

УДК 517.97:539.37

**ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ДЛЯ РАСЧЕТА
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЫПУЧЕЙ СРЕДЕ**

О. В. Садовская¹, В. М. Садовский¹

Для исследования распространения упругопластических ударных волн малой амплитуды в сыпучей среде разработан вычислительный алгоритм, допускающий распараллеливание на этапе расщепления задачи по пространственным переменным. Алгоритм реализован на языке программирования Fortran 90 с помощью функций библиотеки MPI. На многопроцессорной вычислительной системе МВС-1000М проведены двумерные расчеты ударных волн в слоистых и блочных массивах, демонстрирующие эффективность применения параллельного алгоритма.

По сравнению с обычными упругопластическими материалами (металлами, сплавами, композитами) сыпучие среды обладают существенно различными механическими характеристиками при растяжении и сжатии. Идеально сыпучие среды при сжатии ведут себя как упругие или пластические тела в зависимости от уровня деформаций и не сопротивляются растяжению. В связных средах возможны растягивающие напряжения, которые не превышают пороговых значений, обусловленных сцеплением частиц, и которые значительно меньше допустимых сжимающих напряжений. Для учета разнопрочности природных материалов (грунтов, горных пород) в феноменологической теории применяются специальные нелинейные определяющие соотношения [1–4]. При описании сыпучих сред эти соотношения приводят к задачам с вырождением, трудоемким для прямого численного исследования. Приемлемой точности результатов расчетов с помощью конечноразностной или конечноэлементной дискретизации задач можно достичь только на достаточно мелких сетках. Применение явных по времени расчетных схем, обусловленное требованием монотонности численных решений вблизи фронтов ударных волн и поверхностей разрыва сплошности, приводит к большим объемам вычислений, для выполнения которых целесообразно использование современных высокопроизводительных параллельных вычислительных систем.

В настоящей работе рассматривается круг вопросов, связанных с численной реализацией модели динамического деформирования сыпучей среды на основе методов расщепления по физическим процессам и по пространственным переменным с применением монотонных схем повышенной точности для решения одномерных задач. Предлагается технология распараллеливания алгоритма при исследовании волновых движений в слоистых и блочных средах. Приводятся результаты методических расчетов, демонстрирующие работоспособность алгоритма и комплекса программ.

1. Математическая модель. Модель, описывающая поведение упругопластической среды, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию, допускает формулировку в виде вариационного неравенства [3, 5]

$$(\tilde{V} - V) \left(AU_t - \sum_{i=1}^n B^i V_{x_i} - QV - G \right) \geq 0, \quad \tilde{V}, V \in F. \tag{1.1}$$

Здесь $V(t, x)$ и $U(t, x)$ — m -мерные вектор-функции, первая из которых составлена из отличных от нуля компонент вектора скорости частиц среды v и тензора действительных напряжений σ , а во вторую вместо σ входит тензор условных напряжений s . Симметричные матрицы-коэффициенты A и B^i размерности $m \times m$ (матрица A положительно определена) содержат параметры упругости среды, Q и G — заданные матрица и вектор, \tilde{V} — варьируемый вектор, n — пространственная размерность задачи; нижние индексы служат для обозначения частных производных по соответствующим координатам. Входящее в (1.1) множество допустимых вариаций F определяется критерием пластичности Мизеса. Вектор-функции U и V связаны между собой нелинейным соотношением. Для идеально сыпучей среды V представляет собой проекцию U по евклидовой норме $|U| = \sqrt{U^T A U}$ на конус K с вершиной в нуле, который строится в

¹ Институт вычислительного моделирования СО РАН, Академгородок, 660036, г. Красноярск; e-mail: sadov@icm.krasn.ru

соответствии с критерием прочности Мизеса–Шлейхера и зависит от параметра внутреннего трения. В модели связной сыпучей среды имеем

$$V = \lambda U + (1 - \lambda)U^\pi, \quad U = \frac{1}{\lambda}V - \frac{1 - \lambda}{\lambda}V^\pi, \quad (1.2)$$

где индекс π означает проекцию на K , $\lambda \in (0, 1]$ — параметр, характеризующий отношение модулей упругости материала при растяжении и сжатии. Эквивалентность соотношений (1.2) вытекает из общих свойств проекции на выпуклый конус.

В случае плоского деформированного состояния в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 компонентами V и U являются отличные от нуля величины $v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ и $v_1, v_2, s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}$ соответственно, матрица Q равна нулю, а матрицы A, B^1, B^2 и вектор G имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & 2a_{1112} \\ 0 & 0 & a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & 2a_{2212} \\ 0 & 0 & a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & 2a_{3312} \\ 0 & 0 & 2a_{1211} & 2a_{1222} & 2a_{1233} & 2a_{1212} \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho g_1 \\ \rho g_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ — плотность среды, a_{ijkl} — модули упругой податливости при сжатии, g_1, g_2 — проекции вектора массовых сил. В осесимметричном случае

$$Q = \frac{1}{x_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(оси x_1 и x_2 направлены вдоль оси симметрии и радиуса соответственно), остальные матрицы и векторы имеют тот же самый вид.

В модели неоднородной среды конус K , множество F , параметр λ и матрицы коэффициентов дифференциального оператора вариационного неравенства (1.1) зависят от x . Если K совпадает с пространством R^m или параметр λ равен единице, то система (1.1), (1.2) описывает упругопластический материал Прандтля–Рейсса [6], диаграмма деформирования которого симметрична по отношению к растяжению и сжатию:

$$(\tilde{U} - U) \left(AU_t - \sum_{i=1}^n B^i U_{x_i} - QU - G \right) \geq 0, \quad \tilde{U}, U \in F.$$

Если $F = R^m$, то неравенство (1.1) превращается в систему уравнений

$$AU_t = \sum_{i=1}^n B^i V_{x_i} + QV + G, \quad (1.3)$$

описывающих совместно с (1.2) деформирование разномодульной упругой среды. Если, кроме того, $K = R^m$ или $\lambda = 1$, то последняя система преобразуется к системе линейных уравнений динамической теории упругости.

2. Вычислительный алгоритм. Численная реализация модели (1.1), (1.2) при заданных начальных данных и граничных условиях задачи осуществляется на основе метода расщепления по физическим процессам, на первом этапе которого по заданному в момент времени t векторному полю $U(t, x)$ с помощью системы уравнений (1.2), (1.3) вычисляется $U(t + \Delta t, x)$, а на втором этапе на интервале $(t, t + \Delta t)$ при условии $\bar{U}(t, x) = U(t + \Delta t, x)$ решается вариационное неравенство

$$(\tilde{V} - \bar{V})A\bar{U}_t \geq 0, \quad \tilde{V}, \bar{V} = \lambda\bar{U} + (1 - \lambda)\bar{U}^\pi \in F. \quad (2.1)$$

В качестве искомого приближенного решения принимается $\bar{U}(t + \Delta t, x)$, которое отвечает моменту времени $t + \Delta t$. Тем самым, процесс деформирования среды на малом временном интервале представляется в виде суперпозиции упругого и пластического процессов.

После аппроксимации входящей в (2.1) производной по времени в каждой ячейке пространственной сетки возникает неравенство

$$(\tilde{V} - V)A(V - (1 - \lambda)V^\pi - \lambda\bar{U}) \geq 0, \quad \tilde{V}, V \in F, \tag{2.2}$$

в котором \bar{U} является решением на один шаг по времени краевой задачи для системы уравнений разномодульной упругой среды. Отсюда

$$V = [(1 - \lambda)V^\pi + \lambda\bar{U}]^\Pi, \tag{2.3}$$

где индекс Π служит для обозначения проекции на множество F по введенной выше евклидовой норме. Можно показать, что отображение, определяемое правой частью уравнения (2.3), сжимающее. Это следует из цепочки соотношений

$$|Q(\tilde{V}) - Q(V)| \leq (1 - \lambda)|\tilde{V}^\pi - V^\pi| \leq (1 - \lambda)|\tilde{V} - V|,$$

справедливой в силу того, что всякий оператор проектирования на выпуклое множество является не-растягивающим. Таким образом, для учета пластичности среды в соответствии с методом расщепления применяется корректировка упругого решения, полученного на первом этапе, которая сводится к определению неподвижной точки сжимающего отображения (2.3) и может быть реализована методом последовательных приближений.

Заметим, что в случае среды Прандтля–Рейсса ($K = R^m$ или $\lambda = 1$) данная процедура совпадает с широко известной процедурой корректировки напряжений Уилкинса, предложенной как этап алгоритма для численного исследования упругопластических течений в работе [7]. Существуют другие варианты корректировки, обладающие меньшей схемной вязкостью и, таким образом, более точные [8]. Однако они непригодны в моделях, учитывающих разномодульность. Чтобы обобщить один из таких вариантов на случай сыпучей среды, аппроксимируем неравенство (2.1) следующим образом:

$$(\tilde{V} - \gamma V - (1 - \gamma)\bar{V})A(U - \bar{U}) \geq 0, \quad \tilde{V}, \gamma V + (1 - \gamma)\bar{V} \in F.$$

Здесь γ — весовой коэффициент, \bar{V} — вспомогательный вектор, связанный с \bar{U} формулами (1.2). Полученное неравенство также эквивалентно задаче о неподвижной точке

$$V = \frac{1}{\gamma} (\gamma(1 - \lambda)V^\pi + \gamma\lambda\bar{U} + (1 - \gamma)\bar{V})^\Pi - \frac{1 - \gamma}{\gamma} \bar{V}, \tag{2.4}$$

а соответствующее отображение является сжимающим при любом положительном γ . Эффект уточнения решения с помощью корректировки, состоящей в вычислении неподвижной точки (2.4) методом последовательных приближений, проверялся численно при расчете одномерных задач с ударными волнами, для которых построены точные решения. Оказалось, что уточнение действительно имеет место, причем наилучшее значение весового коэффициента γ близко к 0.5 [5].

Для решения задачи (1.2), (1.3) используется метод двуциклического расщепления по пространственным переменным второго порядка точности в сочетании с монотонной ENO-схемой типа предиктор–корректор с линейной реконструкцией решения.

При расчете двумерной (плоской или осесимметричной) задачи на временном интервале $(t, t + \Delta t)$ метод расщепления [9] включает в себя четыре этапа: этап решения одномерной задачи в направлении x_1 на интервале $(t, t + \Delta t/2)$, аналогичный этап в направлении x_2 , этап повторного пересчета задачи в том же направлении на интервале $(t + \Delta t/2, t + \Delta t)$ и этап повторного пересчета в направлении x_1 . Применение процедуры расщепления приводит к следующим одномерным системам:

$$\begin{aligned} AU_t^1 &= B^1 V_{x_1}^1 + Q^1 V^1 + G^1, & U^1(t) &= U(t), \\ AU_t^2 &= B^2 V_{x_2}^2 + Q^2 V^2 + G^2, & U^2(t) &= U^1(t + \Delta t/2), \\ AU_t^3 &= B^2 V_{x_2}^3 + Q^2 V^3 + G^2, & U^3(t + \Delta t/2) &= U^2(t + \Delta t/2), \\ AU_t^4 &= B^1 V_{x_1}^4 + Q^1 V^4 + G^1, & U^4(t + \Delta t/2) &= U^3(t + \Delta t). \end{aligned}$$

Здесь $Q^1 + Q^2 = Q$, $G^1 + G^2 = G$, $V^i = \lambda U^i + (1 - \lambda)(U^i)^\pi$. Искомое значение $U(t + \Delta t)$ равно $U^4(t + \Delta t)$.

Существенно, что второй и третий этапы метода разделены несмотря на то, что дважды решается практически одна и та же задача. Такая конструкция метода расщепления обеспечивает устойчивость численного решения в двумерном случае при выполнении одномерного условия Куранта.

Пространственное расщепление на криволинейных сетках производится не по физическим переменным x_1, x_2 , а по параметрам ξ^1, ξ^2 , на плоскости которых область решения отображается в прямоугольник. В этом случае дифференциальный оператор задачи преобразуется к виду

$$AU_t = \sum_{k=1}^2 \bar{B}^k V_{\xi^k} - QV, \quad \bar{B}^k = \sum_{i=1}^2 \xi_{x_i}^k B^i.$$

На параметрической плоскости вводится прямоугольная равномерная сетка. Оператор аппроксимируется интегро-интерполяционным методом с сохранением свойства консервативности относительно физических переменных. Для этого производится его интегрирование по пространственной ячейке $\omega_{j_1+1/2, j_2+1/2}$, которая может быть произвольным четырехугольником на физической плоскости, с последующим применением формулы Грина:

$$\int_{\omega_{j_1+1/2, j_2+1/2}} (AU_t - QV) d\omega - \left(\int_{\gamma_{j_1+1/2, j_2}} + \int_{\gamma_{j_1+1, j_2+1/2}} + \int_{\gamma_{j_1+1/2, j_2+1}} + \int_{\gamma_{j_1, j_2+1/2}} \right) \nu_i B^i V d\gamma.$$

Здесь символом γ с нижними индексами обозначены стороны четырехугольника, перечисленные в положительном направлении обхода ячейки, ν_i — проекции вектора внешней нормали. Далее к вычислению интегралов, входящих в полученное выражение, применяется формула прямоугольников с центральным узлом, а производная по времени заменяется конечной разностью.

При реализации схемы в цилиндрических координатах (осесимметричный случай) матрицы Q^i и векторы G^i выбираются, исходя из принципа физической адекватности одномерных моделей, следующим образом:

$$Q^1 = 0, \quad G^1 = G, \quad Q^2 = Q, \quad G^2 = 0.$$

В плоском случае $Q^1 = Q^2 = 0$.

Способ построения схемы решения одномерных задач рассмотрим на примере системы уравнений общего для всех этапов расщепления вида

$$AU_t = BV_x + QV + G. \quad (2.5)$$

В случае постоянных матриц коэффициентов на шаге корректор используются соотношения

$$A \frac{U^{j+1/2} - U_{j+1/2}}{\Delta t/2} = B \frac{V_{j+1} - V_j}{\Delta x} + Q \frac{V_{j+1} + V_j}{2} + G.$$

Здесь индекс $j + 1/2$ относится к центру ячейки пространственной разностной сетки, верхний индекс соответствует текущему временному слою, нижний — предыдущему слою. Вектор $V^{j+1/2}$ вычисляется через $U^{j+1/2}$ по формуле (1.2). Если матрицы переменные, то в качестве разностной производной по x берутся соответствующие слагаемые консервативной аппроксимации.

Для замыкания схемы необходимо доопределить ее соотношениями шага предиктор, при выводе которых используются идеи сеточно-характеристических методов [10]. Пусть Y_l и c_l — полная система левых собственных векторов и собственных чисел матрицы BA^{-1} . Такая система существует и в случае неоднородной среды, входящие в нее собственные числа являются знакопостоянными функциями от x . Умножая (2.5) слева на Y_l , перейдем к системе дифференциальных уравнений, которые для модели упругой среды представляют собой уравнения на характеристиках $Y_l AU_t = c_l Y_l AV_x + Y_l (QV + G)$, $l = 1, \dots, m$. После аппроксимации получим

$$(I_l^{j+1/2})^\pm = I_{l, j+1/2} \pm \alpha_{l, j+1/2} \Delta x/2 + [c_l \beta_l + Y_l (QV + G)]_{j+1/2} \Delta t/4, \quad (2.6)$$

где $\alpha_{l, j+1/2}$ и $\beta_{l, j+1/2}$ — производные от коэффициентов $I_l = (Y_l A)_{j+1/2} U$ и $J_l = (Y_l A)_{j+1/2} V$, полученные с помощью итерационной процедуры предельной реконструкции (см. [11, 12]); индексами “-” и “+” отмечены значения этих коэффициентов на левой и правой границах одной и той же ячейки. Процедура предельной реконструкции позволяет повысить точность численного решения и состоит в построении монотонных кусочно-линейных сплайнов, приближающих I_l и J_l с минимальными разрывами на границах соседних ячеек сетки.

Во внутренних узлах расчетной области на шаге предиктор величины U_j находятся по формуле осреднения $U_j = (U_j^+ + U_j^-)/2$ через значения U_j^\pm , которые относятся к разным сторонам границы между ячейками и удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (YlA)_{j+1/2}U_j^+ = I_{l,j+1/2}^- & \text{для } c_l \geq 0, \\ (YlA)_{j-1/2}U_j^- = I_{l,j-1/2}^+ & \text{для } c_l \leq 0, \\ D_l V_j^+ = D_l V_j^-. \end{cases}$$

В этой системе уравнения с матрицами D_l представляют собой условия непрерывности вектора скорости и вектора напряжений при переходе через границу, а число уравнений с учетом этих условий равно числу неизвестных величин. Согласно (1.2), условия непрерывности переписываются в виде

$$D_l(U^+ - U^-)_j = (1 - \lambda^+)D_l(U^+ - U^{+\pi})_j - (1 - \lambda^-)D_l(U^- - U^{-\pi})_j$$

и реализуются численно методом последовательных приближений. Сходимость метода обусловлена тем, что отображение $U - U^\pi$ является нестягивающим и множители $1 - \lambda^\pm$ строго меньше единицы. Значения V_j пересчитываются через U_j в соответствии с (1.2).

Аналогичный метод применяется для учета условий склейки решений на общих границах блоков при численном исследовании задач для блочной среды. Алгоритм расчета основных типов граничных условий (в скоростях, напряжениях и деформациях) представлен в [5].

3. Технология распараллеливания. Разработанный вычислительный алгоритм реализован в виде комплекса программ на языке Fortran 90 с использованием библиотеки MPI по технологии SPMD (single program-multiple data). Распараллеливание выполнено на основе блочного 1D разбиения области решения задачи. Программный комплекс позволяет проводить расчеты распространения упругопластических волн, вызванных внешними механическими воздействиями, в массиве сыпучей среды, составленном из разнородных блоков с криволинейными границами. Блоки располагаются послойно в горизонтальном и вертикальном направлениях — их границы считаются согласованными, чего в общем случае можно добиться с помощью фиктивного разбиения области.

Необходимые для расчета исходные данные задачи представляются в виде текстовых файлов, организованных по типу реляционных таблиц. Один из таких файлов содержит механические параметры материалов, в другом хранится информация о блочной структуре массива — количество горизонтальных слоев, общее число блоков в слое, координаты вершин блоков, а также идентификационные номера материалов и пространственные размерности сеток. Расчетные сетки, вообще говоря, не стыкующиеся на межблочных границах, в простейшем варианте строятся с помощью кубических эрмитовых сплайнов. Склейка выполняется специальной процедурой, в которой решение на измельченной сетке, получаемой пересечением граничных ячеек соседних блоков, определяется с помощью уравнений на характеристиках, а затем переносится на исходные сетки методом осреднения.

Программа-препроцессор упаковывает исходные данные в два двоичных файла прямого доступа — файл вещественных чисел, в который поблочно записываются параметры материала, сетка и начальные значения решения, и файл целых чисел, который содержит соответствующие им адреса (указатели), представляющие собой порядковые номера первых элементов. Вещественные файлы такой же структуры в дальнейшем создаются основной программой для организации контрольных точек при счете и для последующего анализа полученных результатов. Размер каждого из таких файлов может значительно превышать объем оперативной памяти отдельного узла кластера. Каждый из узлов при старте программы считывает весь целочисленный файл и только ту часть вещественного, которая относится к его процессу. Далее целочисленный массив (образ целочисленного файла) редуцируется — параметры сетки и указатели принимают в нем индивидуальные значения для данного узла. Разбиение на процессы проводится по принципу равномерной загрузки. Если размерность сетки какого-либо из блоков больше средней размерности в расчете на один узел, то этот блок обслуживается несколькими узлами, и наоборот, один и тот же узел обслуживает несколько блоков, если их суммарная размерность не превосходит средней. Пример построения сеток для массива сыпучей среды, состоящего из двух блоков, с разбиением задачи на семь процессов приведен на рис. 1. Границы между блоками изображены жирными сплошными линиями, линии раздела на процессы — более тонкими линиями.

На каждом узле кластера основной программой выполняются в принципе одни и те же вычисления, которые сводятся к взаимно согласованной поэтапной реализации метода расщепления по пространственным переменным. Исключение составляют процессы, производящие кроме того склейку решений на внутренних границах. Условия склейки на горизонтальных границах реализуются по следующей схеме.

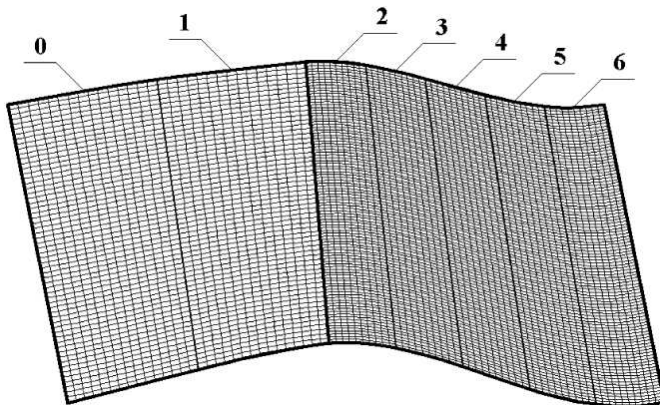


Рис. 1. Криволинейная сетка в массиве из двух блоков с разбиением на семь процессов по принципу равномерной загрузки

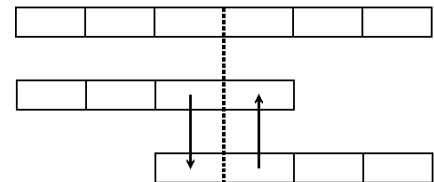


Рис. 2. Схема обмена между процессами с законтурными ячейками

Процессы, обслуживающие соседние блоки (расположенные друг под другом), передают необходимую информацию верхнему левому процессу, который производит расчет всей границы в целом и рассылает результаты в обратном направлении. Горизонтальные границы рассчитываются на первом и четвертом этапах метода расщепления по пространственным переменным. Это происходит практически параллельно, незначительная задержка может возникать только из-за необходимости передачи данных исполняющим процессом для склейки решений на верхней границе своего блока. Однако при этом все процессы, кроме левых верхних, находятся в состоянии ожидания.

Склейка на вертикальных границах на втором и третьем этапах расщепления в общем случае реализуется парами процессов. При этом из соображений минимизации количества пересылок оба процесса частично повторяют одни и те же арифметические действия. Если граница лежит внутри области, обслуживаемой одним процессом, то такая склейка выполняется автономно.

Решение одномерных систем уравнений типа (2.5) в вертикальном направлении, параллельном линиям разбиения на процессы, также происходит автономно. В горизонтальном направлении обмен между процессами осуществляется на уровне коэффициентов разложения (2.6) на этапе предельной реконструкции. Используется обычная технология законтурных ячеек. Схема обмена, соответствующая этой технологии, представлена на рис. 2. Массивы α_l и β_l , элементы которых условно изображены набором ячеек в верхней части рисунка, оказываются разбитыми между процессами (штриховая линия – линия раздела). Процедура предельной реконструкции (см., например, [12]) осуществляет итерационный пересчет значений в ячейках по трехточечному шаблону, включающему соседние значения. Для удобства пересчета в ячейках, граничащих с линией раздела, в параллельной программе используются массивы с законтурными ячейками, обмен данными через которые производится с помощью функции `send-recv`. В целях минимизации времени счета объем блока передаваемых данных (и, следовательно, число передач) варьируется путем совместного решения определенного количества одномерных систем.

Программа-постпроцессор выполняет прореживание файлов, содержащих результаты счета в контрольных точках, пробегая ячейки сетки в каждом блоке с заданным шагом. Такое прореживание необходимо, поскольку размер файлов может быть очень большим и для их транспортировки по сети потребуется значительное время трафика. Графический вывод результатов осуществляется с помощью специальных программ, предназначенных для обычного персонального компьютера.

4. Результаты расчетов. В однопроцессорном варианте метод решения одномерных и двумерных динамических задач для сыпучей среды с упругими и пластическими свойствами ранее тестировался в работе [5]. Сравнительные расчеты на кластерной системе дали те же самые результаты независимо от количества используемых узлов. Кроме того, были повторены расчеты рассмотренной в [5] плоской задачи о взаимодействии волн уплотнения (сигнотонов) в неоднородно разрыхленной сыпучей среде с образованием поперечного кумулятивного выплеска. Время счета 600 шагов по t на пространственной сетке 300×300 ячеек в этой задаче на персональном компьютере Intel Pentium(R) 4 CPU 2.8 GHz равно примерно 37 часам. Для сравнения, при загрузке десяти узлов на кластере МВС-1000М Межведомственного суперкомпьютерного центра (на базе процессоров Alpha 21264) оно составляет 2 часа 53 минуты (29 часов суммарного времени). При использовании двадцати узлов требуется 1 час и 38 минут (примерно 33 часа),

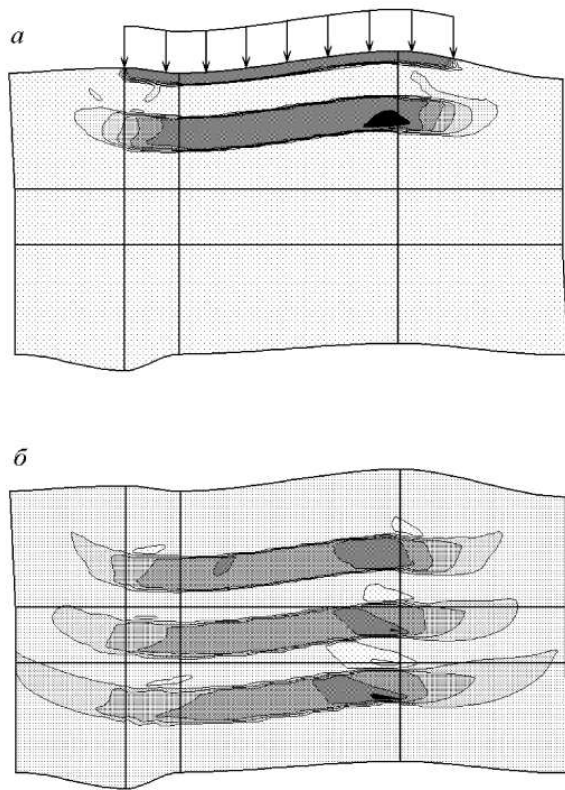


Рис. 3. Распространение упругих волн напряжений в массиве, фиктивно разбитом на двенадцать блоков

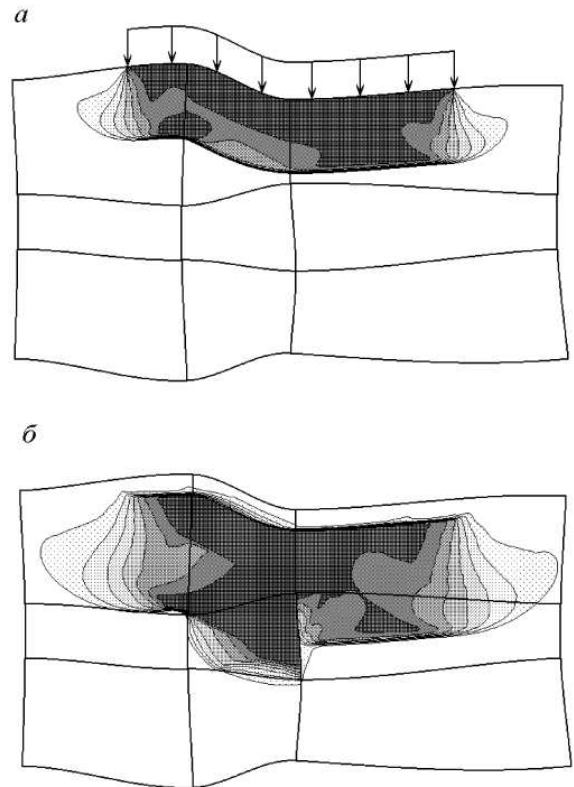


Рис. 4. Отражение волны от жесткого включения в сыпучей среде

а в случае тридцати узлов — 1 час 10 минут (35 часов). Высокая эффективность распараллеливания в этой задаче объясняется тем, что итерационные алгоритмы, применяемые для численной реализации нелинейных определяющих соотношений сыпучей среды, требуют значительного времени автономной работы процессоров. Однако чрезмерное увеличение количества загружаемых узлов оказывается нецелесообразным из-за возрастающих временных затрат на операции обмена. Размер файла, содержащего информацию о решении на каждом временном шаге, составляет 6.3 Мб.

Для проверки правильности работы процедуры склейки решений проводились расчеты двумерной задачи распространения упругих волн, вызванных воздействием локализованной импульсной нагрузки на верхнюю границу однородного массива, фиктивно разбитого на двенадцать блоков. Боковые и нижняя границы являются неотражающими поверхностями, через которые волны беспрепятственно уходят на бесконечность. На рис. 3 представлены линии уровня напряжения σ_{11} , соответствующего вертикальному направлению x_1 , по мере прохождения трех П-образных импульсов. Сгущение линий уровня происходит на фронтах ударных волн. Рис. 3, а относится ко времени действия второго импульса. На нем видны фронты волны нагружения, вызванной действием первого импульса, и соответствующей волны разгрузки, а также волны повторного нагружения. На рис. 3, б характерных фронтов шесть — это волны нагружения и разгрузки от каждого из трех импульсов. Расчеты выполнены на кластере МВС-1000М на очень мелкой неоднородной сетке, ячейки которой в соседних блоках отличаются по размеру в два-три раза. Размер файла действительных чисел равен 46.5 Мб. С учетом распределения памяти между узлами эта величина далеко не является пределом для многопроцессорной системы, однако она превышает доступный объем оперативной памяти персонального компьютера средней мощности. Время счета 1000 шагов по t при загрузке 43 узлов кластера составляет примерно 20 минут, что эквивалентно 14 часам работы последовательной программы. Приведенные результаты показывают, что неадекватного отражения или преломления волн при переходе через внутренние вертикальные и горизонтальные границы из-за погрешностей склейки решений на межблочных границах не происходит.

На рис. 4 для двух моментов времени изображены линии уровня напряжения σ_{11} в плоской задаче

об отражении волны от жесткого включения. Массив среды разбит на девять блоков, из которых центральный является упругим, а окаймляющие его блоки состоят из однородного податливого сыпучего материала (грунта), обладающего упругими и пластическими свойствами. Граничные условия формулируются точно так же, как и в предыдущем случае. Рассматривается одиночный П-образный импульс внешней нагрузки. Рис. 4, *а* соответствует моменту времени, к которому падающая ударная волна не достигла еще поверхности включения. До этого она беспрепятственно движется по однородной среде. Далее происходит взаимодействие с образованием отраженной волны малой амплитуды, движущейся в направлении от включения (на рис. 4, *б* представлен один из характерных моментов). Фронт падающей волны в области включения ускоряется, поскольку скорость ударных волн здесь больше, чем в сыпучем материале. Это приводит к образованию дополнительных волн сжатия, распространяющихся в обе стороны — вправо и влево от включения. Расчеты также выполнены на МВС-1000М. Размер файла, содержащего информацию о решении, составляет 13.5 Мб. Время счета 300 шагов по t на 34 узлах кластера — 45 минут, тогда как последовательная программа считает эту же задачу примерно за 22 часа.

Судя по проведенным расчетам, параллельные вычислительные системы обладают существенными преимуществами по сравнению с персональными компьютерами, если количество процессоров при загрузке задачи выбирается в разумном соответствии с размерностью пространственной сетки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 04-01-00267 и № 05-07-90201), Комплексной Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных системах” и гранта Президента РФ (проект № МК-982.2004.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды // ПММ. 1985. **49**, вып. 3. 419–437.
2. Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1988.
3. Садовский В.М. К теории распространения упругопластических волн в сыпучих средах // Докл. РАН. 2002. **386**, № 4. 487–489.
4. Мясников В.П., Садовский В.М. Вариационные принципы теории предельного равновесия разнопрочных сред // ПММ. 2004. **68**, вып. 3. 487–498.
5. Садовская О.В. Метод сквозного счета для исследования упругопластических волн в сыпучей среде // ЖВМ и МФ. 2004. **44**, № 10. 1909–1920.
6. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
7. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. 212–263.
8. Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997.
9. Фрязинов И.В. Экономичные симметризованные схемы решения краевых задач для многомерного уравнения параболического типа // ЖВМ и МФ. 1968. **8**, № 2. 436–443.
10. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
11. Каменецкий В.Ф., Семенов А.Ю. Самосогласованное выделение разрывов при сквозных расчетах газодинамических течений // ЖВМ и МФ. 1994. **34**, № 10. 1489–1502.
12. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

Поступила в редакцию
11.05.2005