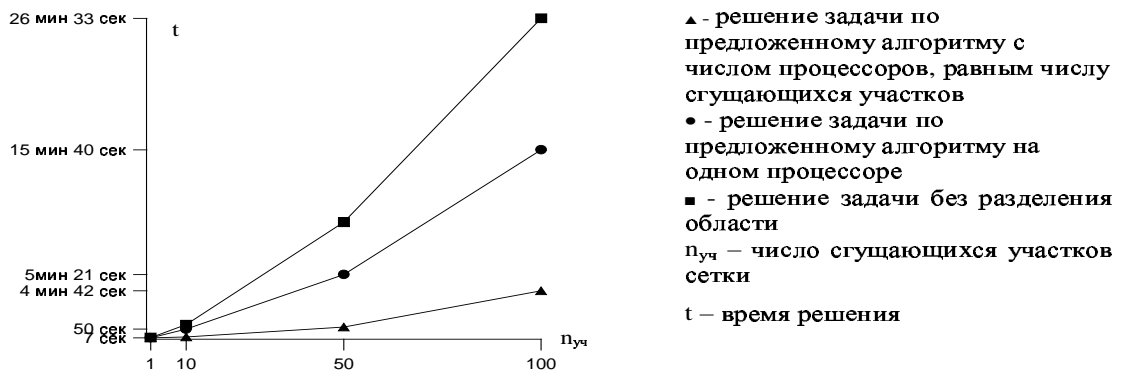


Рис. 8. Расчетное время решения задачи

Из приведенных данных о расчетном времени видно, что с возрастанием числа сгущающихся участков сетки увеличивается разница во времени решения задачи без разделения области и по предложенному алгоритму с разделением области. Задачи на сгущающихся участках в алгоритме с разделением области решаются независимо; для их одновременного решения необходимо число процессоров, равное числу сгущающихся участков. Рассмотрим эффективность использования такого числа процессоров. На рис. 9 приведен график, показывающий зависимость времени решения задачи по предложенному алгоритму от числа процессоров со 100 сгущающимися участками сетки.

Как видно из рис. 9, увеличение числа процессоров выше определенного значения приводит к незначительному уменьшению времени решения. Для пояснения на рис. 10 и 11 приведено сравнительное время решения задачи на грубой и сгущающихся сетках на одном и 100 процессорах соответственно в случае ста сгущающихся участков сетки.

Как видно из рис. 10 и 11, суммарное время решения на одном процессоре определяется временем решения задачи на сгущающихся участках, в то время как на ста процессорах суммарное время решения определяется решением на грубой сетке. Время решения на грубой сетке для данного алгоритма является пороговым и определяет основное время решения при увеличении числа процессоров.

**7. Заключение.** Разработан алгоритм решения задач напорно-безнапорной фильтрации со сгуща-

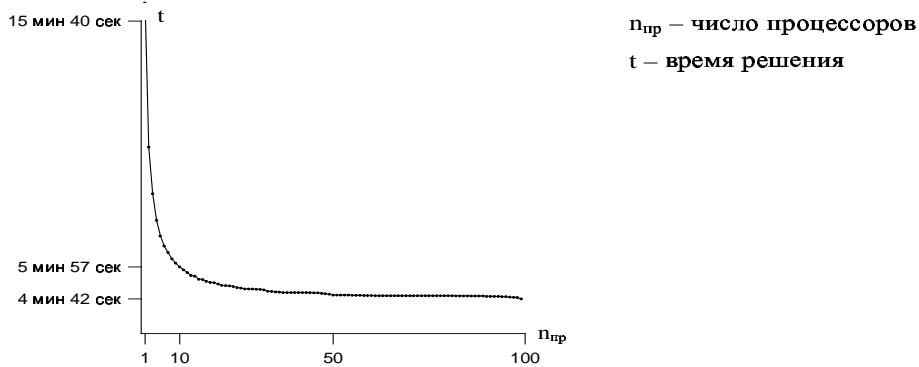


Рис. 9. Зависимость времени решения задачи по предложенному алгоритму от числа процессоров (100 сгущающихся участков сетки)

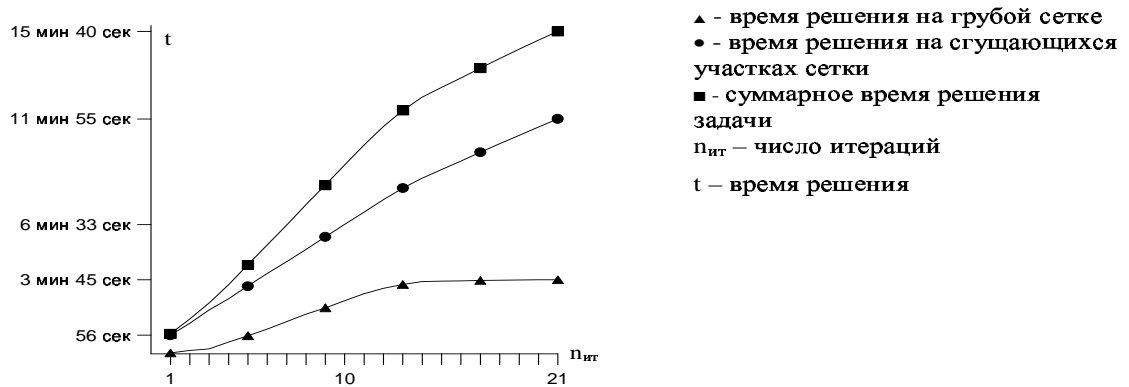


Рис. 10. Сравнительное время решения задачи на грубой и сгущающихся сетках на одном процессоре (100 сгущающихся участков)

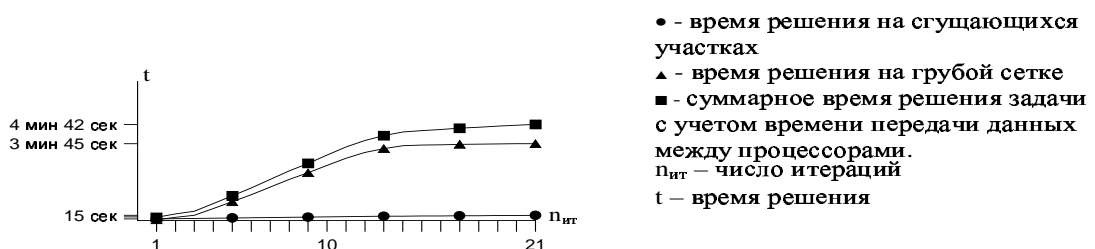


Рис. 11. Сравнительное время решения задачи на грубой и сгущающихся сетках на 100 процессорах (100 сгущающихся участков)

ющимися участками сетки на многопроцессорных вычислительных системах. Алгоритм основан на независимом решении систем уравнений для сгущающихся участков сетки в прискажинных подобластях и на новом подходе к согласованию этих решений с решением на грубой сетке. Новый способ согласования решений основывается на введении дополнительных грубых сеток на сгущающихся участках. Алгоритм построен таким образом, что при итерационном процессе все дополнительные грубые сетки обесточиваются и итерационный процесс сходится к решению исходной системы уравнений. Показана эффективность алгоритма, которая возрастает с увеличением числа сгущающихся участков сетки. Данный алгоритм обладает достаточной общностью и может быть использован в других задачах с большим



числом особенностей, требующих сгущения сетки.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных системах.”

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
2. *Beckie R., Wood E.F., and Alvaro A.* Aldama mixed finite element simulation of saturated groundwater flow using a multigrid accelerated domain decomposition technique // *Water Resour. Res.* 1993. **26**, N 9. 3145–3157.
3. *Feng X.* A non-overlapping domain decomposition method for solving elliptic problems by a finite element method // *The 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Ullensvang (Norway), 1996. 222–229.
4. *Gander M.J. and Golub G.H.* A non-overlapping optimized Schwarz method which converges with arbitrarily weak dependence on  $h$  // *The 14th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Coyoac (Mexico), 2002. 281–288.
5. *Марчук Г.Е.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
6. *Gai Z., Parashkevov R. R., Russel T. F., and Ye X.* Overlapping domain decomposition for a mixed finite element method in three dimensions // *The 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Ullensvang (Norway), 1996. 188–196.
7. *Gastaldi F., Gastaldi L., and Quarteroni A.* ADN and ARN domain decomposition methods for solving advection-diffusion equations // *The 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Ullensvang (Norway), 1996. 334–341.
8. *Мазуров П.А., Ценаев А.В.* К решению задач фильтрации несжимаемой жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // *Матем. моделир.* 2002. **14**, № 9. 121–123.
9. *Мазуров П.А., Ценаев А.В.* Метод суперпозиции для решения задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // *Современные проблемы гидрогеологии и гидрогеомеханики*. СПб: Изд-во СПбГУ, 2002. 471–476.
10. *Мазуров П.А., Ценаев А.В.* Метод решения нелинейных задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // *Матем. моделир.* 2004. **16**, № 3. 33–42.
11. *Мазуров П.А., Ценаев А.В.* Решение трехмерных задач фильтрации жидкости на МВС-1000/16 на сетках со сгущающимися участками // *Актуальные проблемы механики сплошной среды*. Казань: Изд-во ИММ КазНЦ РАН, 2004. 45–56.
12. *Басниев К.С., Власов А.М., Кочина И.М., Максимов В.М.* Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986.
13. *Hill M.C.* Solving groundwater flow problems by conjugate gradient methods and the strongly implicit procedure // *Water Resour. Res.* 1990. **26**, N 9. 1961–1969.
14. *Larabi A. and DeSmedt F.* Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // *Water Resour. Res.* 1994. **30**, N 2. 509–521.

Поступила в редакцию  
01.06.2005