

УДК 519.6

СХЕМА ГОРНЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ

В. С. Муха¹, К. С. Корчиц¹

В статье рассматривается схема Горнера для расчета многомерно-матричных полиномов многомерно-матричного аргумента и анализируется ее вычислительная сложность.

1. Введение. Многомерно-матричные полиномы. В настоящее время для решения многих многомерных задач находит применение многомерно-матричный подход, использующий в качестве переменных понятие многомерной матрицы [1, 2]. Одним из приемов решения нелинейных многомерных задач является аппроксимация имеющихся многомерных зависимостей многомерно-матричными полиномиальными рядами. При этом возникает необходимость разработки эффективных схем расчета значений многомерно-матричных полиномов многомерно-матричного аргумента, как это имеет место при расчете значений ортогональных полиномов векторной переменной [3, 4]. В данной статье для этих целей предложена схема Горнера и анализируется ее вычислительная сложность.

Пусть y — p -мерная матрица, а x — q -мерная матрица (см. приложение 2):

$$y = (y_{i_1, i_2, \dots, i_p}), \quad i_1 = \overline{1, m_1}, \quad \dots, \quad i_p = \overline{1, m_p},$$

$$x = (x_{j_1, j_2, \dots, j_q}), \quad j_1 = \overline{1, n_1}, \quad \dots, \quad j_q = \overline{1, n_q}.$$

Однородный p -мерно-матричный полином k -й степени q -мерно-матричной переменной x имеет следующее представление [3, 4]:

$$y = {}^{0,kq}(c_k x^k), \tag{1}$$

где x^k — $(0, 0)$ -свернутая k -я степень матрицы x , $c_k = (c_{\alpha, \beta})$ — $(p + kq)$ -мерная матрица коэффициентов. Мультииндекс α этой матрицы содержит p индексов. Мультииндекс β состоит из k мультииндексов, каждый из которых содержит q индексов. Матрица c_k должна быть симметричной при $k \geq 2$ относительно k своих последних мультииндексов.

Произвольный p -мерно-матричный полином m -й степени q -мерно-матричной переменной x является суммой однородных полиномов (1)

$$y = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq}(c_k x^k), \tag{2}$$

где по определению принято $x^0 = 1$.

Если в (2) $p = 0, q = 0$, то мы имеем известный скалярный полином скалярной переменной x :

$$y = \sum_{k=0}^m c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m. \tag{3}$$

Если в (2) $p = 1, q = 1$, то мы имеем векторный полином $y = (y_1, y_2, \dots, y_{m_1})$ векторной переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$:

$$y = \sum_{k=0}^m {}^{0,k}(b_k x^k),$$

где b_k — $(k + 1)$ -мерные симметричные при $k \geq 2$ относительно своих k последних индексов матрицы.

2. Схема Горнера для многомерно-матричного полинома. Для расчета скалярного полинома скалярной переменной (3) известна схема Горнера [5], при использовании которой уменьшается алгоритмическая сложность и повышается точность расчетов. В связи с этим представляется целесообразной

¹ Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР), кафедра информационных технологий автоматизированных систем, ул. П. Бровки, 6, г. Минск, Беларусь; e-mail: mukha@gw.bsuir.unibel.by

разработка такой же схемы для многомерно-матричного полинома (2). Для этого запишем его в развернутой форме:

$$y(x) = c_0 + {}^{0,q}(c_1 x) + {}^{0,2q}(c_2 x^2) + \dots + {}^{0,(m-1)q}(c_{m-1} x^{m-1}) + {}^{0,mq}(c_m x^m) \quad (4)$$

и представим в виде

$$y(x) = {}^{0,0}\left((b_1 + {}^{0,q}(b_2 x) + \dots + {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2}) + {}^{0,(m-1)q}(b_m x^{m-1})) (x - x^{(0)}) \right) + b_0. \quad (5)$$

Раскроем скобки в (5). Для иллюстрации выполним это для отдельного слагаемого в (5):

$$\begin{aligned} {}^{0,0}({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})(x - x^{(0)})) &= {}^{0,0}({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})x) + {}^{0,0}({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})x^{(0)}) = \\ &= {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-1}) + {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} {}^{0,0}(x^{m-2} x^{(0)})). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая симметричность матрицы b_{m-1} относительно последних мультииндексов, можно показать (см. приложение 1), что

$${}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} {}^{0,0}(x^{m-2} x^{(0)})) = {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} {}^{0,0}(x^{(0)} x^{m-2})) = {}^{0,(m-1)q}({}^{0,q}(b_{m-1} x^{(0)}) x^{m-2}),$$

и вместо (6) получим

$${}^{0,0}({}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-2})(x - x^{(0)})) = {}^{0,(m-2)q}(b_{m-1} x^{m-1}) + {}^{0,(m-1)q}({}^{0,q}(b_{m-1} x^{(0)}) x^{m-2}).$$

Этот результат позволяет нам после раскрытия скобок в (5) приравнять коэффициенты полиномов (4) и (5) при одинаковых степенях x . В итоге получим соотношения

$$c_m = b_m, \quad c_{m-1} = -{}^{0,q}(b_m x^{(0)}) + b_{m-1}, \quad \dots, \quad c_j = -{}^{0,q}(b_{j+1} x^{(0)}) + b_j, \quad \dots, \quad c_0 = -{}^{0,q}(b_1 x^{(0)}) + b_0.$$

Отсюда получаем алгоритм: $b_m = c_m$, $b_j = c_j + {}^{0,q}(b_{j+1} x^{(0)})$, $j = m-1, m-2, \dots, 0$. Если учесть, что в конце расчетов по данному алгоритму мы получаем коэффициент b_0 и что $y(x^{(0)}) = b_0$, то становится ясно, что мы получили алгоритм расчета значения многомерно-матричного полинома (2) при значении аргумента $x^{(0)}$. Ввиду произвольности $x^{(0)}$ верхний индекс в обозначении аргумента можно опустить. В итоге получаем следующий алгоритм расчета значения полинома (2) при любом x :

$$b_m = c_m, \quad b_j = c_j + {}^{0,q}(b_{j+1} x), \quad j = m-1, m-2, \dots, 0, \quad y(x) = b_0. \quad (7)$$

Это и есть схема Горнера для многомерно-матричного полинома (2).

Схема Горнера реализована в пакете программ "Анализ многомерных данных" для расчета значений скалярного полинома векторной переменной произвольной степени [6, 7].

3. Вычислительная сложность. Определим вычислительную сложность скалярного полинома векторной переменной при расчете по общей схеме (2) и по схеме Горнера (7). В этом случае в формулах (2) и (7) имеем $p = 0$, $q = 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е.

$$y = \sum_{k=0}^m {}^{0,k}(c_k x^k), \quad (8)$$

$$b_m = c_m, \quad b_j = c_j + {}^{0,1}(b_{j+1} x), \quad j = m-1, m-2, \dots, 0, \quad y(x) = b_0. \quad (9)$$

Будем исходить из того, что для вычисления произведения (суммы) n чисел требуется n умножений (сложений) в предположении, что расчет произведения начинается с единицы, а суммы — с нуля.

Начнем с общей схемы (8). Для расчета x^k требуется kn^k умножений, для расчета $y_k = {}^{0,k}(c_k x^k)$ необходимо n^k умножений и n^k сложений, а для расчета $y = \sum_{k=0}^m y_k$ — $(m+1)$ сложений. В итоге для расчета полинома по общей схеме (8) требуется выполнить $N_{\text{ум. общ.}}$ умножений и $N_{\text{сл. общ.}}$ сложений [8]:

$$\begin{aligned} N_{\text{ум. общ.}} &= \sum_{k=0}^m kn^k + \sum_{k=0}^m n^k = \frac{n + (mn - m - 1)n^{m+1}}{(1-n)^2} + \frac{1 - n^{m+1}}{1-n}, \\ N_{\text{сл. общ.}} &= \sum_{k=0}^m n^k + (m+1) = \frac{1 - n^{m+1}}{1-n} + m + 1. \end{aligned}$$

В схеме Горнера (9) матрица b_j — j -мерная. На отдельной итерации расчет

$$d_j = {}^{0,1}(b_{j+1}x) = \sum_{\nu=1}^n b_{i_1, i_2, \dots, i_j, \nu} x_\nu$$

требует n^{j+1} умножений и n^{j+1} сложений, а расчет $b_j = c_j + d_j$ требует n^j сложений. Суммируя по всем итерациям $j = 0, m - 1$, получаем, что для расчета полинома по схеме Горнера (9) требуется выполнить $N_{\text{ум. Гор.}}$ умножений и $N_{\text{сл. Гор.}}$ сложений:

$$N_{\text{ум. Гор.}} = \sum_{j=0}^{m-1} n^{j+1} = n \frac{1 - n^m}{1 - n},$$

$$N_{\text{сл. Гор.}} = \sum_{j=0}^{m-1} n^{j+1} + \sum_{j=0}^{m-1} n^j = n \frac{1 - n^m}{1 - n} + \frac{1 - n^m}{1 - n} = (n + 1) \frac{1 - n^m}{1 - n}.$$

В таблице приведено число умножений для схемы Горнера (верхние числа) и для общей схемы (нижние числа) для значений $n = 1, 10$ и $m = 1, 4$. Таблица показывает выигрыш от использования схемы Горнера. Например, для полинома четвертой степени от 10 переменных число умножений по схеме Горнера примерно в пять раз меньше, чем по общей схеме. С возрастанием n и m выигрыш возрастает.

m	n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110
	6	17	34	57	86	121	162	209	262	321
3	3	14	39	84	155	258	399	584	819	1110
	10	49	142	313	586	985	1534	2257	3178	4321
4	4	30	120	340	780	1554	2800	4680	7380	11110
	15	129	547	1593	3711	7465	13539	22737	35983	54321

4. Приложение 1. Теорема. Если x_i — q -мерные матрицы вида $x_i = (x_{i,j})$, где j — q -мультииндекс, $i = 1, m$, и $c_m = (c_{\alpha, j_1, j_2, \dots, j_m})$, где α — p -мультииндекс, j_1, j_2, \dots, j_m — q -мультииндексы, причем c_m — симметричные при $m \geq 2$ относительно m своих последних q -мультииндексов матрицы, то выполняются равенства

$${}^{0,mq}(c_m {}^{0,0}(x_1 x_2 \dots x_m)) = {}^{0,mq}(c_m {}^{0,0}(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m})) = {}^{0,(m-s)q} \left({}^{0,sq}(c_m {}^{0,0}(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s})) {}^{0,0}(x_{i_{s+1}} x_{i_{s+2}} \dots x_{i_m}) \right), \tag{10}$$

где i_1, i_2, \dots, i_m — любая перестановка чисел $(1, 2, \dots, m)$.

Доказательство. Обозначим выражение в левой части (10) через v и раскроем его:

$$v = {}^{0,mq}(c_m {}^{0,0}(x_1 x_2 \dots x_m)) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} c_{\alpha, j_1, j_2, \dots, j_m} x_{1, j_1} x_{2, j_2} \dots x_{m, j_m}. \tag{11}$$

Поскольку $x_{1, j_1}, x_{2, j_2}, \dots, x_{m, j_m}$ — скалярные величины, то в произведении их можно менять местами, т.е. записать, что $x_{1, j_1} x_{2, j_2} \dots x_{m, j_m} = x_{i_1, j_{i_1}} x_{i_2, j_{i_2}} \dots x_{i_m, j_{i_m}}$, где i_1, i_2, \dots, i_m — любая перестановка чисел $(1, 2, \dots, m)$. Тогда для правой части выражения (11) получим

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} c_{\alpha, j_1, j_2, \dots, j_m} x_{1, j_1} x_{2, j_2} \dots x_{m, j_m} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} c_{\alpha, j_1, j_2, \dots, j_m} x_{i_1, j_{i_1}} x_{i_2, j_{i_2}} \dots x_{i_m, j_{i_m}}. \tag{12}$$

В силу симметрии матрицы c_m мы имеем также равенство $c_{\alpha, j_1, j_2, \dots, j_m} = c_{\alpha, j_{i_1}, j_{i_2}, \dots, j_{i_m}}$, с учетом которого вместо (12) и (11) получим

$$v = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m} c_{\alpha, j_1, j_2, \dots, j_m} x_{1, j_1} x_{2, j_2} \dots x_{m, j_m} = \sum_{j_{i_1}, j_{i_2}, \dots, j_{i_m}} c_{\alpha, j_{i_1}, j_{i_2}, \dots, j_{i_m}} x_{i_1, j_{i_1}} x_{i_2, j_{i_2}} \dots x_{i_m, j_{i_m}} = {}^{0,mq}(c_m {}^{0,0}(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m})),$$

что и доказывает первое равенство в (10). Второе равенство в (10) получается по определению $(0, \mu)$ -свернутого произведения многомерных матриц.

5. Приложение 2. Многомерной (p -мерной) $(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p)$ матрицей

$$A = (a_{i_1, i_2, \dots, i_p}), \quad i_\alpha = \overline{1, n_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad (13)$$

называется система чисел или переменных a_{i_1, i_2, \dots, i_p} , расположенных в точках p -мерного пространства, определяемого координатами i_1, i_2, \dots, i_p [2]. В случае различных n_1, n_2, \dots, n_p матрица A называется гиперпрямоугольной. Если $n_1 = n_2 = \dots = n_p = n$, то матрица называется гиперквадратной, или p -мерной матрицей n -го порядка. Определение многомерной матрицы (13) естественным образом обобщает известные понятия скалярной величины, вектора и двумерной матрицы: скаляр, вектор и двумерная матрица являются нуль-, одно- и двумерными матрицами соответственно.

Важнейшим понятием теории многомерных матриц является (λ, μ) -свернутое произведение многомерных матриц. Пусть A — p -мерная матрица (13) и B — q -мерная матрица,

$$B = (b_{j_1, j_2, \dots, j_q}), \quad j_\alpha = \overline{1, n_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, q}. \quad (14)$$

Для удобства представления многомерных матриц их индексы разбивают на мультииндексы

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_p) = (l, s, c), \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_q) = (c, s, m),$$

где $l = (l_1, l_2, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_\lambda)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_\mu)$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_\nu)$ — $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ — мультииндексы соответственно, причем $\kappa + \lambda + \mu = p$, $\mu + \lambda + \nu = q$. Тогда матрицы A и B (см. (13) и (14)) можно записать в виде

$$A = A_{(\kappa, \lambda, \mu)} = (a_{l, s, c}), \quad B = B_{(\mu, \lambda, \nu)} = (b_{c, s, m}),$$

где каждый из индексов мультииндексов l, s, c, m пробегает свой диапазон значений. Матрица D , определяемая выражением

$$D = {}^{\lambda, \mu} (A_{(\kappa, \lambda, \mu)} B_{(\mu, \lambda, \nu)}) = \left(\sum_c a_{l, s, c} b_{c, s, m} \right) = (d_{l, s, m}), \quad (15)$$

называется (λ, μ) -свернутым произведением матриц A и B . Индексы мультииндекса c , по которому осуществляется суммирование (кэлиевого мультииндекса), и индексы мультииндекса s , общего для множителей и произведения (скоттового мультииндекса), должны пробегать одинаковое число значений.

Важное место занимает $(0, \mu)$ -свернутое произведение, когда скоттов мультииндекс s в определении (15) отсутствует ($\lambda = 0$). Известное в теории двумерных матриц произведение, обозначаемое через AB , соответствует $(0, 1)$ -свернутому многомерно-матричному произведению ${}^{0,1}(AB)$. В случае $(0, 0)$ -свернутого произведения мультииндексы s и c в определении (15) отсутствуют ($\lambda = 0, \mu = 0$), так что суммирование (свертывание) в (15) не выполняется. Например, если $x = (x_i), i = \overline{1, n}, y = (y_j), j = \overline{1, m}$, то произведение ${}^{0,0}(xy)$ определяется формулой

$${}^{0,0}(xy) = g = (x_i y_j) = (g_{i, j}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

т.е. представляет собой двумерную прямоугольную матрицу. Аналогично определяется $(0, 0)$ -свернутая k -я степень вектора $x = (x_i)$:

$${}^{0,0} x^k = {}^{0,0} \left(x {}^{0,0} (x {}^{0,0} (x \dots x)) \right) = z = (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}) = (z_{i_1, i_2, \dots, i_k}),$$

представляющая собой k -мерную матрицу n -го порядка. Аналогично получаем $(0, 0)$ -свернутую k -ю степень q -мерной матрицы $x = (x_{j_1, j_2, \dots, j_q}), j_1 = \overline{1, n_1}, \dots, j_q = \overline{1, n_q}$:

$${}^{0,0} x^k = z = (x_{j_1, j_2, \dots, j_q} x_{j_{q+1}, j_{q+2}, \dots, j_{2q}} \dots x_{j_{(k-1)q+1}, j_{(k-1)q+2}, \dots, j_{kq}}) = (z_{j_1, j_2, \dots, j_{kq}}),$$

которая является kq -мерной гиперпрямоугольной матрицей размера $(n_1 \times n_2 \times \dots \times n_q \times \dots \times n_1 \times n_2 \times \dots \times n_q)$.

Поскольку $(0, 0)$ -свернутое произведение многомерных матриц соответствует произведению скалярных величин, то вместо ${}^{0,0}(AB)$ целесообразно писать AB .

Многомерная матрица A , определенная в (13), называется симметричной относительно двух своих индексов i_α и i_β , если каждые два ее элемента, получающиеся один из другого перестановкой этих индексов, одинаковы, т.е. если

$$a_{i_1, \dots, i_\alpha, \dots, i_\beta, \dots, i_p} = a_{i_1, \dots, i_\beta, \dots, i_\alpha, \dots, i_p}.$$

Эта матрица называется симметричной относительно нескольких индексов, если она симметрична относительно любой пары из них, и просто симметричной, если она симметрична относительно всех своих индексов. Аналогично определяются матрицы, симметричные относительно своих мультииндексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Муха В.С.* Анализ многомерных данных. Минск: УП “Технопринт”, 2004.
2. *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев: Наукова думка, 1972.
3. *Муха В.С.* Многомерно-матричный подход к теории ортогональных систем полиномов векторной переменной // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2001. №2. 64–68.
4. *Муха В.С.* Системы полиномов векторной переменной, ортогональные с дискретным весом // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 1. 69–73.
5. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). М.: Высшая школа, 2000.
6. *Муха В.С., Корчиц К.С.* Интегрированный в DELPHI пакет научных программ “Анализ многомерных данных” // Известия Белорусской инженерной академии. 2002. 1(13)/2. 246–248.
7. *Муха В.С.* Пакет научных программ “Анализ многомерных данных” // Труды Всероссийской научной конференции “Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB”. М.: ИПУ РАН, 2002. 276–284.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.В., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
14.01.2005
