

УДК 519.6

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ АКСИАЛЬНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТИ**

**Н. Н. Николаева<sup>1</sup>, С. В. Ручкин<sup>2</sup>, М. Н. Рычагов<sup>2</sup>, А. Г. Ягола<sup>1</sup>**

В статье рассматривается численный метод реконструкции и поточечной оценки погрешности реконструкции осесимметричных профилей скорости течения жидкости или газа в каналах с круговым поперечным сечением на основе использования специальных ультразвуковых измерительных модулей. Реконструкция сводится к решению уравнения типа Абеля с правой частью, заданной с некоторой погрешностью в конечном числе точек. В работе используется естественная априорная информация о монотонности, выпуклости и ограниченности искомого решения, которая допускает корректную по Тихонову постановку задачи и поточечную оценку погрешности решения. Приводится достаточно простой алгоритм решения поставленной задачи, который применим при любом количестве экспериментальных данных.

**1. Введение.** Методика многоплоскостных измерений заключается в регистрации разницы времен распространения ультразвуковых сигналов, генерируемых парами излучателей, закрепленных на некотором расстоянии друг от друга на стенках измерительного канала в параллельных измерительных плоскостях. Варианты различных конструктивных реализаций многоплоскостных измерительных модулей представлены в [1]. В данной работе анализируется методика оценивания поперечного профиля аксиальной скорости потока в цилиндрических каналах транспортировки жидкости или газа с использованием измерительных модулей, реализующих отражательную схему регистрации ультразвуковых сигналов (см. рис. 1).

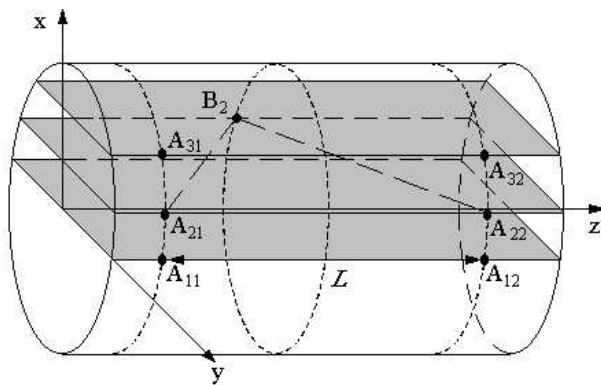


Рис. 1. Схема многоплоскостных ультразвуковых измерений. С целью упрощения на рисунке представлены лишь три измерительные плоскости

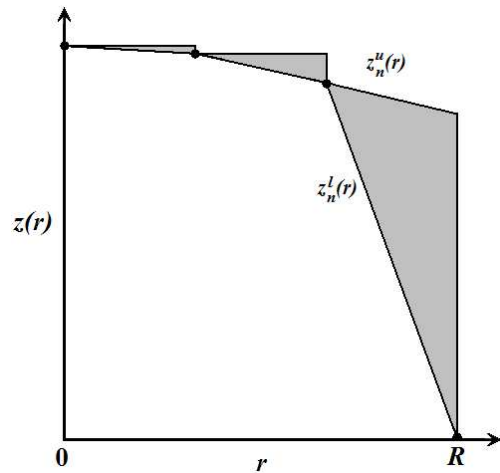


Рис. 2. Функции  $z_n^l(r)$  и  $z_n^u(r)$ , ограничивающие область допустимых значений функции  $z(r) \in M$  при фиксированном векторе  $\hat{z}$  ( $n = 3$ )

Пусть  $m$  — число измерительных плоскостей (в условиях эксперимента  $m = 2 \div 11$ ),  $\xi_j$  — расстояние  $j$ -й измерительной плоскости от оси канала,  $R$  — внутренний радиус канала,  $L$  — расстояние между измерительными датчиками. Будем рассматривать безвихревое движение жидкости в канале в направлении

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, 119992, Воробьевы горы, Москва; e-mail: nikolaeva-msu@yandex.ru, yagola@inverse.phys.msu.su

<sup>2</sup> Московский государственный институт электронной техники, факультет электронных и компьютерных технологий, 103498, Москва, Зеленоград; e-mail: mrychagov@miee.ru

оси  $z$ , т.е.  $\mathbf{v} = \{0, 0, v_z(x, y)\}$ , в предположении, что распределение вектора скорости  $v_z$  в поперечном сечении канала обладает осевой симметрией, следовательно,  $v_z(x, y) = v_z(\sqrt{x^2 + y^2}) = v_z(r)$ ,  $r \in [0, R]$ , где  $v_z(R) \equiv 0$  — граничное условие на стенках транспортного канала. В присутствии потока время регистрации ультразвукового сигнала, распространяющегося в направлении потока, сокращается по сравнению с аналогичной величиной для импульса, генерируемого в противоположном направлении. Фиксируемая разница во временах пролета ультразвуковых сигналов  $\Delta t(\xi_j) = t_{A_{j2} \rightarrow A_{j1}} - t_{A_{j1} \rightarrow A_{j2}}$  позволяет вычислить приближенное среднее значение скорости потока  $u_\delta(\xi_j)$  в  $j$ -й измерительной плоскости по формуле

$$u_\delta(\xi_j) \approx \frac{c_0^2}{2L} \Delta t(\xi_j),$$

где  $c_0$  — скорость звука в однородной неподвижной среде [1, 2]. Достигнутая к настоящему времени точность определения среднего значения скорости в практических условиях эксплуатации составляет  $\pm 1 \div 2\%$  при скоростях потока  $> 0.3$  м/сек и  $\pm 0.01\%$  при скоростях  $\leq 0.3$  м/сек [3]. Таким образом, вместо точных значений средней скорости потока  $u(\xi_j)$  известны приближенные значения  $u_\delta(\xi_j)$  и погрешности  $\delta_j$ , такие, что  $|u(\xi_j) - u_\delta(\xi_j)| \leq \delta_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Введем удобное обозначение  $z(r) = v_z(r)$ ,  $r \in [0, R]$ . В [2] показано, что средняя скорость потока  $u(\xi)$  связана с неизвестным радиально-симметричным распределением истинного вектора скорости  $z(r)$  интегральным уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - \xi^2}} \int_{\xi}^R \frac{rz(r) dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} = u(\xi), \quad \xi \in [0, R], \quad (1)$$

которое представляет собой уравнение типа Абеля первого рода и является некорректно поставленной задачей [4]. По определению  $u(R) \equiv 0$ . Известно, что при практическом решении некорректных задач для оценки погрешности получаемого приближения необходимо использовать некоторую дополнительную априорную информацию о решении [5, 6]. В [7] был предложен алгоритм поточечной оценки погрешности приближенного решения уравнения Абеля при условии, что точное решение является монотонной или выпуклой ограниченной функцией. К сожалению, для его практического применения необходимо достаточно большое количество экспериментальных данных. В статье [8] рассмотрен принципиально другой подход к оценке погрешности при той же априорной информации о точном решении и показано, что он позволяет более точно оценить погрешность приближенного решения и может быть использован при ограниченном наборе измерительных данных. Оба подхода, разработанные для уравнения Абеля, были применены к уравнению типа Абеля (1), при условии, что  $z(r)$  является монотонной невозрастающей функцией, ограниченной на отрезке  $[0, R]$  (см. [9]). Целью данной работы является оптимизация алгоритма оценки погрешности приближенного решения уравнения (1) при малом наборе измерительных данных. Предполагается, что точное решение задачи — монотонная невозрастающая выпуклая вверх ограниченная функция. Введение ограничения на выпуклость искомого решения является естественным с точки зрения физических соображений о форме профиля скорости невозмущенного потока на отрезке  $[0, R]$ . С математической точки зрения дополнительное ограничение позволяет сузить класс возможных решений и уменьшить погрешность конечномерной аппроксимации задачи, тем самым более точно оценить погрешность получаемого приближения. Рассматриваемый в статье алгоритм прост в практической реализации, допускает геометрическую интерпретацию при восстановлении функции  $z(r)$  в двух точках  $0 \leq r_1 < r_2 < R$  и применим при любом  $m \geq 1$ .

**2. Постановка задачи.** Запишем уравнение (1) в операторном виде:

$$Az = u, \quad (2)$$

где  $z = z(r)$  — искомая функция из множества априорных ограничений  $M \subset L_2[0, R]$ ,  $u = u(\xi)$  — заданная функция из пространства  $L_2[0, R]$ ,  $A : L_2 \rightarrow L_2$  — линейный непрерывный компактный оператор [4]. Пусть  $M$  — множество монотонных невозрастающих выпуклых вверх ограниченных функций, таких, что  $0 \leq z(r) \leq C$ ,  $C$  — известная константа. Поскольку  $M$  — компакт в  $L_2[0, R]$  (см. [5]) и оператор  $A$  взаимно однозначно отображает  $M$  на  $AM \subset L_2[0, R]$  (см. [4]), то задача решения уравнения (2) — корректно поставлена по Тихонову [10]. В этом случае обратный оператор  $A^{-1}$  непрерывен на множестве  $AM$ , т.е. малому изменению функции  $u(\xi) \in AM$  соответствует малое изменение в решении  $z(r) \in M$ .

Поскольку величины средних значений скорости  $u(\xi)$  доступны в реальных условиях лишь в ограниченном наборе измерительных плоскостей, перейдем к дискретной задаче. Введем на отрезке  $[0, R]$

равномерные сетки  $\{r_i\}_1^{n+1}$  и  $\{\xi_j\}_1^m$ , где  $r_i = R(i-1)/n$  и  $\xi_j = R(j-1)/m$ . Обозначим сеточные значения функции  $z(r)$  через  $\{z_i\}_1^{n+1}$ ,  $z_{n+1} \equiv 0$ , а сеточные значения функции  $u(\xi)$  через  $\{u_j\}_1^m$ . Считаем, что вместо точных значений средней скорости потока  $u_j$  известны приближенные значения  $u_j^\delta$  и погрешности  $\delta_j$ , такие, что  $|u_j - u_j^\delta| \leq \delta_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Необходимо по заданному набору данных  $\{A, \{u_j^\delta\}_1^m, \{\delta_j\}_1^m\}$  построить область, которой принадлежит точное решение задачи (2).

**3. Множество приближенных решений.** Естественно приближенные решения уравнения (2) искать в классе элементов  $z \in M$ , сопоставимых по точности с исходными данными. Таким образом, под множеством приближенных решений  $Z_M^\delta$  будем понимать такое множество, элементы которого удовлетворяют уравнению типа Абеля с заданной степенью точности и принадлежат множеству  $M$ , т.е.  $Z_M^\delta \equiv \{z \in M : -\delta_j \leq A^j z - u_j^\delta \leq \delta_j, j = \overline{1, m}\}$ , где  $A^j z = (Az(r))(\xi_j)$ . Очевидно, что  $Z_M^\delta \neq \emptyset$ , т.к. точное решение принадлежит  $Z_M^\delta$ . При практическом решении задачи возникают ошибки, связанные с конечномерной аппроксимацией, поэтому вместо множества  $Z_M^\delta$  будем рассматривать множество  $Z_M^\Delta$ , такое, что  $Z_M^\delta \subset Z_M^\Delta$ .

Построим сначала конечномерное множество  $\widehat{Z}_M^\Delta$ . При конечно-разностной аппроксимации бесконечномерное множество  $M$  переходит в конечномерное множество  $\widehat{M}$ , которое можно задать совокупностью  $n + 1$  условий:

$$\widehat{M} = \left\{ \widehat{z} \in \mathbf{R}^n : \begin{array}{l} z_1 \leq C, \\ z_2 - z_1 \leq 0, \\ z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} \leq 0, \quad i = \overline{2, n-1}, \\ z_{n-1} - 2z_n \leq 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Множество  $\widehat{M}$  — замкнутый выпуклый ограниченный многогранник [5].

Предположим, что вектор  $\widehat{z} \in \widehat{M}$  фиксирован. Введем функцию  $z_n^l(r)$ , ограничивающую область допустимых значений функции  $z(r) \in M$  при фиксированном векторе  $\widehat{z}$  снизу. В качестве такой функции примем  $z_n^l(r) = \inf \{z(r) : z(r) \in M, z(r_i) = z_i\}$ . Тогда

$$z_n^l(r) = z_i + \frac{z_{i+1} - z_i}{r_{i+1} - r_i} (r - r_i), \quad r \in [r_i, r_{i+1}], \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Введем также функцию  $z_n^u(r)$ , которая ограничивает область допустимых значений функции  $z(r) \in M$  при фиксированном векторе  $\widehat{z}$  сверху. В качестве такой функции можно взять

$$z_n^u(r) = \begin{cases} z_i, & r \in [r_i, r_{i+1}], \quad i = \overline{1, n-1}, \\ z_{n-1} + \frac{z_n - z_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} (r - r_{n-1}), & r \in [r_n, r_{n+1}]. \end{cases} \quad (5)$$

Ясно, что  $z_n^u(r) \geq \sup \{z(r) : z(r) \in M, z(r_i) = z_i\}$ . Вид функций  $z_n^l(r)$  и  $z_n^u(r)$  показан на рис. 2.

Обозначим  $A^j z_n^l = (Az_n^l(r))(\xi_j)$ ,  $A^j z_n^u = (Az_n^u(r))(\xi_j)$ . Для любой функции  $z(r) \in M$ , такой, что  $z_n^l(r) \leq z(r) \leq z_n^u(r)$  и любого  $\xi_j \in [0, R)$  справедливо неравенство  $A^j z_n^l \leq A^j z \leq A^j z_n^u$ . Поэтому в качестве конечномерного множества приближенных решений  $\widehat{Z}_M^\Delta$  можно принять

$$\widehat{Z}_M^\Delta = \left\{ \widehat{z} \in \widehat{M} : \begin{array}{l} A^j z_n^l \leq u_j^\delta + \delta_j, \quad j = \overline{1, m}, \\ A^j z_n^u \geq u_j^\delta - \delta_j, \quad j = \overline{1, m}. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Значения  $A^j z_n^l$  и  $A^j z_n^u$  без труда вычисляются аналитически. Подставляя (4) в интегральное уравнение типа Абеля (1), получим

$$A^j z_n^l = \sum_{i=k}^n \frac{0.5}{(r_{i+1} - r_i) \sqrt{R^2 - \xi_j^2}} \left\{ \left( (2r_{i+1} - r) \sqrt{r^2 - \xi_j^2} - \xi_j^2 \ln \left( r + \sqrt{r^2 - \xi_j^2} \right) \right) z_i + \left( (r - 2r_i) \sqrt{r^2 - \xi_j^2} + \xi_j^2 \ln \left( r + \sqrt{r^2 - \xi_j^2} \right) \right) z_{i+1} \right\} \Bigg|_{\beta_i}^{r_{i+1}},$$

где  $\xi_j \in [r_k, r_{k+1})$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ;  $\beta_k = \xi_j$ ;  $\beta_i = r_i$ ,  $i = \overline{k+1, n}$ . Подставляя (5) в уравнение (1), получим

$$A^j z_n^u = \frac{1}{\sqrt{R^2 - \xi_j^2}} \sum_{i=k}^{n-1} \left( \sqrt{r_{i+1}^2 - \xi_j^2} - \sqrt{\gamma_i^2 - \xi_j^2} \right) z_i + \\ + \frac{0.5}{(r_n - r_{n-1})\sqrt{R^2 - \xi_j^2}} \left\{ \left( (2r_n - r)\sqrt{r^2 - \xi_j^2} - \xi_j^2 \ln \left( r + \sqrt{r^2 - \xi_j^2} \right) \right) z_{n-1} + \right. \\ \left. + \left( (r - 2r_{n-1})\sqrt{r^2 - \xi_j^2} + \xi_j^2 \ln \left( r + \sqrt{r^2 - \xi_j^2} \right) \right) z_n \right\} \Big|_{\lambda}^{r_{n+1}},$$

где  $\xi_j \in [r_k, r_{k+1})$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ;  $\gamma_k = \xi_j$ ,  $k \in \overline{1, n-1}$ ;  $\gamma_i = r_i$ ,  $i = \overline{k+1, n-1}$ ,  $k \in \overline{1, n-1}$ ;  $\lambda = r_n$ ,  $k \in \overline{1, n-1}$ ;  $\lambda = \xi_j$ ,  $k = n$ .

Таким образом,  $A^j z_n^l$  и  $A^j z_n^u$  линейны по  $\hat{z}$  и множество  $\hat{Z}_M^\Delta$  — замкнутый выпуклый ограниченный многогранник, образованный пересечением многогранника  $\hat{M}$  и выпуклого многогранного множества.

**4. Поточечная оценка погрешности.** Поскольку  $A^j z_n^l$  и  $A^j z_n^u$  — линейные функции от  $\hat{z}$ , то вычисление погрешности для любого конечномерного приближенного решения задачи в  $n$  точках сводится к задаче линейного программирования, которая в нашем случае формулируется следующим образом: найти такие значения  $z_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , для которых целевая функция

$$f(\hat{z}) = \pm z_i, \quad i \in \overline{1, n},$$

принимает минимальное значение на множестве точек, координаты которых удовлетворяют линейным ограничениям в виде неравенств (3) и (6). Поскольку  $z_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то задача легко решается, например, с помощью симплекс-метода [11]. После того как найдены минимальные  $z_i^l = \inf \{z_i : \hat{z} \in \hat{Z}_M^\Delta\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и максимальные  $z_i^u = \inf \{-z_i : \hat{z} \in \hat{Z}_M^\Delta\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , значения каждой координаты вектора  $\hat{z}$ , которые определяют погрешность любого конечномерного решения в  $n$  точках, мы сможем построить функцию  $z^l(r) = \inf \{z(r) : z(r) \in Z_M^\Delta\}$ , ограничивающую область приближенных решений снизу:

$$z^l(r) = z_i^l + \frac{z_{i+1}^l - z_i^l}{r_{i+1} - r_i} (r - r_i), \quad r \in [r_i, r_{i+1}], \quad i = \overline{1, n},$$

и функцию  $z^u(r) \geq \sup \{z(r) : z(r) \in Z_M^\Delta\}$ , ограничивающую область приближенных решений сверху:

$$z^u(r) = \begin{cases} z_i^u, & r \in [r_i, r_{i+1}), \quad i = \overline{1, n}, \\ 0, & r = R. \end{cases}$$

Здесь  $z_{n+1}^l \equiv 0$ . Таким образом,  $\forall z(r) \in Z_M^\Delta$  выполняется неравенство  $z^l(r) \leq z(r) \leq z^u(r)$  и мы получаем оценку погрешности решения во всех точках отрезка  $[0, R]$ .

**5. Фиксированное приближенное решение.** В качестве одного фиксированного конечномерного приближенного решения будем использовать элемент  $\hat{z}_\Delta \in \hat{Z}_M^\Delta$ , минимизирующий квадратичную функцию  $\varphi(\hat{z})$ :

$$\varphi(\hat{z}) = \sum_{j=1}^m (A^j z_n^l - u_j^\delta)^2, \quad (7)$$

т.е.  $\varphi(\hat{z}_\Delta) = \inf \{\varphi(\hat{z}) : \hat{z} \in \hat{Z}_M^\Delta\}$ . Задача поиска минимума квадратичной функции при линейных ограничениях в виде неравенств (3) и (6) может быть решена, например, с помощью метода проекции сопряженных градиентов [5].

**6. Численное моделирование.** Численное моделирование проводилось для числа измерительных плоскостей от 2 до 11, т.е. при  $m = 2 \div 11$ . Число точек восстановления  $n$  искомой функции бралось от 2 до 100. Приведем два примера, соответствующих двум крайним случаям. В качестве точного осесимметричного распределения вектора аксиальной скорости потока в произвольном канале кругового сечения возьмем наиболее часто используемое для моделирования потоков аналитическое выражение  $z(r) = a(1 - r^2)^{1/b}$ , где  $a$  — размерный коэффициент. Пусть, для простоты,  $a = 1$ .

**Пример 1.** Решим поставленную задачу при  $n = 2$ . Очевидно, что погрешность аппроксимации будет велика, поэтому множество приближенных решений будет широким даже при достаточно точных входных данных. Однако при этом значении  $n$  задача допускает простую геометрическую интерпретацию и может быть решена аналитически, что удобно для наглядного описания изложенного выше алгоритма поточечной оценки погрешности. Возьмем для простоты число измерительных плоскостей  $m = 2$ . Множество априорных ограничений на сеточные значения искомой функции (3) принимает вид

$$\widehat{M} = \left\{ \widehat{z} \in \mathbf{R}^2 : \begin{array}{l} z_1 \leq C, \\ z_2 - z_1 \leq 0, \\ z_1 - 2z_2 \leq 0. \end{array} \right\}$$

Множество приближенных решений  $\widehat{Z}_M^\Delta$  записывается в следующем виде:

$$\widehat{Z}_M^\Delta = \left\{ \widehat{z} \in \widehat{M} : \begin{array}{l} 2z_2 + z_1 \leq 4(u_1^\delta + \delta_1), \\ (6 - \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}))z_2 \leq 6(u_2^\delta + \delta_2), \\ 3z_2 + z_1 \geq 4(u_1^\delta - \delta_1), \\ (6 + \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3}))z_2 - \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})z_1 \geq 6(u_2^\delta - \delta_2). \end{array} \right\}$$

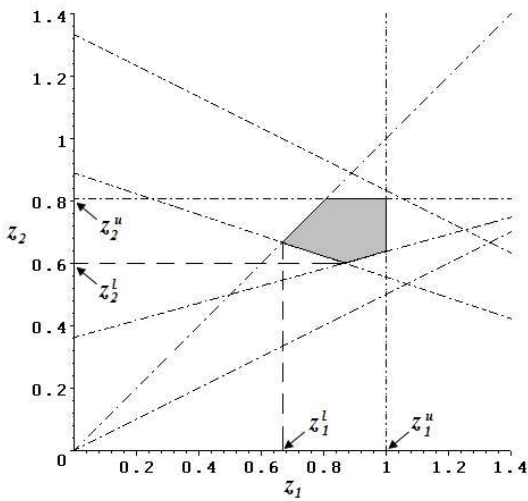


Рис. 3. Множество приближенных решений  $\widehat{Z}_M^\Delta$  (■)

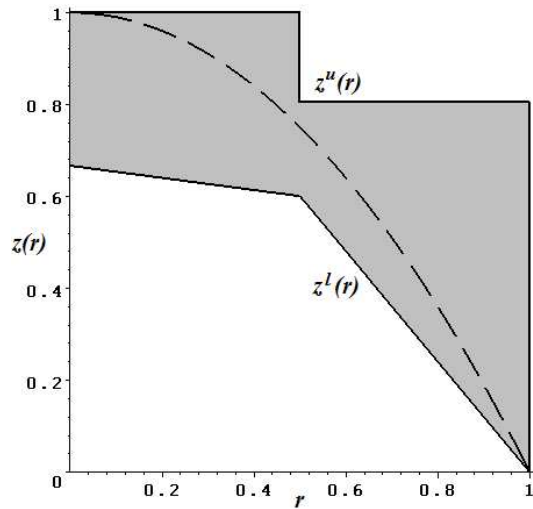


Рис. 4. Область приближенных решений (■), ограниченная функциями  $z^l(r)$ ,  $z^u(r)$  (—), и точное решение задачи (— · —)

Пусть  $b = 1$  и  $C = 1$ . В качестве входных данных выберем точные сеточные значения средней скорости  $u_1^\delta = 2/3$ ,  $u_2^\delta = 1/2$ . Таким образом,  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0$ , т.е. имеется только погрешность конечномерной аппроксимации. На рис. 3 представлено множество приближенных решений  $\widehat{Z}_M^\Delta$  и отмечены минимальные  $z_i^l$ ,  $i = 1, 2$ , и максимальные  $z_i^u$ ,  $i = 1, 2$ , значения, которые принимает функция  $f(\widehat{z}) = z_i$ ,  $i = 1, 2$ , на данном множестве. Все точки с координатами  $(z_1, z_2)$ , принадлежащие  $\widehat{Z}_M^\Delta$ , являются приближенными решениями задачи, а значения  $z_i^l$ ,  $i = 1, 2$ , и  $z_i^u$ ,  $i = 1, 2$ , определяют максимальную погрешность любого конечномерного решения при  $n = 2$ , т.е. для любой точки  $(z_1, z_2)$  из множества  $\widehat{Z}_M^\Delta$  справедливо неравенство  $z_i^l \leq z_i \leq z_i^u$ ,  $i = 1, 2$ .

На рис. 4 представлены функции  $z^l(r)$  и  $z^u(r)$ , построенные по сеточным значениям  $z_i^l$ ,  $i = 1, 2$ , и  $z_i^u$ ,  $i = 1, 2$ , которые ограничивают область приближенных решений задачи снизу и сверху и определяют погрешность любого бесконечномерного приближенного решения в каждой точке отрезка  $[0, R]$ . Все функции из множества априорных ограничений  $M$ , удовлетворяющие уравнению типа Абеля с заданной степенью точности, лежат в этой области, включая точное решение задачи.

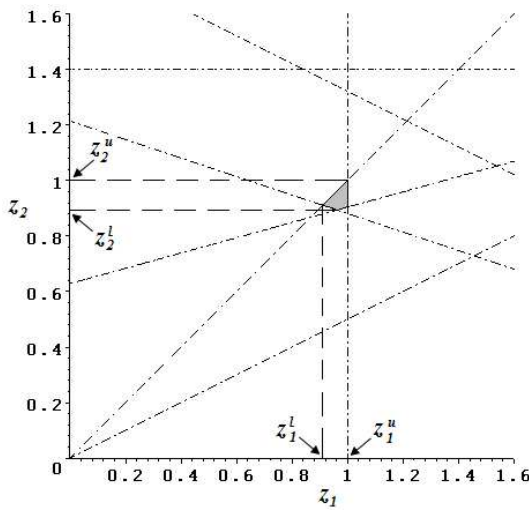


Рис. 5. Множество приближенных решений  $\hat{Z}_M^\Delta$  (■)

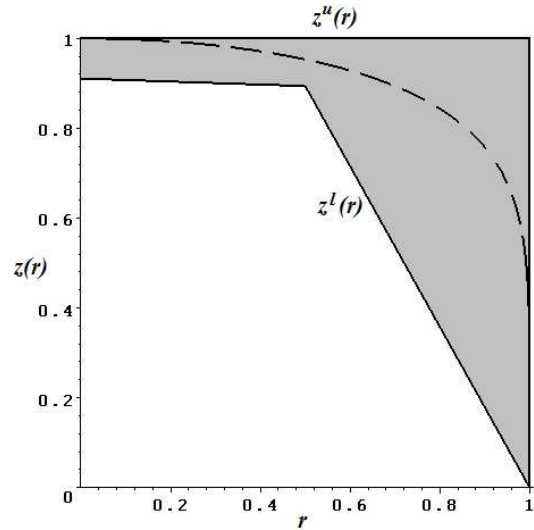


Рис. 6. Область приближенных решений (■), ограниченная функциями  $z^l(r)$ ,  $z^u(r)$  (—), и точное решение задачи (— —)

Пусть теперь  $b = 6$ . Для точных входных данных множество приближенных решений задачи, а также минимальные и максимальные значения каждой координаты вектора  $\hat{z}$  показаны на рис. 5.

Функции  $z^l(r)$  и  $z^u(r)$ , ограничивающие область приближенных решений задачи снизу и сверху и определяющие погрешность в каждой точке отрезка  $[0, R]$ , представлены на рис. 6.

Из первого примера видно, что оценка погрешности решения в каждой точке отрезка  $[0, R]$  зависит и от формы профиля скорости искомого потока.

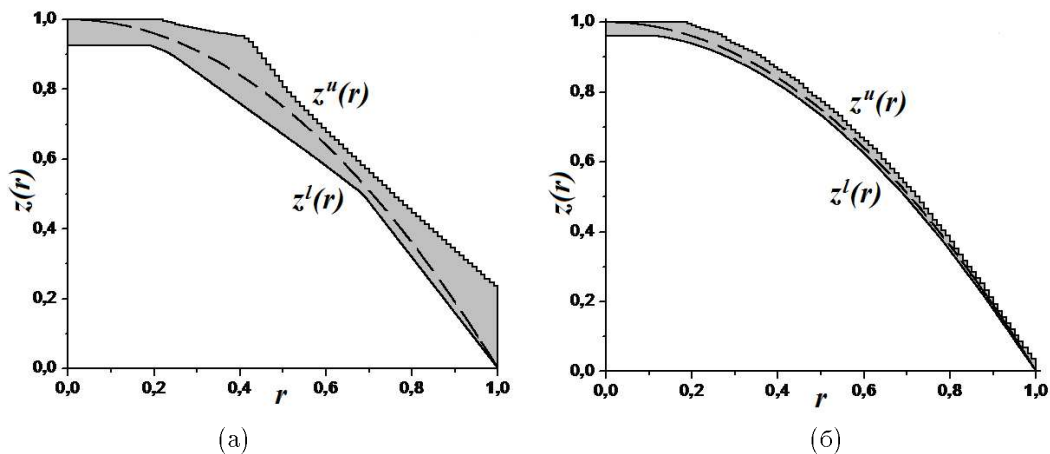


Рис. 7. а) Область приближенных решений (■) при  $m = 2$  и точное решение (— —), б) область приближенных решений (■) при  $m = 11$  и точное решение (— —)

**Пример 2.** Пусть теперь число точек восстановления  $n = 100$ . Получим решение поставленной задачи при числе измерительных плоскостей  $m = 2$ ,  $m = 11$  и при  $b = 1$ ,  $b = 6$ . Как и в предыдущем примере, в качестве входных данных берем точные сеточные значения средней скорости потока. Таким образом,  $u_j^\delta = u_j$ ,  $\delta_j = 0$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Для численных расчетов был использован язык программирования Fortran 90. Для минимизации линейной функции  $f(\hat{z})$  на множестве  $\hat{Z}_M^\Delta$  использовалась подпрограмма DDLPRS библиотеки Microsoft IMSL. Результаты вычислений при  $b = 1$  представлены на рис. 7.

Результаты вычислений при  $b = 6$  представлены на рис. 8.

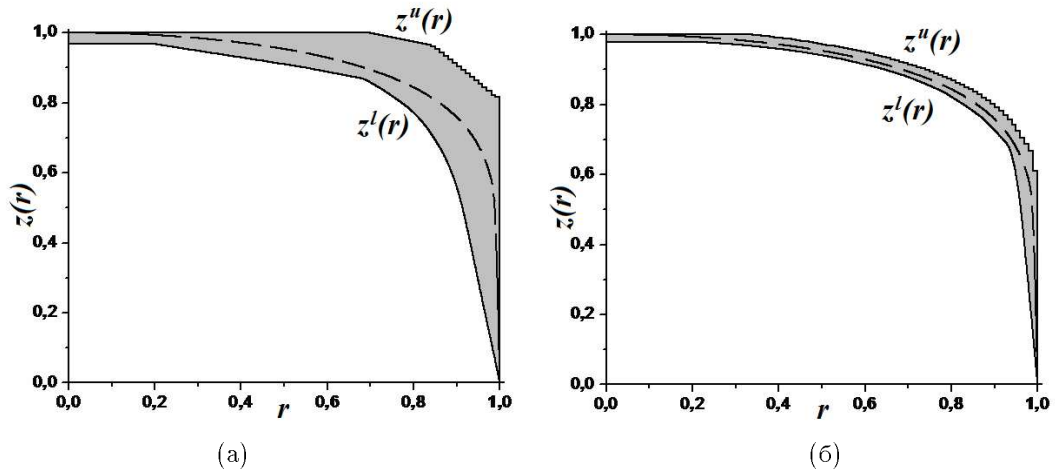


Рис. 8. а) Область приближенных решений (■) при  $m = 2$  и точное решение (---), б) область приближенных решений (■) при  $m = 11$  и точное решение (---)

Таким образом, при большом  $n$  можно достаточно точно определить погрешность реконструкции  $z(r)$  во всех точках отрезка  $[0, R]$  и тем самым форму и значения истинного профиля скорости.

Получим теперь решение поставленной задачи при неточных входных данных. Кроме того, откажемся от ограниченности искомого решения сверху константой  $C$ . Пусть  $m = 11$  и  $b = 6$ . Решая прямую задачу, вычислим значения “экспериментальной” функции  $u(\xi)$  на сетке  $\{\xi_j\}_1^m$ . Моделируя процесс появления случайных ошибок при определении экспериментальной функции  $u(\xi)$ , заменим  $u_j$  на  $u_j^\delta$  по формулам  $u_j^\delta = u_j(1 + \theta_i \varepsilon)$ , где  $\theta_i$  — случайные числа из промежутка  $(-1, 1)$  с равномерным законом распределения. Если положить  $\varepsilon = 0.01 q$ , то относительная погрешность значений  $u_j^\delta$  в сравнении с  $u_j$  не будет превышать  $q\%$ . Было взято  $q = 1$ . Результаты численных расчетов представлены на рис. 9.

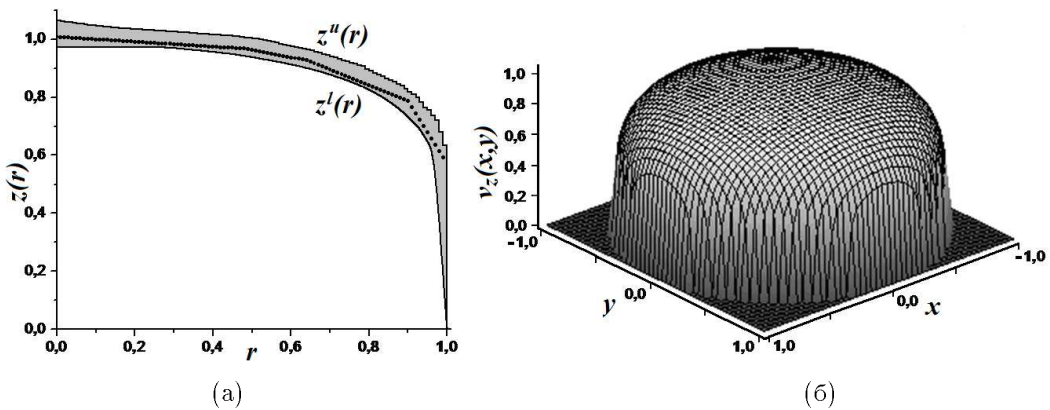


Рис. 9. а) Область приближенных решений (■) и фиксированное конечномерное решение  $\hat{z}_\Delta$  ( $\cdots$ ), б) профиль вектора скорости в поперечном сечении канала, построенный по предварительно сглаженному приближенному решению  $\hat{z}_\Delta$

При нахождении фиксированного приближенного решения  $\hat{z}_\Delta$  путем минимизации квадратичной функции (7) на множестве  $\hat{Z}_M^\Delta$  не используется информация о гладкости искомого решения. Поэтому найденное конечномерное решение может и не лежать на некоторой гладкой кривой. В этом случае полученное приближенное решение естественно сгладить. Авторы статьи использовали подпрограмму DQPROG библиотеки Microsoft IMSL для минимизации квадратичной функции и подпрограмму DCSSED для сглаживания найденного приближенного решения.

**7. Заключение.** Теоретически исследована методика обработки данных в ультразвуковых измерительных модулях в случае безвихревого движения жидкости или газа, позволяющая восстановить истин-

ный профиль скорости в поперечном сечении канала и оценить погрешность восстановления в каждой точке.

Использование априорной информации о форме профиля скорости в центральном сечении позволяет сразу строить область, которой принадлежат все приближенные решения задачи и тем самым контролировать желаемую точность решения. Важно то, что при фиксированном числе входных данных и фиксированной погрешности всегда можно подобрать оптимальное число точек восстановления  $n$ , начиная с которого погрешность аппроксимации не будет существенным образом влиять на решение, что очень удобно при практической обработке данных.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00044) и программы “Университеты России” (грант № 03.01.007).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рычагов М.Н. Ультразвуковые измерения потоков в многоплоскостных измерительных модулях // Акустич. журнал. 1998. **44**, № 6. 829–836.
2. Rychagov M., Tereshchenko S. Multipath flowrate measurements of symmetric and asymmetric flows // Inverse Problems. 2000. **16**. 495–504.
3. Lynnworth L.C. Ultrasonic measurements for process control. New York: Academic Press, 1989.
4. Gorenflo R., Vessella S. Abel integral equations. Analysis and applications. Berlin: Springer, 1991.
5. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
6. Yagola A.G., Leonov A.S., Titarenko V.N. Data errors and an error estimation for ill-posed problems // Inverse Problems in Engng. 2002. **10**, N 2. 117–129.
7. Николаева Н.Н., Титаренко В.Н., Ягола А.Г. Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // Сибирский журнал вычислительной математики. 2003. **6**, № 2. 171–180.
8. Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G. An error estimation for a solution of Abel equation // Numer. Funct. Anal. Optimization. 2004. **25**, N 3, 4. 259–269.
9. Николаева Н.Н., Рычагов М.Н., Титаренко В.Н., Ягола А.Г. Оценка погрешности реконструкции симметричных профилей скорости в многоплоскостных измерительных модулях // ЖВМ и МФ. 2004. **44**, № 1. 18–29.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
11. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.

Поступила в редакцию  
15.11.2004

---