

УДК 519.6

## РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РАСЧЕТА ПОТОКОВ ПОВЫШЕННОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

К. Н. Волков<sup>1</sup>

Рассматривается построение и реализация конечно-разностных схем расчета потоков повышенной разрешающей способности, а также ряд смежных вопросов, в частности, методы решения задачи о распаде произвольного разрыва. Приводится структура ряда разностных схем и предлагается подход, позволяющий представить разностные схемы расчета потоков на неструктурированной сетке в обобщенном виде, используя диаграмму нормализованных переменных. Сравнение характеристик различных разностных схем проводится на примере решения ряда модельных задач газовой динамики.

**1. Введение.** Решение задач газовой динамики в широком диапазоне скоростей предъявляет повышенные требования к используемому численному методу, который, с одной стороны, должен достаточно точно воспроизводить разрывные решения, а с другой — раскрывать динамику малых возмущений на фоне среднего течения. Указанные требования являются противоречивыми, поскольку раскрытие динамики малых возмущений требует понижения схемной диссипации, что приводит к нежелательным осцилляциям решения в областях больших градиентов искомых функций.

Прогресс в практике численного решения уравнений Навье–Стокса связан с разработкой и внедрением разностных схем расчета потоков повышенной разрешающей способности, позволяющих получать одновременно точные и монотонные решения. В тех областях потока, где решение является гладким, применяются схемы повышенного порядка. Для того чтобы не допустить возникновения нежелательных осцилляций решения в окрестности разрывов, используются разностные схемы с искусственной вязкостью или монотонные схемы низкого порядка. Разностные схемы комбинированной природы записываются в виде  $\alpha S_1 + (1 - \alpha)S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — разностные схемы, обладающие различными свойствами,  $\alpha$  — весовой коэффициент. К комбинированным разностным схемам относятся FCT-алгоритм, различные типы TVD-схем, схемы типа ENO и WENO и др. Их практическое применение требует изучения свойств и ограничений, накладываемых на весовые коэффициенты.

В данной работе обсуждаются требования, предъявляемые к дискретизации производных по времени и по пространству. Рассматриваются вопросы, связанные с построением и реализацией разностных схем расчета потоков повышенной разрешающей способности, а также методы решения задачи о распаде произвольного разрыва. Приводится структура ряда разностных схем и предлагается подход, позволяющий представить разностные схемы на неструктурированной сетке, используя диаграмму нормализованных переменных. Сравнение характеристик различных разностных схем проводится на примере решения ряда модельных задач газовой динамики и газодинамических процессов (решение волнового уравнения, ударная труба, течение Прандтля–Майера, течение в сопле Лаваля). Несмотря на то, что приведенные разностные схемы развиты для дискретизации уравнений Эйлера, они могут использоваться и для дискретизации уравнений Навье–Стокса с учетом расщепления вектора потока на невязкую и вязкую составляющие, а также для расчета течений несжимаемой жидкости с большими градиентами искомых функций.

**2. Основные уравнения.** В декартовой системе координат  $(x, y, z)$  нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается уравнением

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot F(Q) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния совершенного газа  $p = (\gamma - 1)\rho \left[ \epsilon - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right]$ .

<sup>1</sup> Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д.Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., д. 1, 190005, Санкт-Петербург; e-mail: kvolkov@kv7340.spb.edu, dsci@mail.ru

Вектор консервативных переменных и составляющие вектора потока имеют следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix}; \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix};$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}; \quad F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Здесь  $t$  — время;  $\rho$  — плотность;  $v_x, v_y, v_z$  — составляющие скорости в координатных направлениях  $x, y, z$ ;  $e$  — полная энергия единицы массы;  $p$  — давление;  $T$  — температура;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей;  $\mu$  — вязкость;  $\lambda$  — теплопроводность. Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда. Теплопроводность выражается через вязкость и число Прандтля.

Уравнение в виде (1) пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений уравнение (1) дополняется уравнениями модели турбулентности, а вместо молекулярных коэффициентов переноса используются их эффективные значения.

**3. Метод контрольного объема.** Интегрируя уравнение (1) по контрольному объему  $V_i$  с границей  $\partial V_i$  и применяя теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V_i} Q d\Omega + \oint_{\partial V_i} F dS = 0. \tag{2}$$

Предположим, что сеточная величина, определенная в центре контрольного объема, представляет собой среднее интегральное значение соответствующей непрерывно распределенной величины  $Q_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} Q d\Omega$ .

Вычисляя интеграл по границе контрольного объема как сумму произведений значений вектора потока в центрах граней контрольного объема  $F_i$  на площади его граней  $S_i$ , перепишем уравнение (2) в следующем дискретном виде:

$$\frac{dQ_i}{dt} + \frac{1}{V_i} \sum_i F_i S_i = 0. \tag{3}$$

В пространстве одной переменной (разностный шаблон показан на рис. 1) уравнение (3) примет вид

$$\frac{dQ_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x_i} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) = 0, \tag{4}$$

где  $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ .

**4. Погрешность численного решения.** Метод контрольного объема заменяет непрерывную функцию  $u(x)$  вектором, составленным из узловых значений искомой функции  $u_i \equiv u(x_i)$ , который соответствует вектору, составленному из дискретных точек сетки  $x_i$ . Разложение в ряд Фурье функции  $u(x)$  на интервале  $[0, 2\pi]$  имеет форму

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k \exp(ikx), \quad u_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \exp(-ikx) dx.$$

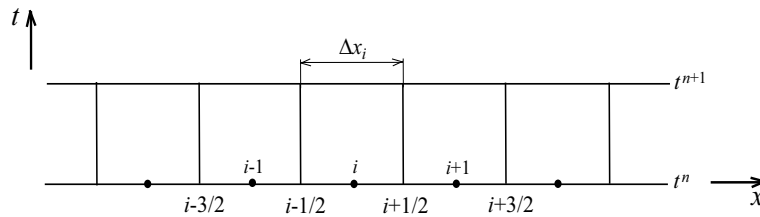


Рис. 1. Разностный шаблон для дискретизации уравнения переноса

Численное решение представляет лишь конечное число членов ряда Фурье. Разложение в дискретный ряд Фурье вектора узловых значений искомой функции записывается в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^K u_k \exp(ikn\Delta x), \quad u_k = \Delta x \sum_{n=1}^K u_k \exp(-ikn\Delta x).$$

Дискретная природа сетки ограничивает длины волн, поддающихся представлению. Длины волн, более короткие, чем длина волны отсечки  $\lambda = 2\Delta x$ , не разрешаются [1].

Нелинейному конвективному члену  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  в уравнении изменения количества движения соответствует разложение  $i \sum_{k=1}^K u_k \exp(ikx) \sum_{k=1}^K k u_k \exp(ikx)$ , что приводит к появлению волновых чисел в диапазоне от  $k_m - l$  до  $k_m + l$ , где  $k_m = \pi/\Delta x$  — предельное волновое число. Амплитуды волновых чисел, которые больше  $k_m$ , добавляются к волновым числам, меньшим  $k_m$ .

Нелинейные взаимодействия среди разрешимых масштабов и соответствующих им волновых чисел продуцируют волны с волновыми числами, большими предельного волнового числа, которые могут интерпретироваться численно (совмещенность). В турбулентном потоке данный эффект может интерпретироваться как ложный перенос энергии к малым волновым числам [2] (отрицательная турбулентная вязкость). Для того чтобы вызвать быстрое затухание волновых чисел, больших предельного волнового числа, и воспрепятствовать их добавлению к амплитудам, соответствующим меньшим волновым числам, вводится дополнительная диссипация [1].

На равномерной сетке оценка погрешности численного решения дается приближенной формулой  $\varepsilon \sim S^{-\alpha/(\nu+1)}$ , где  $\nu$  — размерность задачи;  $\alpha$  — порядок реальной сходимости, который обычно намного меньше, чем порядок погрешности аппроксимации (всегда  $\alpha > 0$ , в самых лучших разностных схемах  $\alpha \sim 1$ );  $S$  — количество арифметических операций, которое необходимо затратить на проведение расчета [3].

Для расчета  $T$  шагов по времени на сетке из  $N^\nu$  ячеек ( $N$  — характерное число ячеек в одном координатном направлении) требуется  $S \sim TN^\nu$  арифметических операций. Если  $T \sim N$ , то  $\varepsilon \sim N^{-\alpha} \sim (\Delta x)^\alpha$ . В трехмерном случае ( $\nu = 3$ ) в схемах с порядком сходимости  $\alpha \sim 1$  для уменьшения погрешности в два раза количество вычислений увеличивается в 16 раз. В то же время, для гладких решений в качестве скорости сходимости можно использовать порядок аппроксимации разностной схемы, который обычно намного больше. При использовании схем второго порядка аппроксимации для уменьшения погрешности в два раза количество вычислений увеличивается всего в четыре раза.

Для продвижения решения во времени и представления пространственных производных на мельчайших масштабах используются конечно-разностные схемы высокого порядка. В то время как дискретизация конвективных потоков проводится при помощи разностных схем повышенной разрешающей способности, способ дискретизации диффузионных потоков влияет на техническую сторону реализации подхода и соответствующие численные схемы необязательно должны иметь повышенный порядок. При расчете турбулентных течений более низкий порядок дискретизации вязких членов интерпретируется как небольшая неточность в представлении сил вязкости, что вполне допустимо, когда турбулентная вязкость рассчитывается при помощи некоторой приближенной модели.

**5. Дискретизация по времени.** С точки зрения дискретизации по времени разностные схемы метода контрольного объема могут быть явными или неявными. Следует отметить, что физически некорректное моделирование распространения возмущений, связанное с типом разностной схемы, приводит к ухудшению качества численного решения. Явные схемы оказываются лучше согласованными с конечной скоростью распространения возмущений, характерной для гиперболических уравнений, ограничивая их перенос одним шагом сетки за один шаг по времени. Для дискретизации параболических уравнений, ко-

торые характеризуются мгновенной скоростью распространения возмущений, рационально использовать неявные схемы, снимающие жесткие ограничения на шаг интегрирования по времени. В комбинированной явно-неявной схеме для дискретизации конвективных потоков применяется явная схема, а для дискретизации диффузионных потоков — неявная схема. Рост мощности современных многопроцессорных вычислительных систем делает оправданным использование простых явных конечно-разностных схем.

**5.1. Схемы низкого порядка.** Разложим функции  $Q$  и  $F$  в ряды Тейлора:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3),$$

$$F_{i\pm 1/2}^n = F_i^n \pm \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_i^n \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \pm O(\Delta x^3).$$

В схеме Эйлера учитываются слагаемые порядка  $\Delta t$ , а производная по времени вычисляется по формуле

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^n = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Разностная схема для уравнения (4) принимает вид

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) + O(\Delta t) + \Delta t O(\Delta x^2).$$

В схеме Адамса–Бэшворта учитываются слагаемые порядка  $\Delta t^2$ , а вторая производная по времени находится из соотношения

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)_i^n = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^n = \frac{1}{\Delta t} \left[ \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^n - \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n-1} \right] + O(\Delta t),$$

где

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^n = \frac{2}{3} \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n-1} = \frac{2Q_i^{n+1} - Q_i^n - Q_i^{n-1}}{3\Delta t} + O(\Delta t^2).$$

Разностная схема для уравнения (4) записывается в виде

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{n-1} - F_{i-1/2}^{n-1}) + O(\Delta t^2) + \Delta t O(\Delta x^2).$$

Комбинированный явно-неявный метод дает следующую разностную схему, записанную в примитивных переменных для несжимаемой жидкости:

$$\left(1 - \frac{3}{2} \Delta t \nabla^2\right) U_i^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2} \Delta t \nabla^2\right) U_i^n - \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{n-1} - F_{i-1/2}^{n-1}) + O(\Delta t^2) + \Delta t O(\Delta x^2).$$

**5.2. Многослойные схемы.** Перепишем уравнение (3) в полудискретном виде  $\frac{dQ_i}{dt} = R(Q_i)$ , где  $R(Q)$  — невязка. Семейство многослойных схем представляется в форме

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \Delta t [\alpha R(Q_i^n) + \beta R(Q_i^{n-1}) + \gamma R(Q_i^{n-2}) + \delta R(Q_i^{n-3})].$$

Коэффициенты разностной схемы подбираются из условия устойчивости таким образом, чтобы обеспечить максимально возможное число Куранта.

Исследование устойчивости волнового уравнения позволяет сделать следующие выводы о свойствах различных разностных схем.

1. Однослойная схема (схема Эйлера) имеет первый порядок точности и при использовании для дискретизации пространственных производных центрированных конечных разностей является безусловно неустойчивой.

2. Двухслойная схема имеет второй порядок при  $\alpha = 1.5$  и  $\beta = -0.5$ , но является безусловно неустойчивой. При  $\alpha = 2.0$  и  $\beta = -1.0$  схема имеет первый порядок, а максимальное число Куранта равняется 0.577.

3. Трехслойная схема имеет второй порядок при  $\alpha = 1.79$ ,  $\beta = -1.08$  и  $\gamma = 0.29$ . Максимальное число Куранта равняется 0.786.

4. Четырехслойная схема имеет второй порядок при  $\alpha = 1.81$ ,  $\beta = -1.205$ ,  $\gamma = 0.48$  и  $\delta = -0.085$ . Максимальное число Куранта равняется 0.85.

Радиус устойчивости пятишагового метода Рунге–Кутта равняется 2.7, однако стоимость вычислений в расчете на один слой по времени оказывается в 3.5 раза выше, чем для четырехслойной схемы.

В методе Рунге–Кутта шаг по времени выбирается из условия Куранта–Фридрихса–Леви в каждой вычислительной ячейке с последующим выбором наименьшего из полученных значений. Для многослойной схемы невязка с предыдущего слоя по времени может быть использована лишь в том случае, если расчеты проводились при одном и том же значении  $\Delta t$ . На практике шаг по времени обновляется при выполнении условий

$$\Delta t^n = \begin{cases} 0.9 \Delta t_{\text{CFL}}^n, & \text{если } \Delta t_{\text{CFL}}^n < \Delta t^{n-1}; \\ 0.8 \Delta t_{\text{CFL}}^n, & \text{если } \Delta t_{\text{CFL}}^n > 1.5 \Delta t^{n-1}. \end{cases}$$

**5.3. Схемы высокого порядка.** Одна из проблем численного решения уравнений Навье–Стокса и построения разностных схем на неструктурированных сетках связана с необходимостью обеспечить положительность искомых функций (если в момент времени  $t^n$  решение является положительным, то оно останется положительным и в момент времени  $t^{n+1}$ ).

Запишем уравнение (2) в полудискретном виде

$$\frac{dQ_i}{dt} = L(Q_i), \quad L(Q_i) = b_i Q_i + \sum_{j \neq i} b_j Q_j,$$

где  $b_i \in R$  и  $b_j \geq 0 \forall j \neq i$ . Для многошагового метода Рунге–Кутта порядка  $m$  имеем

$$Q_i^{(j)} = \sum_{k=0}^{j-1} [\alpha_{jk} Q_i^{(k)} + \Delta t \beta_{jk} L(Q^{(k)})] \quad (j = 1, \dots, m),$$

причем  $Q_i^{(0)} = Q_i^n$  и  $Q_i^{n+1} = Q_i^{(m)}$ . Если  $\min_{j,k} \frac{\beta_{jk}}{\alpha_{jk}} = 1$ , то при выполнении условия CFL ( $\Delta t < \Delta x / \lambda_{\max}$  или  $b_i \geq 1/\Delta t$ ) все коэффициенты разностной схемы являются неотрицательными и положительность разностной схемы гарантируется. В частности, трехшаговый метод Рунге–Кутта ( $m = 3$ ) реализуется в виде следующей последовательности шагов:

$$\begin{aligned} Q_i^{(1)} &= Q_i^{(0)} + \Delta t L(Q_i^{(0)}); \\ Q_i^{(2)} &= \frac{3}{4} Q_i^{(0)} + \frac{1}{4} [Q_i^{(1)} + \Delta t L(Q_i^{(1)})]; \\ Q_i^{(3)} &= \frac{1}{3} Q_i^{(0)} + \frac{2}{3} [Q_i^{(2)} + \Delta t L(Q_i^{(2)})]. \end{aligned}$$

Для коэффициентов имеет место соотношение  $\sum_k \alpha_{jk} = 1$ , которое обеспечивает положительность разностной схемы.

**6. Дискретизация по пространству.** Различные версии метода контрольного объема отличаются способом вычисления потоков (рис. 2). Одна из характерных особенностей численного решения уравнений газовой динамики состоит в возможности возникновения и распространения разрывных решений. Наличие этой особенности накладывает определенные требования на численный метод, претендующий на возможность использования в широком диапазоне скоростей течения газа [3]. При расчете высокоскоростных течений важной представляется консервативность разностной схемы, обеспечивающая правильное определение скорости распространения ударных волн и контактных разрывов. В областях с хорошими свойствами (например, при распространении слабых акустических колебаний) желательно использовать разностные схемы с хорошими дисперсионными и диссипативными свойствами, когда амплитудные и фазовые ошибки при переносе гармоник невелики. К другим требованиям относятся отсутствие нефизических осцилляций решения и достижение как минимум второго порядка точности в областях, где отсутствуют большие градиенты искомых функций.

**6.1. Методы расчета потоков.** Простейший способ вычисления потока в уравнении (4) как полусуммы соответствующих величин на гранях контрольного объема  $F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i)$  приводит к неустойчивости разностной схемы [1].

Одной из первых разностных схем, предназначенных для дискретизации уравнений Эйлера, была схема Лакса

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_{i+1} + F_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_{i+1} - Q_i).$$

Схема Лакса [4] оказалась слишком диффузионной и широкого распространения не получила.

Схема Лакса-Вендроффа использует конечные разности, ориентированные по потоку, и имеет второй порядок точности:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_{i+1} + F_{i-1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [A_{i+1/2}(Q_{i+1} - Q_i)],$$

где  $A_{i+1/2} = \frac{1}{2} (A_i + A_{i+1})$  [5]. Схема Лакса-Вендроффа является слишком диссипативной и приводит к нефизическим осцилляциям решения.

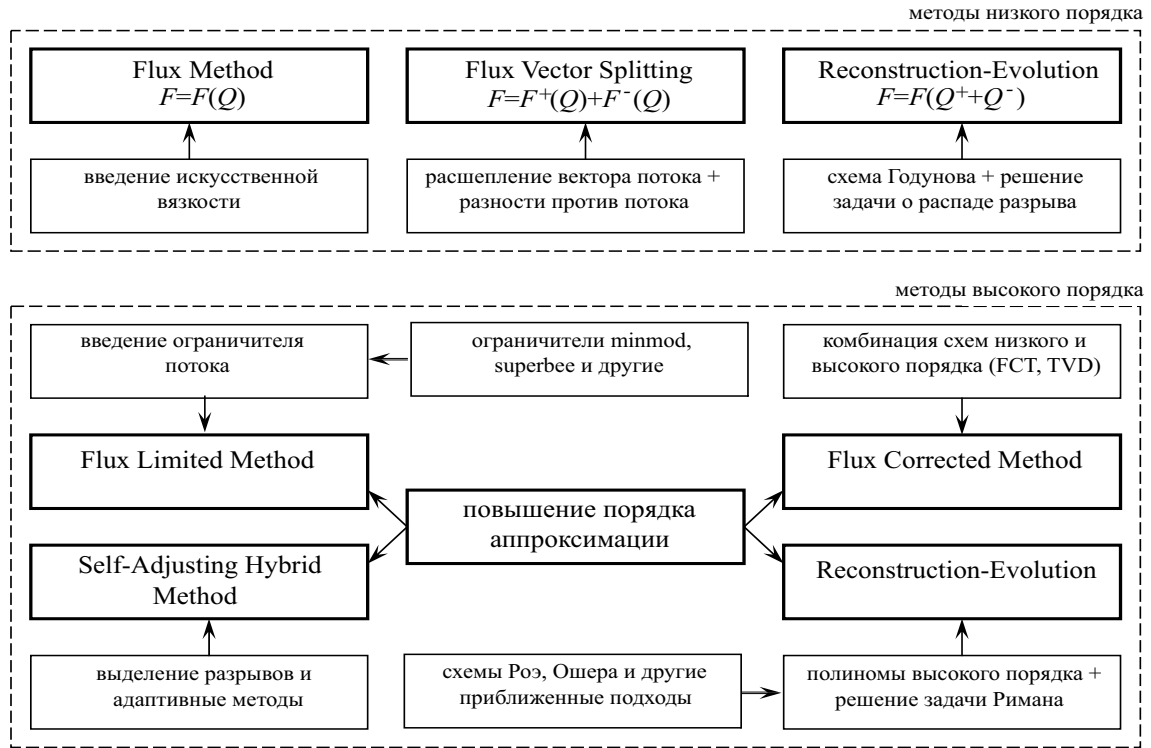


Рис. 2. Методы расчета потоков и способы повышения их точности

Достаточно большую популярность приобрела двухшаговая схема Мак-Кормака [6] (схема типа предиктор-корректор):

$$\tilde{Q}^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n); \quad Q^{n+1} = \frac{1}{2} (Q_i^n + \tilde{Q}_i^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_i^{n+1} - F_{i-1}^{n+1}).$$

Для линейных задач схема Мак-Кормака оказывается идентичной схеме Лакса-Вендроффа.

Для предотвращения нежелательных осцилляций численного решения стали использоваться схемы с разностями против потока, примером которых служит схема Бима-Уорминга [7].

Приведенные разностные схемы хорошо работают для гладких решений. Для предотвращения численных осцилляций в схемы вводятся дополнительные диссипативные члены или ограничители потока (Flux Method). Например, схема Лакса-Вендроффа приобретает вид [8]

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^* - \varepsilon_{i+1/2}(Q_{i+1} - Q_i).$$

Схема Мак-Кормака преобразуется к следующему виду [6]:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^* + \varepsilon_{i+1/2}(Q_{i+1}^* - Q_i^*) - \varepsilon_{i-1/2}(Q_i^* - Q_{i-1}^*).$$

Звездочка соответствует решению, полученному на основе оригинальной схемы. Величина  $\varepsilon$  рассчитывается исходя из градиентов искомой функции (для сохранения второго порядка точности необходимо, чтобы  $\varepsilon \sim \Delta x$ ). Поскольку искусственная вязкость вводится после получения решения, то положительность схемы не гарантируется.

Схема Стигера–Уорминга [9] основана на методе расщепления вектора потока (Flux Vector Splitting), который оказывается достаточно эффективным и относительно простым, но приводит к проблемам в точке, где собственные числа якобиана изменяют знак.

В методе Годунова [10] (Reconstruction–Evolution) используется точное решение задачи о распаде произвольного разрыва. В дальнейшем для решения задачи о распаде разрыва стали применяться приближенные подходы (среди наиболее популярных следует отметить схемы Роз и Ошера).

**6.2. Схема Годунова–Колгана.** Основная проблема при построении разностных схем расчета потоков заключается в желании повысить порядок аппроксимации и одновременно обеспечить получение монотонного численного решения при наличии слабых и сильных разрывов.

Свойством монотонности обладает схема Годунова [10], имеющая первый порядок точности, а также ее различные модификации. Схема Годунова основана на кусочно-постоянном распределении параметров течения на нижнем временном слое и точном решении задачи о распаде произвольного разрыва.

В работах Годунова [10, 11] показано, что не существует линейной монотонной разностной схемы выше первого порядка точности (теорема Годунова). Выход из противоречия между необходимостью получения монотонного решения и повышением порядка аппроксимации предложен в работе Колгана [12], смысл которой и последующих работ на эту тему заключается в создании нелинейных механизмов, обеспечивающих непрерывный переход от немонотонной схемы второго порядка аппроксимации с центральными разностями к монотонной схеме первого порядка с односторонними разностями в узлах сетки. Разностные схемы с повышенным порядком аппроксимации используются в узлах, в которых численное решение является гладким, а в точках, в которых решение имеет разрывы, используются монотонные разностные схемы низкой точности.

Принцип минимальных значений производных, используемый в схеме Колгана [12], позволяет повысить порядок схемы Годунова до второго по всем направлениям, за исключением направления интегрирования. Схема Колгана является неоднородной, но сохраняет свойство монотонности, позволяя уменьшить размывание контактных разрывов и слабых скачков уплотнения, а также достичь большей точности в областях непрерывного изменения решения.

Другой вариант принципа минимальных производных для построения монотонизированных разностных схем второго порядка используется в работе [13].

Для повышения порядка аппроксимации базовой схемы первого порядка применяются подходы, согласованные с условием энтропии и его следствиями [14].

Разностные схемы, использующие схему Годунова в качестве монотонной базовой схемы, реализуются в следующей последовательности.

1. Реконструкция решения в каждом контрольном объеме, экстраполяция неизвестных для нахождения состояния потока на его гранях по величинам, заданным в центре (reconstruction). На практике используются кусочно-постоянное (схема Годунова), кусочно-линейное (схема Ван Лиры) и кусочно-параболическое (схема Чакраварти–Ошера) распределения параметров потока в пределах ячейки (рис. 3) и различные ограничители потока.

2. Решение задачи Римана для каждой грани контрольного объема с учетом локального направления потока (в направлении нормали к грани контрольного объема). Точное решение задачи Римана представляется достаточно затратным с вычислительной точки зрения, поэтому широкое применение находят приближенные подходы, например, схемы Роз и Ошера.

3. Реализация шага по времени (evolution).

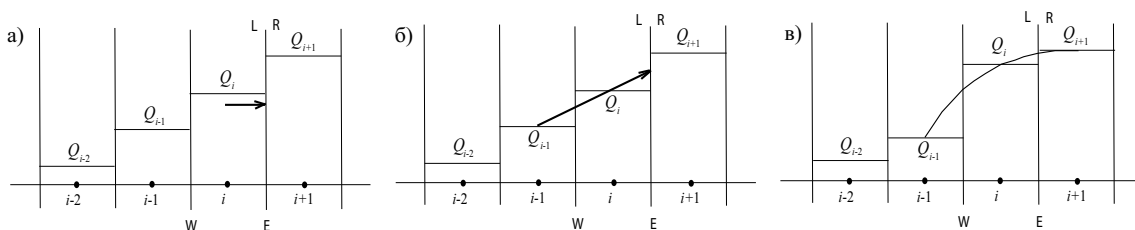


Рис. 3. Кусочно-постоянное (фрагмент а), кусочно-линейное (фрагмент б) и кусочно-параболическое (фрагмент в) распределения параметров потока в пределах ячейки

Схема Годунова обладает аппроксимационной вязкостью, поэтому для расчета сильных разрывов нет необходимости вводить искусственную вязкость. При расчете слабых разрывов типа волн разрежения погрешность аппроксимации становится достаточно большой, что проявляется в их сильном размазывании (размазывание тем сильнее, чем меньше число Куранта).

В [15, 16] искомые функции предварительно вычисляются в момент времени  $t_n + \Delta t/2$ . Полученные значения используются для формирования начальных данных для решения задачи о распаде разрыва. В [17] начальные данные для решения задачи Римана определяются по величинам на нижнем слое по времени в точках пересечения этого слоя характеристиками, выпущенными со слоя  $t_n + \Delta t/2$  с границ двух соседних ячеек.

Вместо схемы Годунова применяются и другие, более простые в реализации, монотонные разностные схемы [18], а также методы кинетической теории газов [19]. Разрабатываются неявные схемы Годунова [20, 21] и многослойные разностные схемы [22].

**6.3. Монотонные разностные схемы.** Развитие монотонизированных разностных схем повышенного порядка точности связано с работами Ван Лира [23–26]. Недостатки этих подходов (Flux Limited Method), а также метода антидиффузии с коррекцией потока [27] (Flux Corrected Transport, FCT), связаны с тем, что в них делается попытка добиться монотонности физических переменных (например, скорости и давления), которые, в принципе, не обязаны быть монотонными [3]. Дифференциальные уравнения газовой динамики удовлетворяют принципу максимума для инвариантов Римана, в то время как принцип максимума для физических переменных в уравнениях газовой динамики не имеет места (даже для гладких решений).

Общим во всех методах подобного класса является использование разнообразных монотонизирующих ограничителей потоков (рис. 4) с переключателями, зависящими от локальных свойств решения (под  $\alpha_i$  понимается  $i$ -я характеристика). Имеется много различных ограничителей, начиная от простого ограничителя [23] до сложных, с большим числом переключений. Большинство из ограничителей имеют дискретные переключатели типа  $\max\{f_1, f_2\}$ , что приводит к разрыву первой производной и снижению точности (использование абсолютных значений контрольных функций имеет тот же смысл и приводит к тем же последствиям), в связи с чем применяются гладкие ограничители.

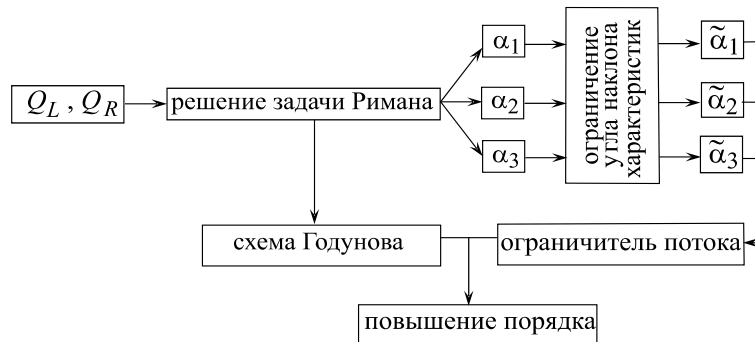


Рис. 4. Реализация схемы Годунова

Среди различных монотонизированных разностных схем повышенного порядка аппроксимации наиболее оптимальное соотношение между точностью, экономичностью, простотой и универсальностью имеет метод кусочно-параболической реконструкции [3, 28] (Piecewise Parabolic Method, PPM), который считается наиболее перспективным для прямого численного моделирования газодинамической неустойчивости и турбулентности на современных многопроцессорных системах [28, 29].

В методе FCT на шаге предиктор вносится сильная диффузия, а на шаге корректор — равная ей антидиффузия [27]. Шаг предиктора осуществляется с использованием схемы низкого порядка, гарантирующей отсутствие нефизических осцилляций решения. Антидиффузия ограничивается таким образом, чтобы в решении не возникало новых максимумов или минимумов, а имеющиеся экстремумы не усиливались. Шаг корректора позволяет диффузии, введенной на шаге предиктора, уничтожить дисперсионную рябь. Несмотря на эффективность метода FCT, дать его теоретическое обоснование достаточно трудно [1].

Путь создания схем повышенного порядка точности состоит в использовании нелинейных разностных схем (Flux Corrected Method), в которых аппроксимация может локально ухудшаться — схем TVD (Total Variation Diminishing) — или схем, в которых монотонность выполняется только в некоторой глобальной норме — схем ENO (Essentially Non-Oscillatory). Схемы TVD и ENO позволяют получить мо-



нотонное решение без чрезмерного измельчения сетки, хотя и требуют дополнительных операций на каждом шаге интегрирования по времени.

**6.4. Схемы TVD.** В работах Хартена [30, 31] разработан TVD-метод, который обеспечивает выполнение принципа максимума для характеристических переменных (для инвариантов Римана в одномерной газовой динамике) и более точно передает характер поведения разрывных решений. Повышение порядка аппроксимации достигается за счет введения антидиффузионного члена и экстраполяции потоков из прилежащих ячеек. Величина производной, используемой при экстраполяции потоков, ограничивается для получения монотонного решения.

В методе Хартена поток представляется в виде  $F = F^+ + F^-$ ,  $F^- = \frac{1}{2}(F - |F|)$ ,  $F^+ = \frac{1}{2}(F + |F|)$ . Полагая  $F = |A|Q$ , получим

$$F_{i+1/2} = \underbrace{\frac{1}{2}[F(Q_{i+1}) + F(Q_i)]}_{\text{контроль дисперсии}} - \underbrace{\frac{1}{2}|A|(Q_R - Q_L)}_{\text{контроль диссипации}}.$$

Благодаря расщеплению потока, имеется возможность контролировать дисперсионные и диссипативные свойства разностной схемы независимо друг от друга.

В другом варианте метода расщепления полагается  $F_{i+1/2} = A_{i-1/2}^+ F_{i+1} + A_{i+1/2}^- F_i$ , где  $A^\pm = L \Lambda^\pm R$ ,  $\Lambda^\pm = \text{diag}\{\lambda^\pm\}$ ,  $\lambda^\pm = [1 \pm \text{sign}(\lambda_i)]/2$  [32].

В [33] построены симметричные TVD-схемы (Symmetric TVD, STVD), а в [34] разработаны схемы LED (Local Extremum Diminishing), представляющие собой комбинацию двух симметричных TVD-схем, переключение между которыми происходит в зависимости от характеристик потока.

Симметричные TVD-схемы записываются в виде  $F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^* + \phi(F_{i+1/2}^{**} - F_{i-1/2}^*)$ , где  $\phi$  — ограничитель потока [33]. Для расчета  $F_{i+1/2}^*$  применяется противопоточная схема, а для расчета  $F_{i+1/2}^{**}$  — схема Лакса-Вендроффа. Схемы STVD порядка не выше восьмого можно записать в виде

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}[aF_{i-3} + bF_{i-2} + cF_{i-1} + dF_i + eF_{i+1} + fF_{i+2} + gF_{i+3} + hF_{i+4}] - \frac{1}{2}|A|(Q_R - Q_L),$$

где

$$a_k = \frac{\prod_{l=i-3, l \neq k}^{i+4} (x_{i+1/2} - x_l)}{\prod_{l=i-3, l \neq k}^{i+4} (x_{i-3} - x_l)} \quad (k = i-3, i-2, \dots, i+4).$$

Приведем разностные схемы различного порядка.

Порядок	Схема
2	$F_{i+1/2} = \frac{1}{12}(F_{i+1} + F_i) - \frac{1}{2} A (Q_R - Q_L)$
4	$F_{i+1/2} = \frac{1}{12}(-F_{i+2} + 7F_{i+1} + 7F_i - F_{i-1}) - \frac{1}{2} A (Q_R - Q_L)$
6	$F_{i+1/2} = \frac{1}{30}(F_{i+3} - 8F_{i+2} + 37F_{i+1} + 37F_i - 8F_{i-1} + F_{i-2}) - \frac{1}{2} A (Q_R - Q_L)$

Схемы LED можно записать в обобщенном виде:  $\frac{dQ_i}{dt} = \sum_k c_{ki}(Q)(Q_k - Q_i)$ , где для любого  $k$  выполнено  $c_{ki}(Q) \geq 0$  [34]. При этом локальные максимумы не увеличиваются, локальные минимумы не уменьшаются, а сама разностная схема удовлетворяет условию положительности.

В противоположность методу FCT, схемы TVD являются одношаговыми, а выбор свободных параметров сводится к выбору ограничителя потока. Простая структура ограничителя и одношаговая структура алгоритма ограничения потоков обеспечивают экономичность схем TVD.

Кроме требования монотонности или требования неувеличения полной вариации, большое влияние на точность расчетов оказывают дополнительные ограничения, в частности, условие неубывания энтропии [14]. Это требование необходимо тем или иным способом учитывать при построении разностных схем газовой динамики, чтобы не возникало ударных волн разрежения в звуковой точке при описании сверхзвуковых течений в переменных Эйлера. Требование неубывания энтропии накладывает дополнительные ограничения на разностные TVD-схемы, а также конструкции ограничителей потоков, усложняя вид переключателей.

**6.5. Схемы ENO.** Логическим завершением метода реконструкции сеточных решений с автоматическим анализом их гладкости является ENO-метод [35], доведенный до уровня, пригодного для практического применения, в работах [36, 37] (в них были также построены схемы третьего и четвертого порядков аппроксимации и методы Рунге–Кутты тех же порядков для дискретизации по времени).

Техника автоматического анализа гладкости численного решения сводится к определению ячеек сетки, в которых находятся разрывы сеточной функции, разрывы ее первой производной (слабые разрывы) и разрывы производных более высокого порядка в соответствии с заказанным предельным порядком аппроксимации. В зависимости от локального уровня гладкости, для реконструкции сеточного решения используются интерполяционные многочлены Ньютона соответствующего порядка (степень полинома определяет порядок аппроксимации). Использование полиномов выше восьмой степени не дает заметного увеличения точности [36, 37].

Потоки через грани контрольного объема находятся из соотношений

$$F_{i-1/2} = P_{i-1/2}(x_i - c\Delta t) - P_{i-1/2}(x_i); \quad F_{i+1/2} = P_{i+1/2}(x_{i+1} - c\Delta t) - P_{i+1/2}(x_{i+1}).$$

Здесь  $P_{i-1/2}(x)$  и  $P_{i+1/2}(x)$  — полиномы Ньютона степени  $k$ , построенные на наборе из  $k + 1$  последовательной точки, включающем интервал  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Интерполяционный полином имеет вид

$$P(x) = F(u_{i_0}) + (x - x_{i_0})\Delta_1(x_{i_0}, x_{i_1}) + (x - x_{i_0})(x - x_{i_1})\Delta_2(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + \prod_{m=0}^{k-1} (x - x_{i_m})\Delta_k(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

Здесь  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  — точки шаблона. Разделенные разности вычисляются по формулам

$$\Delta_1(x_{i_0}, x_{i_1}) = \frac{F(u_{i_1}) - F(u_{i_0})}{x_{i_1} - x_{i_0}} \quad \text{при } m = 1;$$

$$\Delta_m(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = \frac{\Delta_{m-1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) - \Delta_{m-1}(x_{i_0}, \dots, x_{i_{m-1}})}{x_{i_m} - x_{i_0}} \quad \text{при } m > 1.$$

Точки  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ , входящие в шаблон каждой разделенной разности, образуют набор из  $m + 1$  последовательной точки, однако индексы точек могут располагаться в любом порядке.

Вычисление коэффициентов полиномов Ньютона производится в порядке возрастания порядков разделенных разностей. При вычислении разделенной разности первого порядка в качестве точек шаблона выбираются  $x_i$  и  $x_{i+1}$ . Для расширения шаблона может быть использована как точка  $x_{i-1}$ , так и точка  $x_{i+2}$ . Рассчитываются величины  $\Delta_2^- = \Delta_2(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  и  $\Delta_2^+ = \Delta_2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$  для выбора между точками  $x_{i-1}$  и  $x_{i+2}$ . Если  $|\Delta_2^+| < |\Delta_2^-|$ , то используется шаблон  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ , иначе — шаблон  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ . Процедура выбора повторяется при вычислении каждого следующего коэффициента полинома. Шаблон схемы состоит из  $k + 1$  последовательной точки, содержит точки  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , но конкретное расположение точек шаблона относительно  $x_i$  и  $x_{i+1}$  зависит от поведения решения.

Достаточно часто ENO-дискретизация записывается не для производных кусочно-полиномиального распределения в пределах ячейки, а для конвективных производных в целом. Такой подход позволяет упростить численную реализацию и сформулировать так называемые взвешенные ENO-схемы (Weighted ENO, WENO). Их преимущество состоит в плавном переходе с одного разностного шаблона на другой и возможности использования на гладких решениях максимального порядка аппроксимации, допускаемого шаблоном.

Схемы третьего и пятого порядков точности на равномерной сетке можно записать в следующем виде:

— WENO-3

$$F_{i+1/2} = \frac{w_0 F_{i+1/2}^{(0)} + w_1 F_{i+1/2}^{(1)}}{w_0 + w_1}; \quad F_{i+1/2}^{(0)} = -\frac{1}{2} F_{i-1} + \frac{3}{2} F_i; \quad F_{i+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2} F_i + \frac{1}{2} F_{i+1};$$

$$w_0 = \frac{1}{3(\beta_0 + \varepsilon)}; \quad \beta_0 = |F_{i-1} - F_i|; \quad w_1 = \frac{2}{3(\beta_1 + \varepsilon)}; \quad \beta_1 = |F_i - F_{i+1}|;$$

— WENO-5

$$F_{i+1/2} = \frac{w_0 F_{i+1/2}^{(0)} + w_1 F_{i+1/2}^{(1)} + w_2 F_{i+1/2}^{(2)}}{w_0 + w_1 + w_2}; \quad F_{i+1/2}^{(0)} = \frac{1}{3} F_{i-2} - \frac{7}{6} F_{i-1} + \frac{11}{6} F_i;$$

$$F_{i+1/2}^{(1)} = -\frac{1}{6} F_{i-1} + \frac{5}{6} F_i + \frac{1}{3} F_{i+1}; \quad F_{i+1/2}^{(2)} = -\frac{1}{3} F_i + \frac{5}{6} F_{i+1} - \frac{1}{6} F_{i+2};$$

$$w_0 = \frac{1}{10(\beta_0 + \varepsilon)^2}; \quad \beta_0 = \frac{13}{12} (F_{i-2} - 2F_{i-1} + F_i)^2 + \frac{1}{4} (F_{i-2} - 4F_{i-1} + 3F_i)^2;$$

$$w_1 = \frac{6}{10(\beta_1 + \varepsilon)^2}; \quad \beta_1 = \frac{13}{12} (F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (F_{i-1} - F_{i+1})^2;$$

$$w_2 = \frac{1}{10(\beta_2 + \varepsilon)^2}; \quad \beta_2 = \frac{13}{12} (F_i - 2F_{i+1} + F_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3F_i - 4F_{i+1} + F_{i+2})^2.$$

Малая величина  $\varepsilon$  вводится в знаменатель для избежания деления на ноль.

**6.6. Схема MUSCL.** Помимо техники ограничения потоков, при построении монотонизированных разностных схем повышенного порядка аппроксимации используется техника монотонной интерполяции сеточных решений (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws, MUSCL). Вместо потоков из соседних ячеек экстраполируются переменные, величина их производных ограничивается, а уточненные значения подставляются в выражения для потоков [23] (рис. 5). Преимущество схемы MUSCL состоит в возможности повышения точности схемы за счет изменения порядка интерполяции в пределах ячейки (рис. 3).

Требование монотонности состоит в том, чтобы при реконструкции решения не возникало новых максимумов или минимумов, а остающийся скачок не изменял свой знак на границах между ячейками. Такие же ограничения получаются и при использовании условия TVD. Наряду с требованием не появления новых экстремумов, в алгоритм реконструкции добавляется механизм укручения профилей на контактных разрывах, чтобы уменьшить численную диффузию [13, 28].

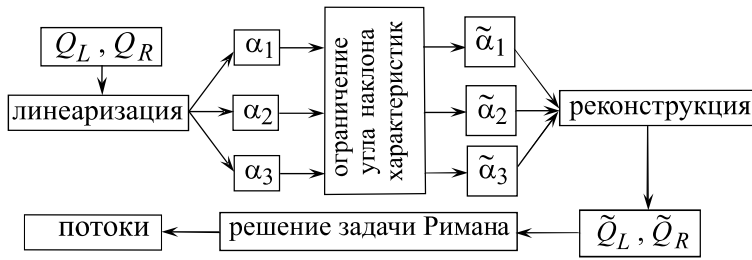


Рис. 5. Реализация схемы MUSCL

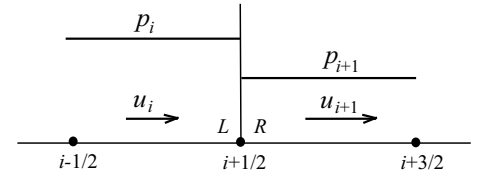


Рис. 6. Постановка задачи о распаде произвольного разрыва

Схемы различного порядка на равномерной сетке можно записать в следующем виде:

$$Q_L = Q_i + \frac{\phi}{4} [(1 - \varkappa) \Delta_{i-1/2} Q + (1 + \varkappa) \Delta_{i+1/2} Q]; \quad Q_R = Q_{i+1} - \frac{\phi}{4} [(1 + \varkappa) \Delta_{i+1/2} Q + (1 - \varkappa) \Delta_{i+3/2} Q].$$

Приращения искомой функции находятся из соотношений

$$\Delta_{i-1/2} Q = Q_i - Q_{i-1}, \quad \Delta_{i+1/2} Q = Q_{i+1} - Q_i, \quad \Delta_{i+3/2} Q = Q_{i+2} - Q_{i+1}.$$

При этом  $\varkappa = -1$  для схемы второго порядка,  $\varkappa = 1/3$  для схемы третьего порядка,  $\varkappa = 1$  для схемы CDS-2. Под  $\phi$  понимается ограничитель потока. При использовании ограничителя minmod получим

$$Q_L = Q_i + \frac{1}{4} [(1 - \varkappa) \tilde{\Delta}_{i-1/2} + (1 + \varkappa) \tilde{\Delta}_{i+1/2}]; \quad Q_R = Q_{i+1} - \frac{1}{4} [(1 + \varkappa) \tilde{\Delta}_{i+1/2} + (1 - \varkappa) \tilde{\Delta}_{i+3/2}].$$

Здесь

$$\tilde{\Delta}_{i+1/2} = \text{minmod}(\Delta_{i+1/2}, \omega \Delta_{i-1/2}), \quad \tilde{\tilde{\Delta}}_{i+1/2} = \text{minmod}(\Delta_{i+1/2}, \omega \Delta_{i+3/2}).$$

При  $\varkappa = 1$  полагается  $\tilde{\tilde{\Delta}}_{i+1/2} = \tilde{\tilde{\Delta}}_{i-1/2}$ . Ограничитель  $\text{minmod}$  имеет вид [26]

$$\text{minmod}(x, \omega y) = \text{sign } x \max \left\{ 0, \min \left[ 0, \min(|x|, \omega y \text{ sign } x) \right] \right\},$$

где  $\omega$  — параметр сжатия, такой, что  $1 \leq \omega \leq \frac{3 - \varkappa}{1 - \varkappa}$ .

В случае линейного уравнения переноса метод Хартена и схема MUSCL приводят к одним и тем же результатам. В нелинейном случае схема MUSCL представляется более предпочтительной [3]. Поскольку оба подхода основаны на экстраполяции величин из соседних ячеек, это ставит их в определенную зависимость от однородности используемой сетки.

**6.7. Схема Чакраварти–Ошера.** Схема Чакраварти–Ошера основана на кусочно-параболическом распределении искомым переменных в пределах ячейки [39]. На промежуточном шаге определяются вспомогательные переменные

$$\alpha_{1,m+1/2}^i = l_{m+1/2}^i(Q_m - Q_{m-1}); \quad \alpha_{2,m+1/2}^i = l_{m+1/2}^i(Q_{m+1} - Q_m); \quad \alpha_{3,m+1/2}^i = l_{m+1/2}^i(Q_{m+2} - Q_{m+1}).$$

Здесь  $l = \{l_1, l_2, \dots\}$  представляет собой множество левых собственных векторов. Верхний индекс  $i$  соответствует  $i$ -му собственному значению и  $i$ -му собственному вектору. Нижние индексы 1, 2, 3 используются для нумерации.

Семейство схем, удовлетворяющих условию TVD, имеет вид

$$F_{m+1/2} = H_{m+1/2} + \sum_i \left( \frac{1 + \varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i + \frac{1 - \varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i \right) \lambda_{m+1/2}^{i+} r_{m+1/2}^i - \\ - \sum_i \left( \frac{1 + \varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i + \frac{1 - \varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{3,m+1/2}^i \right) \lambda_{m+1/2}^{i+} r_{m+1/2}^i,$$

где  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  и  $r = \{r_1, r_2, \dots\}$  представляют собой множество собственных значений и множество правых собственных векторов. Первый член в правой части определяет поток по схеме первого порядка:

$$H_{m+1/2} = \frac{1}{2} [F(Q_{m+1/2}) + F(Q_m)] - \frac{1}{2} \sum_i (\lambda_{m+1/2}^{i+} - \lambda_{m+1/2}^{i-}) \alpha_{2,m+1/2}^i r_{m+1/2}^i.$$

Здесь

$$\tilde{\alpha}_{1,m+1/2}^i = \text{minmod} \{ \alpha_{1,m+1/2}^i, b \alpha_{2,m+1/2}^i \}; \quad \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i = \text{minmod} \{ \alpha_{2,m+1/2}^i, b \alpha_{1,m+1/2}^i \}; \\ \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i = \text{minmod} \{ \alpha_{2,m+1/2}^i, b \alpha_{3,m+1/2}^i \}; \quad \tilde{\alpha}_{3,m+1/2}^i = \text{minmod} \{ \alpha_{3,m+1/2}^i, b \alpha_{2,m+1/2}^i \}.$$

При этом  $b = (3 - \varkappa)/(1 - \varkappa)$ , а параметр  $\varkappa$  определяет схемы различной точности.

При использовании неограниченных величин и равномерной сетки ошибка усечения находится из соотношения

$$\varepsilon = - \left( \frac{\varkappa - 1/3}{4} \right) \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} (\Delta x)^2.$$

**6.8. Схема AUSM.** В схеме AUSM (Advection Upstream Splitting Method) невязкие потоки расщепляются на две составляющие, связанные со скоростью и давлением соответственно [40]. В одномерном случае

$$F = F^c + F^p = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \varepsilon u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ p u \end{pmatrix}.$$

Для расчета  $F^c$  используется полностью противопоточная схема, в то время как для расчета  $F^p$  применяется комбинированная схема. В частности,  $p_{i+1/2} = (p_{i+1/2})_L^+ + (p_{i+1/2})_R^-$ . Расчет состояния потока слева и справа от грани контрольного объема основан на линейной экстраполяции узловых значений давления:

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{p}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M), & \text{если } |M| \leq 1, \\ \frac{p}{2} (M \pm |M|)/M, & \text{если } |M| > 1. \end{cases}$$

Если  $|M| > 1$  и  $M > 0$  (сверхзвуковые течения), то  $p_{i+1/2} = p_i$ , поэтому имеется вклад только от точек, лежащих вверх по потоку. Для дозвуковых течений имеется вклад как от точек вниз, так и от точек вверх по потоку.

**7. Решение задачи о распаде разрыва.** Задача о распаде произвольного разрыва (задача Римана) является отправной точкой характеристических численных методов.

**7.1. Постановка задачи.** Задача Римана состоит в отыскании обобщенного (в общем случае разрывного) решения уравнений Эйлера в момент времени  $t > 0$  при начальных условиях (рис. 6)

$$Q(x, 0) = \begin{cases} Q_L & \text{при } x \leq 0, \\ Q_R & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Индексы  $L$  и  $R$  обозначают состояния потока слева и справа от разделительной линии (например, грани контрольного объема).

Уравнения газовой динамики в инвариантах Римана имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial R^\pm}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial R^\pm}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $s = p/\rho^\gamma$ ,  $R^\pm = u \pm 2c/(\gamma - 1)$ . Инварианты Римана переносятся со скоростями  $u \pm c$  (акустические характеристики), а энтропия — со скоростью  $u$  (энтропийная характеристика). На практике уравнения Римана используются для постановки граничных условий на внешних границах расчетной области.

Автомодельное решение задачи Римана состоит из  $m$  центрированных волн в плоскости  $(x, t)$ , разделяющих  $m + 1$  кусочно-постоянное состояние потока, включая два начальных. Указанные волны являются волной сжатия, энтропийной волной и волной разрежения. Возможны восемь вариантов, половина из которых соответствуют случаю  $p_1 > p_2$ , а другие — случаю  $p_1 < p_2$  (рис. 7).

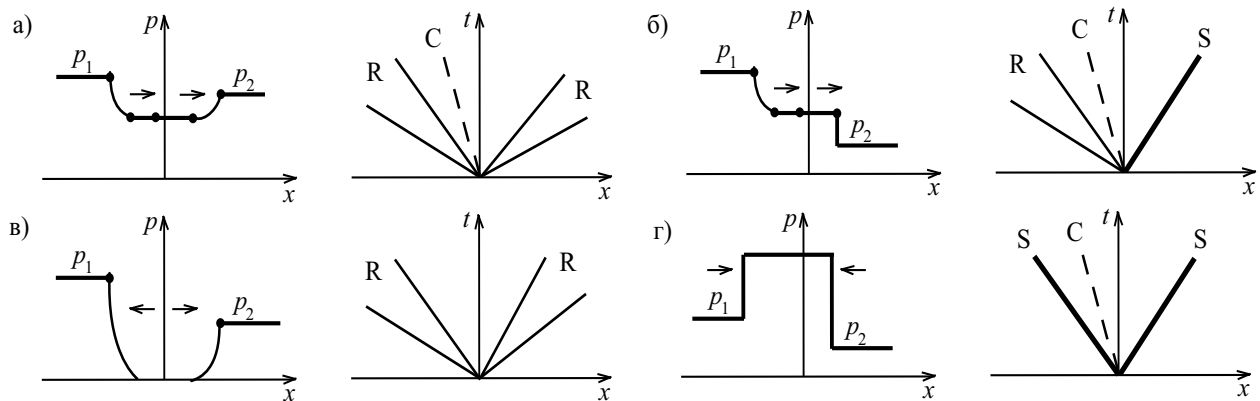


Рис. 7. Решение задачи о распаде произвольного разрыва при  $p_1 > p_2$  (а — две волны разрежения, б — волна разрежения и ударная волна, в — волна разрежения и вакуум, г — две ударных волны). Обозначения R, S, C соответствуют волне разрежения, ударной волне и контактному разрыву

Решение задачи о распаде разрыва сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, полученных из законов сохранения.

**7.2. Методы решения.** Информация, необходимая для расчета потоков в методе Годунова, сводится к использованию состояния, образовавшегося после распада разрыва на грани контрольного объема. При всей трудоемкости решения задачи Римана в методе Годунова используется только часть полученной информации (однако его преимущество состоит в энтропийной согласованности).

Ограничение на шаг по времени вытекает из условия, чтобы волны, образовавшиеся после распада разрыва на грани контрольного объема, не достигли его центра, а при более слабом ограничении — другой грани. Схема Годунова обеспечивает положительность решения, если  $\frac{|\lambda_{\max}| \Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2}$ .

К числу наиболее распространенных методов, основанных на приближенном решении задачи о распаде разрыва, относятся подходы [41–44]. В [41] при распаде произвольного разрыва ударная волна заменяется волной сжатия, что приводит к системе уравнений, решаемой точно. Расщепление [42] основано

на идее использования двух якобианов — в левом и правом узле, чтобы затем сконструировать один — из бегущих направо простых волн левого якобиана и бегущих налево простых волн правого якобиана. В [43] рассматриваются только волны разрежения и сжатия. Схема Роэ [44] основана на задании явных формул для определения линеаризованных величин, входящих в якобиан (используются примитивные переменные). Недостаток схемы Роэ, состоящий в том, что она допускает существование ударной волны разрежения в звуковой точке ( $u - c \sim 0$ ), устраняется при помощи введения дополнительной вязкости и модифицирования собственных значений в районе звуковых точек.

**7.3. Схема Роэ.** Подход Роэ [44] основан на квазилинейной форме уравнений Эйлера и предполагает построение некоторой матрицы, являющейся аналогом якобиана применительно к задаче о распаде разрыва. На матрицу налагается ряд условий, при которых задача становится гиперболической и разрешимой, а метод консервативным, и обеспечивается необходимая гладкость аппроксимации вектора потока при вариации состояний слева и справа. При этих условиях задача становится квазилинейной и решается на основе характеристических свойств уравнений Эйлера.

Уравнение, описывающее течение, записывается в виде  $\frac{\partial Q}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ . Поток через грань контрольного объема рассчитывается по формуле

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} [F(Q_R) + F(Q_L)] - \frac{1}{2} |\tilde{A}|(Q_R - Q_L).$$

Матрица  $\tilde{A}(Q_L, Q_R) = \partial F / \partial Q$  удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\Delta F = F_R - F_L = \tilde{A}(Q_L, Q_R) \Delta Q$  для  $\forall Q_L$  и  $\forall Q_R$ .

2.  $\tilde{A}(Q, Q) = A(Q)$ .

3. Матрица  $\tilde{A}(Q_L, Q_R)$  обладает действительными собственными значениями и полным набором собственных векторов (матрица диагонализуема), поэтому  $\tilde{A}(Q_L, Q_R) = \tilde{L} \tilde{\Lambda} \tilde{R}$ .

При расчете якобиана используются средние величины  $\tilde{A}(Q_L, Q_R) = A(\tilde{Q})$ , выражения для которых даются формулами

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{e} = \frac{\sqrt{\rho_L} e_L + \sqrt{\rho_R} e_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.$$

Приращение вектора потока записывается в виде разложения по характеристическим волнам

$$\Delta F = \sum_{k=1}^m \Delta_{i+1/2} W_k \tilde{\lambda}_k r_k.$$

Учитывая, что

$$F_L + \sum_{\tilde{\lambda}_k < 0} \Delta_{i+1/2} W_k \tilde{\lambda}_k r_k = F_R - \sum_{\tilde{\lambda}_k > 0} \Delta_{i+1/2} W_k \tilde{\lambda}_k r_k,$$

для расчета потока через грань контрольного объема получается соотношение

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_L + F_R) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \Delta_{i+1/2} W_k |\tilde{\lambda}_k| r_k.$$

Здесь  $\Delta W = \tilde{R} \Delta Q$  — вектор характеристических приращений. Приращения характеристических переменных находятся из соотношений  $\Delta W_1 = \frac{\Delta p}{\tilde{\rho} \tilde{a}} - \Delta u$ ,  $\Delta W_2 = \Delta p - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2}$ ,  $\Delta W_3 = \frac{\Delta p}{\tilde{\rho} \tilde{a}} + \Delta u$ , где  $\Delta p = p_R - p_L$ ,  $\Delta u = u_R - u_L$ ,  $\Delta p = p_R - p_L$ .

Собственные значения и правые собственные векторы вычисляются на основе осредненных по Роэ величин:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{a}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u} + \tilde{a}; \quad \tilde{r}_1 = \frac{\tilde{p}}{2\tilde{a}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{a} \\ \tilde{H} - \tilde{u}\tilde{a} \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{u}^2/2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_3 = \frac{\tilde{p}}{2\tilde{a}} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{a} \\ \tilde{H} + \tilde{u}\tilde{a} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{a}^2 = (\gamma - 1) \left( \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \right)$ .

Недостаток подхода Роэ состоит в отсутствии механизма различения волн разрежения и сжатия. При обращении в нуль собственных значений вклад соответствующих волн в приращение вектора потока становится нулевым. В случае волны разрежения, которая в отличие от волны сжатия и контактного разрыва занимает определенную область пространства, это приводит к получению нефизического решения — скачка разрежения. Проблема получения нефизического решения связана с условием энтропии, которое предполагает выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства для разностной схемы [14].

По сравнению со схемами расщепления вектора потока (Flux Vector Splitting), метод расщепления разности вектора потока — схема Роэ (Flux Difference Splitting) — обладает заметно меньшей схемной диссипацией, что обеспечивает лучшее разрешение контактных разрывов и сдвиговых слоев. Вместе с тем, схема Роэ дает неточные результаты для некоторых простых течений.

В [30] используется ограничение снизу модулей собственных значений, чтобы не допустить обращения их в нуль для волн разрежения при сохранении аппроксимации вектора потока:

$$|\lambda_k^*| = \begin{cases} \frac{1}{2} (\delta_k + \tilde{\lambda}_k^2 / \delta_k) & \text{при } |\tilde{\lambda}_k| < \delta_k, \\ |\tilde{\lambda}_k| & \text{при } |\tilde{\lambda}_k| \geq \delta_k. \end{cases}$$

Величины  $\delta_k$  являются разными для каждого характеристического поля.

Задачи с сильными волнами разрежения предъявляют особые требования к схемной вязкости при наличии звуковой точки. Для контактного разрыва и волны сжатия можно обойтись без внесения дополнительной диссипации, тогда как для волны разрежения со звуковой точкой такая мера необходима. Диссипация определяется исходя из перепада значений соответствующей характеристической скорости  $\delta_k = 2 \max \{ \Delta \lambda_k, 0 \}$ . В случае растяжения характеристического поля выполнено  $\Delta \lambda_k > 0$  вблизи звуковой точки, а минимальное значение  $|\tilde{\lambda}_k|$  определяется по перепаду характеристической скорости  $\Delta \lambda_k$ , тогда как при сжатии имеем  $\Delta \lambda_k < 0$ , а минимальное значение не отделяется от нуля. Такая коррекция обеспечивает хорошие характеристики схемного решения в случае волн разрежения и позволяет получать физически осмысленные обобщенные решения задач газовой динамики.

В схеме Ошера [41] поток рассчитывается по формуле  $F_{i+1/2} = F(Q_L) + \int_{Q_L}^{Q_R} A^-(Q) dQ$ . Отличие от схемы Роэ заключается в пути интегрирования, который состоит из двух кривых, проходящих через звуковую точку.

**8. Разностные схемы на неструктурированной сетке.** На структурированной сетке разностные схемы можно записать в следующем обобщенном виде [45]:

$$F_{i+1/2} = F_i + \frac{1}{2} \phi(r_{i+1/2}) (F_{i+1} - F_i), \quad r_{i+1/2} = \frac{F_i - F_{i-1}}{F_{i+1} - F_i}, \quad (5)$$

или

$$F_{i+1/2} = F_i + \frac{1}{2} \phi(\tilde{r}_{i+1/2}) (F_i - F_{i-1}), \quad \tilde{r}_{i+1/2} = \frac{F_{i+1} - F_i}{F_i - F_{i-1}}. \quad (6)$$

Связь между (5) и (6) устанавливается при помощи соотношений

$$\tilde{r}_{i+1/2} = \frac{1}{r_{i+1/2}}, \quad \phi(r_{i+1/2}) = \frac{\phi(\tilde{r}_{i+1/2})}{\tilde{r}_{i+1/2}}.$$

В частности,  $\phi(r) = 1$  для схемы CDS-2,  $\phi(r) = r$  для схемы UDS-1.

На неструктурированной сетке соотношение для расчета потока через грань контрольного объема с индексом  $f$  (рис. 8, а) можно записать в виде  $F_f = F_C + \phi(r_f)(F_D - F_C)$ ,  $r_f = \frac{F_C - F_U}{F_D - F_C}$ . Индекс  $C$  соответствует геометрическому центру контрольного объема. Узлы  $D$  и  $U$  берутся вниз и вверх по потоку относительно узла  $C$  (рис. 8, б). Основная проблема состоит в подходящем выборе узла  $U$  (узлы  $U$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной линии).

В [46] для расчета отношения прилежащих градиентов используется соотношение

$$r_f = \frac{F_C - F_U}{F_D - F_C} \approx \frac{2(F_f - F_C)}{F_D - F_C} = \frac{2\mathbf{r}_{CD} \cdot (\nabla F)_C}{F_D - F_C},$$

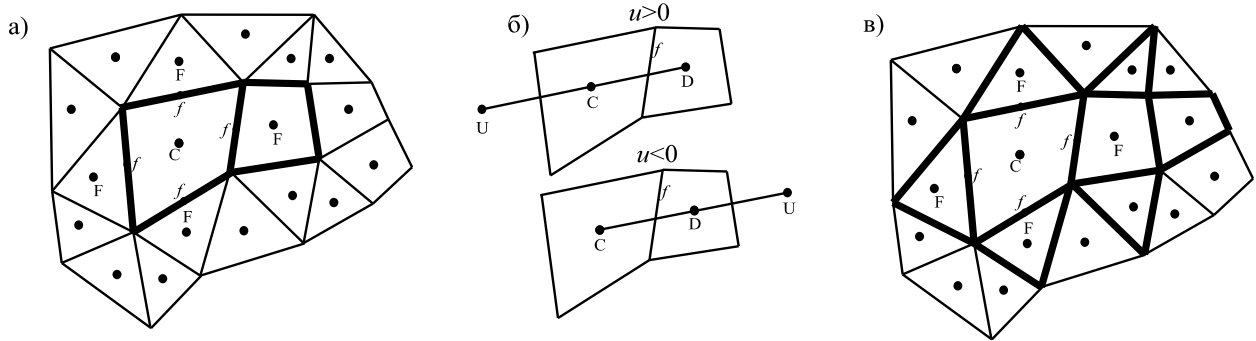


Рис. 8. Вычисление потока на неструктурированной сетке (а — сетка, б — шаблон, в — ячейки, участвующие в вычислении градиента)

которое носит приближенный характер и приводит к достаточно большим ошибкам.

В данной работе предлагается модифицированное представление. Параметр  $r$  на грани контрольного объема  $f$  записывается в виде

$$r_f = \frac{F_C - F_U}{F_D - F_C} = \frac{F_D + (F_C - F_U) - F_D}{F_D - F_C} = \frac{(F_D - F_U) - (F_D - F_C)}{F_D - F_C},$$

где  $F_D - F_U = (\nabla F)_C \cdot \mathbf{r}_{UD} = 2(\nabla F)_C \cdot \mathbf{r}_{CD}$ . Учитывая, что узел  $U$  лежит на продолжении линии, соединяющей узлы  $C$  и  $D$ , получим

$$r_f = \frac{2(\nabla F)_C \cdot \mathbf{r}_{CD} - (F_D - F_C)}{F_D - F_C} = \frac{2(\nabla F)_C \cdot \mathbf{r}_{CD}}{F_D - F_C} - 1.$$

Градиент на грани контрольного объема вычисляется по формуле [47]

$$(\nabla F)_f = (\overline{\nabla F})_f + \frac{F_F - F_C}{\|\mathbf{r}_{CF}\|} \mathbf{e}_{CF} - [(\overline{\nabla F})_f \cdot \mathbf{e}_{CF}] \mathbf{e}_{CF},$$

где  $\mathbf{e}_{CF}$  — единичный вектор, направленный от узла  $C$  к узлу  $F$ . Под  $(\overline{\nabla F})_f$  понимается градиент, полученный при помощи интерполяции градиентов из соседних контрольных объемов. Ячейки, участвующие в вычислении градиента, выделены на рис. 8, в.

**9. Результаты расчетов.** Для сравнения характеристик различных разностных схем рассмотрим решение ряда модельных задач газовой динамики и газодинамических процессов.

**9.1. Решение волнового уравнения.** Пусть дано волновое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Начальное условие для уравнения (7) в момент времени  $t = 0$  имеет вид  $u(x, 0) = \exp(-x^2/16)$ . Точное решение представляется соотношением  $\hat{u}(x, t) = \exp[-(x-t)^2/16]$ . Погрешность решения оценивается по

формуле  $\delta = \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N (u_i - \hat{u}_i)^2 \right]^{1/2}$ , где  $N$  — число узлов сетки.

Для дискретизации производных по времени используется метод Рунге–Кутты третьего порядка, а для расчета потоков — схема UDS-3 и схемы STVD четвертого и шестого порядков. Результаты численных расчетов (сплошная линия), приведенные на рис. 9 в сравнении с точным решением (значки ■), показывают, что схема UDS-3 оказывается слишком диссипативной и не дооценивает максимальное значение искомой функции в расчетной области, приводя к осцилляциям решения. Схемы STVD-4 и STVD-6 дают примерно одинаковые результаты. Как показывает рис. 10, увеличение порядка аппроксимации позволяет достичь заданной точности при меньшем числе узлов сетки (но требует увеличения числа операций на каждом слое по времени).

**9.2. Ударная труба.** Предполагается, что две среды разделены перегородкой, расположенной при  $x = 0$ , которая мгновенно убирается в момент времени  $t = 0$ . Среды начинают взаимодействовать между собой. Автомодельная конфигурация, возникающая в результате распада разрыва при  $t > 0$ , состоит



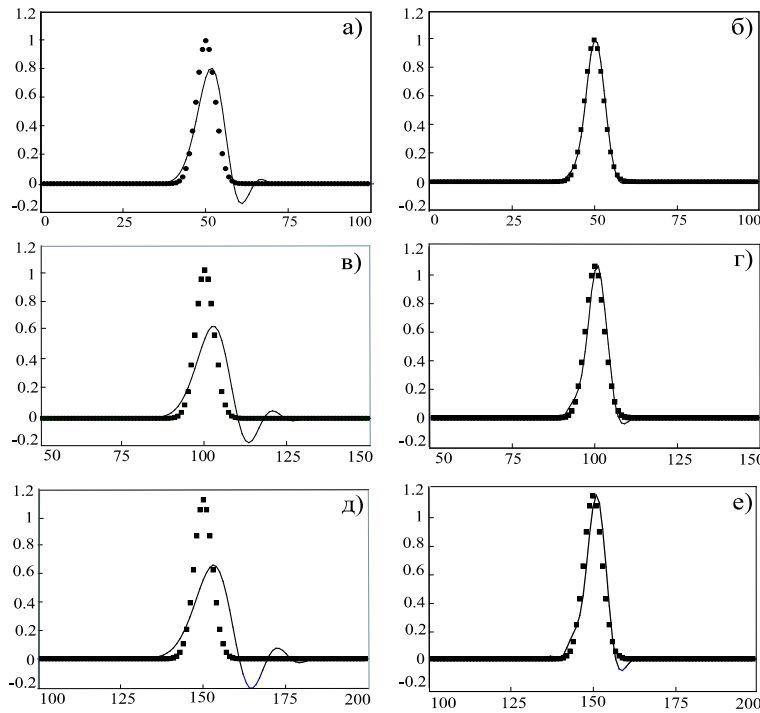


Рис. 9. Решение волнового уравнения в моменты времени  $t = 50$  (а, б);  $100$  (в, г);  $150$  (д, е).  
Фрагменты а, в, д соответствуют схеме UDS-3, фрагменты б, г, е — схеме STVD-4

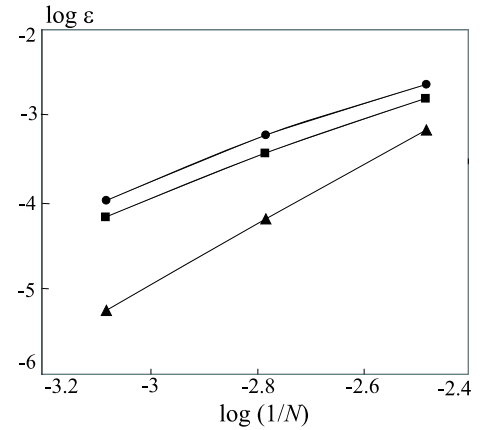


Рис. 10. Зависимость погрешности решения от числа узлов. Значки ●, ■, ▲ соответствуют схемам STVD-4, STVD-6, STVD-8

из волны (ударной или разрежения), бегущей по левой среде, волны (ударной или разрежения), бегущей по правой среде, и контактного разрыва между ними. В случае волны разрежения волновой фронт представляет собой веер характеристик, границы которого определяются расчетом.

Используемые начальные условия соответствуют двум различным решениям. В случае 1 имеет место дозвуковое течение, а в случае 2 — сверхзвуковое. В качестве рабочей среды принимается воздух ( $\gamma = 1.4$ ).

Начальные условия в случае 1 имеют вид

$$\rho(x, 0) = p(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0.$$

Сетка содержит 100 ячеек ( $\Delta x = 1.0$ ). Для расчета состояния потока делается 100 шагов по времени ( $\Delta t = 0.00064$ ). Число Куранта равняется 0.58.

Начальные условия в случае 2 имеют вид

$$\rho(x, 0) = p(x, 0) = \begin{cases} 20 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0.$$

Сетка содержит 1000 ячеек ( $\Delta x = 0.1$ ). Для расчета состояния потока делается 100 шагов по времени ( $\Delta t = 0.0001$ ). Число Куранта равняется 0.55.

Решение задачи показано на рис. 11. Сплошная линия соответствует точному решению задачи, пунктирная линия — расчету по схеме Годунова, утолщенная линия — расчету по схеме MUSCL третьего порядка, кружки — схеме Чакраварти–Ошера. В целом, схема Чакраварти–Ошера дает более точное решение, чем другие схемы. При этом схема Годунова требует примерно в 4.2 раза больше расчетного времени, чем схемы, основанные на приближенном решении задачи Римана.

**9.3. Течение Прандтля–Майера.** При установившемся сверхзвуковом течении вдоль стенки с изломом возмущения, идущие от всех точек линии излома, ограничены огибающей конусов возмущений — плоскостью, наклоненной к направлению потока под углом  $\sin \mu = 1/M_1$  (под  $M$  понимается число

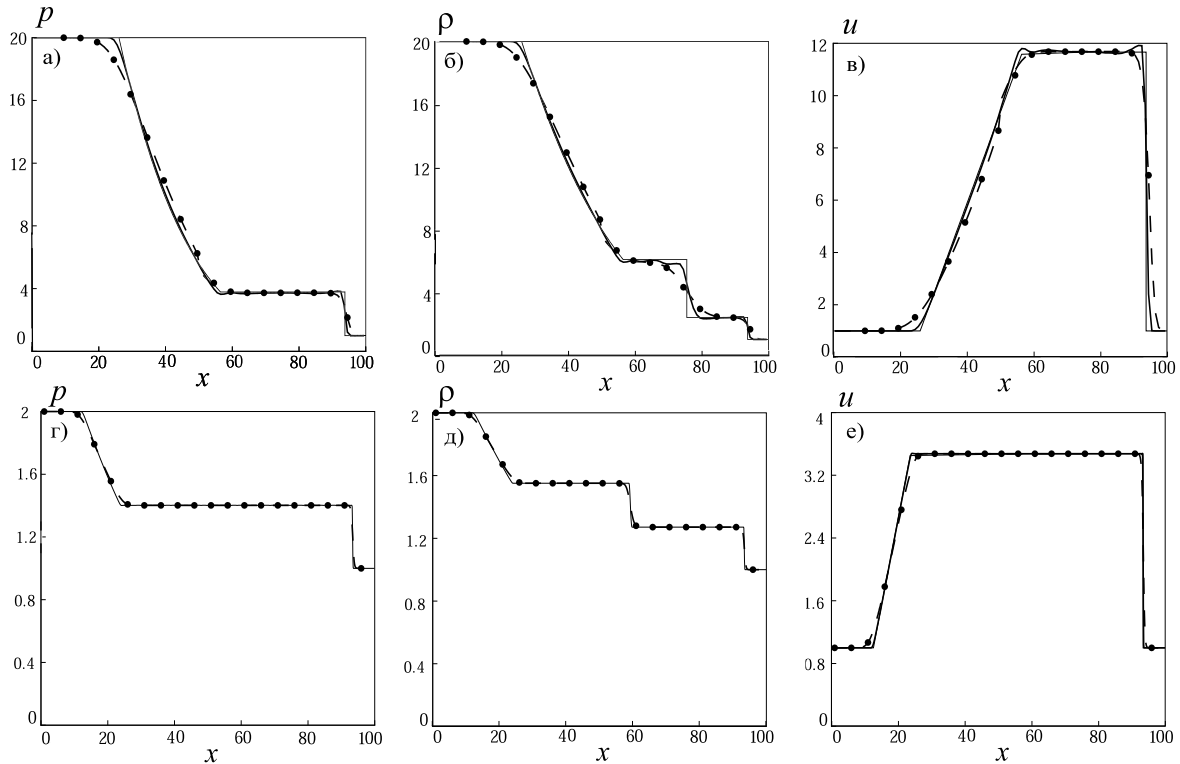


Рис. 11. Решение задачи о распаде произвольного разрыва в случаях 1 (фрагменты а, б, в) и 2 (фрагменты г, д, е)

Маха). Вслед за этой плоскостью поток поворачивается, расширяясь внутри угловой области, образованной пучком плоских фронтов возмущений (характеристик), до тех пор, пока не станет параллельным направлению стенки после излома.

Поток во входном сечении  $x = 0$  (рис. 12) полагается параллельным нижней стенке. Во входном сечении задается давление и температура торможения  $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$  Па,  $T_0 = 286$  К, что примерно соответствует скорости  $u_1 = 678$  м/с ( $M_1 = 2.0$ ). Угол излома нижней стенки составляет  $\theta = 5.35^\circ$ . Для дискретизации по времени используется метод Рунге–Кутты третьего порядка, а для расчета потоков — схема MUSCL третьего порядка.

Решения задачи на структурированной сетке  $65 \times 41$  (значки  $\bullet$ ) и неструктурированной сетке (сплошная линия), содержащей 2600 узлов (треугольные ячейки), в различных сечениях по координате  $x$  показаны на рис. 13 (число Куранта 0.52), а для различных чисел Куранта — на рис. 15. Максимальное значение скорости в расчетной области составляет примерно 711 м/с. При числе Куранта 0.1 имеют место осцилляции численного решения, соответствующие месту разворота потока. Распределения скорости, полученные на сетках различной разрешающей способности, приведены на рис. 14.

**9.4. Течение в сопле Лавалья.** Рассмотрим квазиодномерное нестационарное течение невязкого сжимаемого газа в канале с переменной площадью поперечного сечения (в сопле Лавалья). В качестве рабочей среды принимается воздух ( $\gamma = 1.4$ ). Площадь поперечного сечения сопла изменяется по закону (рис. 16)

$$S(x) = 1 + 2x^2, \quad \text{где} \quad -1/3 \leq x \leq 1.$$

Численное решение сравнивается с точным решением.

Во входном сечении сопла задаются два параметра ( $p_0 = p_{00}$ ,  $T_0 = T_{00}$ ), третий параметр определяется из характеристических соотношений.

Способ задания граничных условий в выходном сечении зависит от режима истечения газа, который определяется отношением наружного давления к давлению в ресивере  $\frac{p_\infty}{p_{00}} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$ . При  $p_\infty/p_{00} > 0.528$  имеет место режим течения с противодавлением, когда восстановление давления перерасширенного потока до наружного давления осуществляется через сопловой скачок уплотнения. При  $p_\infty/p_{00} < 0.528$  соплового скачка уплотнения не возникает (поток непрерывно разгоняется вдоль координаты  $x$ ).

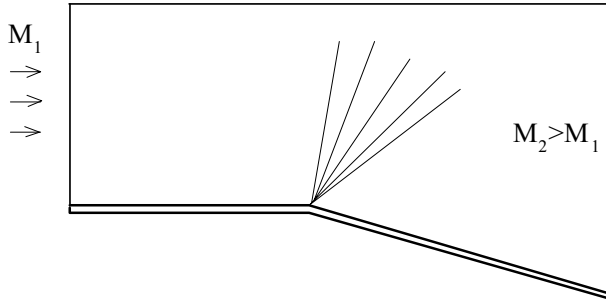


Рис. 12. Течение Прандтля-Майера

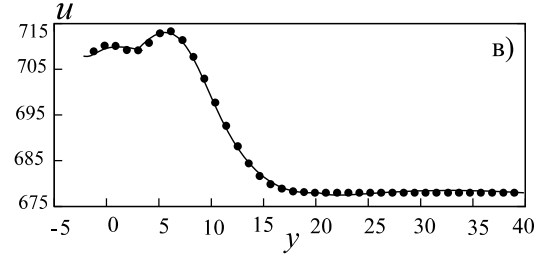
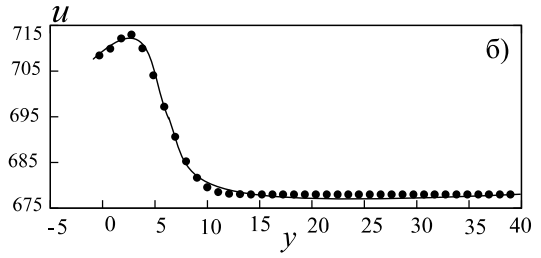
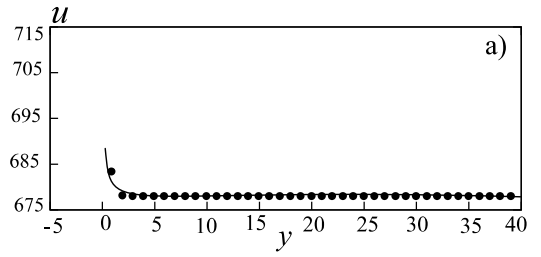


Рис. 13. Распределения скорости при  $x = 11.28$  (а);  $24.46$  (б);  $34.48$  (в)

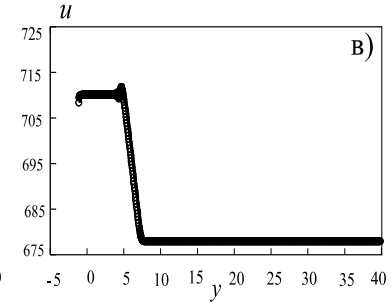
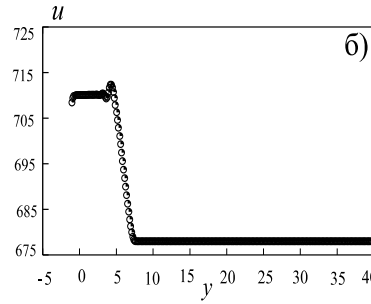
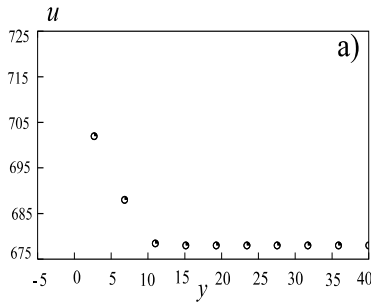


Рис. 14. Распределения скорости при  $x = 22.66$ , полученные на сетках  $25 \times 11$  (фрагмент а),  $300 \times 300$  (фрагмент б),  $600 \times 800$  (фрагмент в)

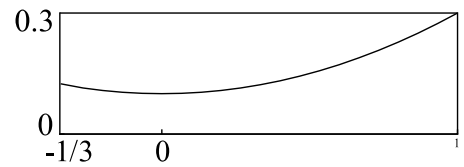
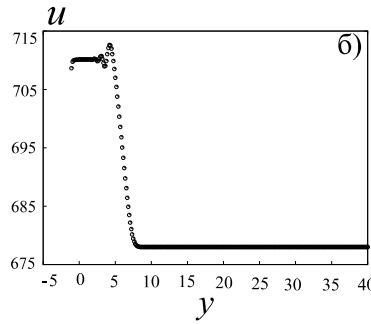
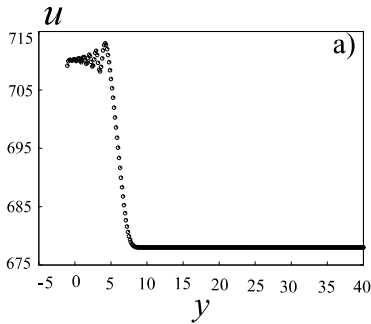


Рис. 15. Распределения скорости в сечении  $x = 22.68$  при числе Куранта 0.1 (фрагмент а) и 0.6 (фрагмент б)

Рис. 16. Контур сопла Лавалья

При дозвуковом потоке на срезе сопла задается статическое давление, равное наружному давлению ( $p = p_\infty$ ). Другие параметры определяются либо с помощью характеристических соотношений, либо с помощью экстраполяции переменных из внутренних ячеек расчетной области. При сверхзвуковом истечении дополнительных граничных условий на срезе сопла не требуется.

Расчеты проводятся на сетке, содержащей 35 ячеек с шагом  $\Delta x = 0.038$ . Принимается, что в момент времени  $t = 0$  газ в сопле покоится ( $u = 0, p_0 = p_{00}, T_0 = T_{00}$ ). Стационарное решение задачи получается при помощи метода установления.

Результаты численного моделирования, обработанные в виде зависимостей давления от координаты  $x$ , показаны на рис. 17 (число Куранта 0.98) и рис. 18 (число Куранта 0.25). Значки ■ соответствуют результатам, полученным при помощи схемы Годунова, □ — схемы Колгана, ▷ — схемы Роэ, ◁ — схемы Хартена, ● — схемы Чакраварти–Ошера. Полученные результаты показывают, что все разностные схемы размывают разрыв на 1–2 вычислительных ячейки, сохраняя монотонный характер решения.

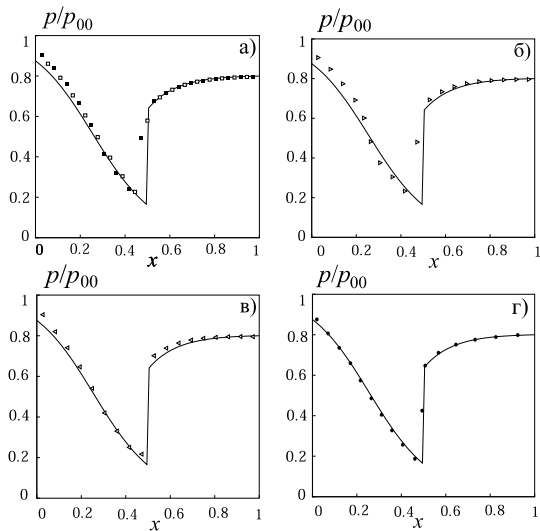


Рис. 17. Распределения давления вдоль координаты  $x$  при  $p_{00} = 10^8$  Па,  $T_{00} = 300$  К,  $p_\infty = 8 \cdot 10^5$  Па

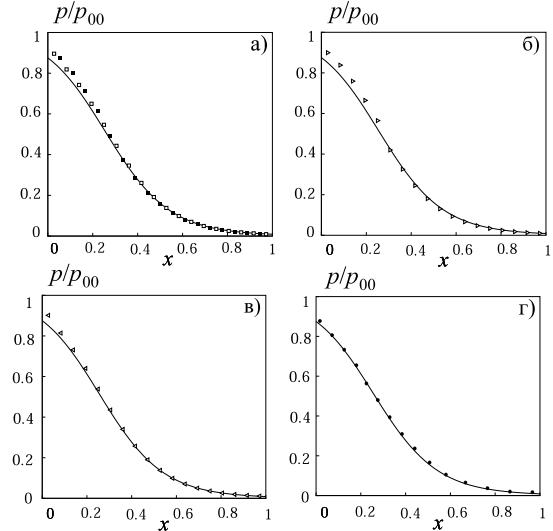


Рис. 18. Распределения давления вдоль координаты  $x$  при  $p_{00} = 10^6$  Па,  $T_{00} = 300$  К,  $p_\infty = 8 \cdot 10^5$  Па

В случае наличия соплового скачка уплотнения (рис. 17) схема Чакраварти–Ошера дает результаты, наиболее близкие к точному решению. При использовании схемы Годунова требуется 0.03479 с расчетного времени (12 шагов по времени) для достижения стационарного состояния, схемы Колгана — 0.03401 с (12 шагов), схемы Роэ — 0.01999 с (6 шагов), схемы Хартена — 0.01975 с (5 шагов), схемы Чакраварти–Ошера — 0.01968 с (5 шагов).

При сверхзвуковом режиме истечения (рис. 18) все разностные схемы дают примерно одинаковые результаты. При использовании схемы Годунова требуется 0.007257 с расчетного времени (14 шагов по времени) для достижения стационарного состояния, схемы Колгана — 0.008151 с (15 шагов), схемы Роэ — 0.009545 с (18 шагов), схемы Хартена — 0.006941 с (12 шагов); схемы Чакраварти–Ошера — 0.006938 с (10 шагов).

**10. Заключение.** Рассмотрен ряд вопросов, связанных с дискретизацией производных по времени, построением и реализацией разностных схем расчета потоков повышенной разрешающей способности, методы решения задачи о распаде произвольного разрыва, проблема соотношения между точностью расчетов и порядком аппроксимации разностных схем. Выделены разностные схемы, удовлетворяющие условию монотонности, положительности численного решения и некоторым дополнительным требованиям.

Приведена структура ряда разностных схем (схема Годунова, схема MUSCL, схема Чакраварти–Ошера) и предложен подход, позволяющий записать разностные схемы в единой форме на неструктурированной сетке с использованием диаграммы нормализованных переменных.

Сравнение характеристик различных разностных схем проведено на примере решения ряда модельных задач газовой динамики и газодинамических процессов (решение волнового уравнения, ударная труба, течение Праудтля–Майера, течение в канале переменного сечения).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
2. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994.
3. Бондаренко Ю.А., Башуров В.В., Янилкин Ю.В. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой газодинамики. Обзор зарубежной литературы. Препринт РФЯЦ ВНИИЭФ. № 88. 2003.
4. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. **7**. 159–193.
5. Lax P., Wendroff B. System of conservation laws // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. **13**. 217–237.
6. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper. N 69–354. 1969.
7. Beam R.M., Warming R.F. An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic system in conservation law form // Journal of Computational Physics. 1976. **22**, N 1. 87–109.
8. Lax P.D., Wendroff B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1964. **17**. 381–398.
9. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with application to finite difference methods // Journal of Computational Physics. 1981. **40**, N 2. 263–293.
10. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. **47**, № 3. 271–306.
11. Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // ЖВМиМФ. 1961. **1**, № 6. 1020–1050.
12. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. **3**, № 6. 68–72.
13. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. **54**, N 1. 115–173.
14. Majda A., Osher S. Numerical viscosity and the entropy condition // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1979. **32**. 797–838.
15. Родионов А.В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // ЖВМиМФ. 1982. **27**, № 4. 585–593.
16. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // ЖВМиМФ. 1982. **27**, № 12. 1853–1860.
17. Копченов В.И., Крайко А.Н. Монотонная разностная схемы второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // ЖВМиМФ. 1983. **23**, № 4. 848–859.
18. Billett S.J., Toro E.F. On WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1997. **130**, N 1. 1–24.
19. Prendergast K.H., Xu K. Numerical hydrodynamics from gas-kinetic theory // Journal of Computational Physics. 1993. **109**, N 1. 53–66.
20. Иванов М.Я., Нугматуллин Р.З. Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера // ЖВМиМФ. 1987. **27**, № 11. 1725–1735.
21. Иванов М.Я., Крупа В.Г., Нугматуллин Р.З. Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье–Стокса // ЖВМиМФ. 1989. **29**, № 6. 1521–1532.
22. Головинзин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. **10**, № 1. 86–100.
23. Van Leer B. Towards the ultimate conservative finite difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // Journal of Computational Physics. 1974. **14**, N 4. 361–376.
24. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference schemes. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow // Journal of Computational Physics. 1977. **23**, N 3. 263–275.
25. Van Leer B. Towards the ultimate conservative finite difference scheme. IV. A new approach to numerical convection // Journal of Computational Physics. 1977. **23**, N 3. 276–298.
26. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's methods // Journal of Computational Physics. 1979. **32**, N 1. 101–136.
27. Boris J.P., Book D.L., Hain K. Flux-corrected transport: Generalization of the method // Journal of Computational Physics. 1975. **18**, N 3. 248–283.
28. Colella P., Woodward P.R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulation // Journal of Computational Physics. 1984. **54**, N 1. 174–201.
29. Cohen R.H., Mirin A.A. ASCI turbulence and instability modeling using the piecewise parabolic method. Report of Lawrence Livermore National Laboratory. N UCRL-TB-125580. 1999.
30. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. **49**, N 3. 357–393.
31. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // SIAM Journal of Numerical

- Analysis. 1984. **21**, N 1. 1–23.
32. *Yang J.Y., Hsu C.A., Chang S.H.* Computations of free surface flows. Part I. One-dimensional dam-break flow // Journal of Hydraulic Research. 1993. **31**, N 1. 19–34.
33. *Yee H.C.* Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications // Journal of Computational Physics. 1987. **68**, N 1. 151–179.
34. *Jameson A.* Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flows // AIAA Paper. N 93–3359. 1993.
35. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory scheme // SIAM Journal of Numerical Analysis. 1987. **24**, N 2. 279–309.
36. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. I // Journal of Computational Physics. 1988. **77**, N 2. 439–471.
37. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. II // Journal of Computational Physics. 1989. **83**, N 1. 32–78.
38. *Shu C.W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report. N 97–65. 1997.
39. *Chakravarthy S.R., Osher S.* A new class of high-accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper. N 85–0363. 1985.
40. *Liou M.-S., Steffen C.J.* A new flux splitting scheme // Journal of Computational Physics. 1993. **107**, N 1. 23–29.
41. *Osher S.* Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation // SIAM Journal of Numerical Analysis. 1984. **21**, N 2. 217–235.
42. *Donat R., Marquina A.* Capturing shock reflections: an improved flux formula // Journal of Computational Physics. 1996. **125**, N 1. 42–58.
43. *Einfeldt B.* On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM Journal of Numerical Analysis. 1988. **25**, N 2. 294–318.
44. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers parameter vectors and divergence schemes // Journal of Computational Physics. 1981. **43**, N 2. 357–372.
45. *Волков К.Н.* Дискретизация конвективных потоков в уравнениях Навье–Стокса на основе разностных схем высокой разрешающей способности // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 129–145.
46. *Bruner C., Watters R.* Parallelization of the Euler equations on unstructured grids // AIAA Paper. N 97–1894. 1997.
47. *Rhie C.M., Chow W.L.* Numerical study of the turbulent flow past and airfoil with trailing edge separation // AIAA Journal. 1983. **21**, N 11. 1525–1532.

Поступила в редакцию  
05.05.2005

---