УДК 519.6

# О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

**И. В. Колос**[1], **М. В. Колос**[2]

Получены априорные неравенства с негативной нормой для дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов с граничными условиями третьего рода в случае, когда правая часть принадлежит пространству обобщенных функций. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задач и сходимость приближенного метода решения.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04–01–00026).

Пусть в $n$-мерном евклидовом пространстве $E_n$ задана замкнутая ограниченная область $P$ с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль $\bar{n}_0$; $C^2(P)$ — множество дважды дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на $P$; $\bar{\nu}$ — конормаль с координатами $\nu_i = \dfrac{1}{a}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}n_j$, где $n_j$ — координаты нормали $\bar{n}_0$, $n_j = \cos(\bar{n}_0, x_j)$, функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, где $i,\ j = 1,\dots,n$, а величина $a(x) = \left[\sum\limits_{i=1}^{n}\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}n_j\Bigr)^2\right]^{1/2}$; $\dfrac{du}{d\bar{\nu}}$ — производная по конормали $\bar{\nu}$, причем справедливы соотношения $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\cos(\bar{n}_0, x_j)a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j} = a(x)\sum\limits_{j=1}^{n}\cos(\bar{n}_0, x_j)\dfrac{\partial}{\partial x_j} \equiv a(x)\dfrac{d}{d\bar{\nu}}$; $C_1^2(P)$ — множество функций $u(x) \in C^2(P)$, для которых выполняется условие

$$\alpha(x)\frac{du}{d\bar{\nu}} + \beta(x)u(x) = 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in \Gamma, \tag{1}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — заданные на $\Gamma$ функции, удовлетворяющие соотношению $\bigl|\alpha(x)\bigr| + \bigl|\beta(x)\bigr| \neq 0,\ x \in \Gamma$.

Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на $P$; $(.,.)_{0P}$, $\|\cdot\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W_2^1(P)$ — позитивное соболевское пространство;

$$(u,v)_{1P} = \int\limits_P \Bigl(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x)v(x)\Bigr)dP$$

есть скалярное произведение в $W_2^1(P)$; $\|u\|_{1P} = \sqrt{(u,u)_{1P}}$ — норма в $W_2^1(P)$.

Справедливо неравенство $\|u\|_{0P} \leqslant k\|u\|_{1P}$ для $\forall u \in W_2^1(P)$, $k =$const$> 0$.

Рассмотрим на $P$ линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$\mathcal{N}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Bigl(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Bigr) + a_0(x)u(x), \tag{2}$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, $i,\ j = 1,\dots,n$, $a_0(x) \in C(P)$, $C(P)$ — пространство непрерывных функций на $P$, $a_0(x) \geqslant c_0$ для $\forall x \in P$, $c_0 = \inf\limits_x\bigl\{a_0(x) \mid x \in P\bigr\} > 0$.

Предполагаем, что справедливо также неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \tag{3}$$

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; e-mail: rektorat@urao.edu

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

где $\lambda$ — положительная константа, $\xi_i$ — произвольные вещественные числа ($i = 1, \dots, n$).

Покажем, что соотношения (1)–(3) задают в пространстве $L_2(P)$ замкнутый линейный оператор $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{B}u = Nu$ для $\forall u \in C_1^2(P)$. Оператор $\mathcal{B}$ имеет плотную в $L_2(P)$ область определения $D(\mathcal{B})$, является симметрическим и, при некоторых условиях на функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, положительно определенным, то есть справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &(\mathcal{B}u, v)_{0P} = (u, \mathcal{B}v)_{0P} \qquad \text{для } \forall u,\, v \in D(\mathcal{B}); \\ &(\mathcal{B}u, u)_{0P} \geqslant c\,\|\, u \,\|_{0P}^2 \qquad \text{для } \forall u \in D(\mathcal{B}), \quad c = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Скалярное произведение $(\mathcal{B}u, v)_{0P}$ для функций $u, v \in C^2(P)$, удовлетворяющих условию (1), имеет вид

$$(\mathcal{B}u, v)_{0P} = -\int\limits_P \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big) v(x)\,dP + \int\limits_P a_0(x)u(x)v(x)\,dP.$$

Второй интеграл в этом выражении симметричен относительно функций $u(x)$ и $v(x)$. Применим к первому интегралу формулу интегрирования по частям и, согласно формуле Остроградского–Гаусса, получаем, что

$$\int\limits_P \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big) v(x)\,dP = \int\limits_P \sum_{i,j=1}^n u(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\Big)\,dP +$$
$$+ \int\limits_\Gamma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,v(x)\cos(\bar n_0, x_i)\,d\Gamma - \int\limits_\Gamma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,u(x)\cos(\bar n_0, x_j)\,d\Gamma.$$

Оценим интегралы по множеству $\Gamma$. Представим множество $\Gamma$ в виде объединения двух подмножеств $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \big\{x|\, \alpha(x) = 0,\, x \in \Gamma\big\}$, а $\Gamma_2 = \big\{x|\, \alpha(x) \neq 0,\, x \in \Gamma\big\}$. Отметим, что на множестве $\Gamma_1$, согласно (1), функции $u(x)$ и $v(x)$ равны нулю и $\sum\limits_{i,j=1}^n \cos(\bar n_0, x_j)\, a_{ij}\,\dfrac{\partial}{\partial x_j} = a(x)\,\dfrac{d}{d\bar\nu}$. Таким образом,

$$\int\limits_\Gamma a(x)\,\frac{dv}{d\bar\nu}\,u(x)\,d\Gamma - \int\limits_\Gamma a(x)\,\frac{du}{d\bar\nu}\,v(x)\,d\Gamma = \int\limits_{\Gamma_2} a(x)\,\frac{dv}{d\bar\nu}\,u(x)\,d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_2} a(x)\,\frac{du}{d\bar\nu}\,v(x)\,d\Gamma.$$

Так как $\alpha(x)$ на множестве $\Gamma_2$ отлично от нуля, то справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma_2} a(x)\,\frac{dv}{d\bar\nu}\,u(x)\,d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_2} a(x)\,\frac{du}{d\bar\nu}\,v(x)\,d\Gamma =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)}\Big[\alpha(x)\,\frac{dv}{d\bar\nu} + \beta(x)v(x)\Big]u(x)\,d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)}\Big[\alpha(x)\,\frac{du}{d\bar\nu} + \beta(x)u(x)\Big]v(x)\,d\Gamma = 0.$$

Равенство нулю следует из того, что функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют условию (1). Следовательно,

$$(\mathcal{B}u, v)_{0P} = (u, \mathcal{B}v)_{0P} \quad \text{для} \quad \forall u,\, v \in C_1^2(P).$$

Оценим скалярное произведение $(\mathcal{B}u, u)_{0P}$ для $\forall u \in C_1^2(P)$. Из доказательства симметричности оператора $\mathcal{B}$ имеем

$$-\int\limits_P \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big) u(x)\,dP =$$
$$= -\int\limits_\Gamma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,u(x)\cos(\bar n_0, x_i)\,d\Gamma + \int\limits_P \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dP =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_2} \frac{a(x)}{\alpha(x)}\,\beta(x)u^2(x)\,d\Gamma + \int\limits_P \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dP.$$

Отсюда следует, что

$$(\mathcal{B}u,u)_{0P}=\int\limits_{\Gamma_2}\frac{a(x)}{\alpha(x)}\,\beta(x)u^2(x)\,d\Gamma+\int\limits_P\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dP+\int\limits_P a_0(x)u^2(x)\,dP.$$

Обозначим $\widetilde{a}(x)=\begin{cases}\dfrac{a(x)\beta(x)}{\alpha(x)}, & x\in\Gamma_2;\\ 0, & x\notin\Gamma_2.\end{cases}$ Тогда

$$(\mathcal{B}u,u)_{0P}=\int\limits_P\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dP+\int\limits_P\big(\widetilde{a}(x)+a_0(x)\big)u^2(x)\,dP.$$

Из свойств функций $a_{ij}(x)$ при условии, что $\inf\limits_{x\in P}\big(\widetilde{a}(x)+a_0(x)\big)\geqslant 0$, получаем неравенство

$$(\mathcal{B}u,u)_{0P}\geqslant c\,\|\,u\,\|_{1P}^2\geqslant c_1\,\|\,u\,\|_{0P}^2,\qquad\text{где}\qquad c,\,c_1=\mathrm{const}>0;$$

здесь учтено, что $W_2^1(P)\subset L_2(P)$ и $\|\,u\,\|_{1P}\geqslant k\,\|\,u\,\|_{0P}$.

Введем обозначение $(u,v)_{\mathcal{B}}=(\mathcal{B}u,v)_{0P}$ для $\forall u,\,v\in D(\mathcal{B})$. Пополним $D(\mathcal{B})$ по этому скалярному произведению. Полученное пространство обозначим через $H_{\mathcal{B}}$. Примем это пространство за позитивное $H_{\mathcal{B}}=H_{\mathcal{B}}^+$ и построим по $H_{\mathcal{B}}^+$ и $L_2(P)$ негативное пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Пусть $f(x)\in L_2(P)$. Тогда выражение $(f,u)_{0P}$, $u\in H_{\mathcal{B}}^+$, определяет непрерывный функционал на $H_{\mathcal{B}}^+$, причем непрерывность следует из (4) и неравенств

$$\big|(f,u)_{0P}\big|=\big|l_f(u)\big|\leqslant\|\,f\,\|_{0P}\,\|\,u\,\|_{0P}\leqslant c\,\|\,f\,\|_{0P}\,\|\,u\,\|_+,\quad f\in L_2(P),\quad u\in H_{\mathcal{B}}^+\quad\big(H_{\mathcal{B}}^+\subset L_2(P)\big),$$

где $\|\,.\,\|_+$ — норма в $H_{\mathcal{B}}^+$. Пополним $L_2(P)$ по норме

$$\|\,f\,\|_-=\sup_u\left(\frac{\big|(f,u)_{0P}\big|}{\|\,u\,\|_+},\ f\in L_2(P),\ u\in H_{\mathcal{B}}^+,\ \|\,u\,\|_+\neq 0\right).$$

Полученное пополнение задает пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Оператор $\mathcal{B}$ непрерывно действует из $H_{\mathcal{B}}^+$ в $H_{\mathcal{B}}^-$.

Пусть $[0,t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau\in[0,t]$. Пусть $\|\,.\,\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$. Определим область $Q=P\times[0,t]$; $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau,x)$ на $Q$, отображающих сегмент $[0,t]$ в пространство $E_n$ и таких, что $\int\limits_0^t\big\|\,u(\tau)\big\|_{0P}^2\,d\tau=\|\,u\,\|_{0Q}^2<\infty$.

**1.** Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор параболического типа

$$\mathcal{L}_1u\equiv\frac{\partial u}{\partial\tau}+\mathcal{B}u,\quad u\in D(\mathcal{L}_1),$$

где $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau,x)$, заданных в области $Q$ и непрерывно дифференцируемых по переменной $\tau\in[0,t]$, а по $x\in P$ функции $u(\tau,x)\in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau,x)\big|_{\tau=0}=0,\quad\Big[\alpha(x)\,\frac{du(\tau,x)}{d\nu}+\beta(x)u(\tau,x)\Big]\Big|_{x\in\Gamma}=0.\tag{5}$$

Пусть $W_{20}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|\,u\,\|_{10Q}=\left(\int\limits_Q\left[\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2+u\mathcal{B}u\right]dQ\right)^{1/2};\tag{6}$$

$\|\,.\,\|_{10Q}$ и $(.,.)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в позитивном пространстве $W_{20}^1(Q)$; $W_{20}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|\,v\,\|_{-10Q}=\sup_u\left[\frac{\big|(u,v)_{0Q}\big|}{\|\,u\,\|_{10Q}},\ v\in L_2(Q),\ u\in W_{20}^1(Q),\ \|\,u\,\|_{10Q}\neq 0\right].$$

Пусть, далее, $D(\mathcal{L}_1^*)$ — множество функций $u(\tau,x)$, имеющих хотя бы одну производную в классическом смысле по $\tau$, а по $x$ функции $u(\tau,x)\in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau,x)\big|_{\tau=t}=0,\quad \left[\alpha(x),\frac{du(\tau,x)}{d\nu}+\beta(x)u(\tau,x)\right]\Big|_{x\in\Gamma}=0; \tag{7}$$

$W_{2t}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1^*)$ по норме (6); $W_{2t}^{-1}(Q)$ — негативное пространство для $W_{2t}^1(Q)$; $\mathcal{L}_1^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{L}_1$: $\mathcal{L}_1^*u\equiv-\dfrac{\partial u}{\partial\tau}+\mathcal{B}u$, $u\in D(\mathcal{L}_1^*)$.

Расширим по непрерывности операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1^*$ на все пространство $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$.

**Определение 1.** *Обобщенным решением задачи*

$$\mathcal{L}u=f,\quad f\in L_2(Q), \tag{8}$$

*где $f$ — заданная функция, называют функцию $u(\tau,x)\in W_{20}^1(Q)$, для которой существует последовательность $\{u_i(\tau,x)\}_{i=1}^{\infty}$ функций из $D(\mathcal{L}_1)$, удовлетворяющая соотношениям $\|\mathcal{L}u_i-f\|_{-1tQ}\to0$, $\|u_i-u\|_{10Q}\to0$, $i\to\infty$.*

**Определение 2.** *Обобщенным решением задачи*

$$\mathcal{L}^*v=g,\quad g\in L_2(Q), \tag{9}$$

*где $g$ — заданная функция, называют функцию $v(\tau,x)\in W_{2t}^1(Q)$, для которой существует последовательность $\{v_i(\tau,x)\}_{i=1}^{\infty}$ функций из $D(\mathcal{L}_1^*)$, удовлетворяющая соотношениям $\|\mathcal{L}^*v-g\|_{-10Q}\to0$, и $\|v_i-v\|_{10Q}\to0$, $i\to\infty$.*

**Лемма 1.** *Для задач* (8) *и* (9) *справедливы неравенства*

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ}\leqslant c_1\|u\|_{10Q},\quad u\in W_{20}^1(Q),\quad c_1=\text{const}; \tag{10}$$

$$\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q}\leqslant c_2\|v\|_{1tQ},\quad v\in W_{2t}^1(Q),\quad c_2=\text{const}. \tag{11}$$

**Доказательство.** Пусть $u(\tau,x)$ — гладкая функция из позитивного пространства $W_{20}^1(Q)$, а функция $v(\tau,x)\in W_{2t}^1(Q)$. Тогда справедливо равенство $(v,\mathcal{L}u)_{0Q}=(\mathcal{L}^*v,u)_{0Q}$. Также имеет место соотношение $\big|(u,\mathcal{B}v)_{0P}\big|\leqslant\sqrt{(u,\mathcal{B}u)_{0P}(v,\mathcal{B}v)_{0P}}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\big|(v,\mathcal{L}u)_{0Q}\big|&=\big|(\mathcal{L}^*v,u)_{0Q}\big|\leqslant\\&\leqslant\left(\int\limits_Q\left[\Big(\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big)^2+v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\right]dQ\right)^{1/2}\left(\int\limits_Q\left[u^2(\tau,x)+u(\tau,x)\mathcal{B}u(\tau,x)\right]dQ\right)^{1/2}\leqslant\\&\leqslant c\|u\|_{10Q}\|v\|_{1tQ},\end{aligned}$$

где $c=\text{const}$ и использовано неравенство $\|u\|_{0Q}\leqslant c\|u\|_{10Q}$ для $\forall u\in W_{20}^1(Q)$. По определению нормы в негативном пространстве имеем

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ}=\sup_v\left\{\frac{\big|(v,\mathcal{L}u)_{0Q}\big|}{\|v\|_{1tQ}},\ \|v\|_{1tQ}\neq0\right\}\leqslant c_1\|u\|_{0Q}\leqslant c\|u\|_{10Q},\quad u\in W_{20}^1(Q),\quad v\in W_{2t}^1(Q).$$

Для произвольной функции $u(\tau,x)\in W_{20}^1(Q)$ неравенство получаем предельным переходом.

Доказательство неравенства (11) аналогично.

**Лемма 2.** *Для задач* (8) *и* (9) *справедливы неравенства*

$$c_1\|u\|_{0Q}\leqslant\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ},\quad c_1=\text{const}; \tag{12}$$

$$c_2\|v\|_{0Q}\leqslant\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q},\quad c_2=\text{const}. \tag{13}$$

**Доказательство.** Введем оператор $\mathcal{J}_t$ в $L_2(Q)$, который на функциях $v(\tau,x)\in W_{20}^1(Q)$ определяется выражением

$$\mathcal{J}_tv(\tau,x)\equiv\int\limits_t^{\tau}b^{-1}(s)v(s,x)\,ds=u(\tau,x).$$

Функция $u(\tau,x)=\mathcal{J}_t v$ при $\tau=t$ равна 0 и, следовательно, $u\in W^1_{2t}(Q)$. Таким образом, оператор $\mathcal{J}_t$ определен на $W^1_{20}(Q)$ и действует в $W^1_{2t}(Q)$; $b(\tau)=-(1+\tau)$.

Рассмотрим выражение

$$(\mathcal{J}_t v,\mathcal{L}v)_{0Q}=(u,\mathcal{L}v)_{0Q}=\int\limits_Q u\Big(\frac{\partial v}{\partial\tau}+\mathcal{B}v\Big)\,dQ=\int\limits_Q u\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[b(\tau)\,\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big]\,dQ+\int\limits_Q u\mathcal{B}\Big(b(\tau)\,\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)\,dQ. \tag{14}$$

Здесь использовано то, что $v(\tau,x)=b(\tau)\,\dfrac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}$. Оценим интегралы в правой части. Первый интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_Q u(\tau,x)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[b(\tau)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]\,dQ=\int\limits_Q\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[u(\tau,x)b(\tau)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]\,dQ-\int\limits_Q b(\tau)\Big(\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\Big)^2\,dQ.$$

Согласно формуле Остроградского,

$$\int\limits_Q\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[u(\tau,x)b(\tau)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]\,dQ=\int\limits_S u(\tau,x)b(\tau)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\,\cos(\bar n,\tau)\,dS=\int\limits_S u(\tau,x)v(\tau,x)\cos(\bar n,\tau)\,dS=0,$$

где $S=\partial Q$ — граница области $Q$, $\bar n$ — нормаль к $S$. Равенство нулю следует из того, что $\cos(\bar n,\tau)$ отличен от нуля лишь на поверхности $\tau=0$ и $\tau=t$, но $v(0,x)=0$ и $u(t,x)=0$. Таким образом,

$$\int\limits_Q u(\tau,x)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[b(\tau)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]\,dQ=-\int\limits_Q b(\tau)\Big(\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\Big)^2\,dQ. \tag{15}$$

Для второго интеграла в правой части (14) находим, что

$$\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}\Big[b(\tau)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]\,dQ=\frac12\int\limits_Q\frac{\partial}{\partial\tau}\big[u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}u(\tau,x)\big]\,dQ-\frac12\int\limits_Q u(\tau,x)\,\frac{db(\tau)}{d\tau}\,\mathcal{B}u(\tau,x)\,dQ. \tag{16}$$

Используя формулу Остроградского, получаем

$$\int\limits_Q\frac{\partial}{\partial\tau}\big[u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}u(\tau,x)\big]\,dQ=\int\limits_S u(\tau,x)b(\tau)\mathcal{B}u(\tau,x)\cos(\bar n,\tau)\,dS=-b(0)\int\limits_P u(0,x)\mathcal{B}u(0,x)\,dP \tag{17}$$

($u(t,x)=0$; $\cos(\bar n,\tau)\neq0$ лишь при $\tau=0$ и $\tau=t$). Подставим (15)–(17) в (14) и, используя явный вид оператора $\mathcal{J}_t$, находим

$$(\mathcal{J}_t v,\mathcal{L}v)_{0Q}=\frac12\int\limits_Q\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2+u\mathcal{B}u\Big]\,dQ+\int\limits_Q\tau\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2\,dQ+\frac12\int\limits_Q\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2\,dQ+\frac12\int\limits_P u(0,x)\mathcal{B}u(0,x)\,dP;$$

так как выражение $\displaystyle\int\limits_Q\Big(\tau+\frac12\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big)^2\,dQ+\frac12\int\limits_P u(0,x)\mathcal{B}u(0,x)\,dP\geqslant0$, то справедливо неравенство

$$(\mathcal{J}_t v,\mathcal{L}v)_{0Q}\geqslant\frac12\,\|\,u\,\|^2_{1tQ}. \tag{18}$$

Применим обобщенное неравенство Коши–Буняковского и, используя явный вид оператора $\mathcal{J}_t$, получаем соотношения

$$\|\mathcal{L}v\|_{-1tQ}\geqslant\frac12\,\|\,u\,\|_{1tQ},$$

$$\|\,u\,\|^2_{1tQ}=\int\limits_Q\Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_t^\tau\big\{-(1+s)\big\}v(s,x)\Big]^2dQ+\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}u(\tau,x)\,dQ\geqslant\int\limits_Q\big[-(1+\tau)v(\tau,x)\big]^2\,dQ\geqslant\|\,v\,\|^2_{0Q}.$$

Отсюда $\|\mathcal{L}v\|_{-1tQ}\geqslant c_1\,\|\,v\,\|_{0Q}$.

Для произвольных $v \in L_2(Q)$ неравенство получаем предельным переходом.

Неравенство (13) можно доказать аналогично.

**Теорема 1.** *Для любых функций $f \in L_2(Q)$ и $g \in L_2(Q)$ существуют единственные обобщенные решения задач* (8) *и* (9) *соответственно в пространствах $W^1_{20}(Q)$ и $W^1_{2t}(Q)$.*

**Доказательство.** Рассмотрим функционал $l_f(v) = (v,f)_{0Q}$, $v \in D(\mathcal{L}^*) \subset W^1_{2t}(Q)$. Используя неравенство из леммы 2, находим, что $\big|l_f(v)\big| = \big|(v,f)_{0Q}\big| \leqslant \|\,v\,\|_{0Q}\|f\|_{0Q} \leqslant c\|\mathcal{L}^*v\|_{-10Q}$, т.е. $l_f(v)$ — непрерывный линейный функционал от $\mathcal{L}^*v$, $v \in D(\mathcal{L}^*_1)$.

Расширим по теореме Хана–Банаха этот функционал на все $W^{-1}_{20}(Q)$. По обобщенной теореме Рисса [5, 7] для линейного непрерывного функционала, определенного на пространстве $W^{-1}_{20}(Q)$, существует функция $u \in W^1_{20}(Q)$, такая, что $l(\rho) = \langle u,\rho\rangle_{0Q}$ для $\forall\rho \in W^{-1}_{20}(Q)$, где $\langle u,\rho\rangle_{0Q}$ — билинейная форма в пространствах $W^1_{20}(Q)$ и $W^{-1}_{20}(Q)$. Пусть $\rho = \mathcal{L}^*v$, где $v$ и $u$ — гладкие функции, удовлетворяющие условиям (7) и (5) соответственно. Тогда

$$l(\rho) \equiv \langle u,\rho\rangle_{0Q} = \langle u,\mathcal{L}^*v\rangle = (u,\mathcal{L}^*v)_{0Q} = (\mathcal{L}u,v)_{0Q} = (f,v)_{0Q}.$$

Функции $u(\tau,x)$, удовлетворяющие условиям (5), плотны в $W^1_{20}(Q)$. Таким образом, существует последовательность $\big\{u_i(\tau,x)\big\}_{i=1}^{\infty}$ гладких функций, удовлетворяющих (5), такая, что $\|u_i-u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$. Далее, используя лемму 1, находим, что $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $i \to \infty$. Существование решения доказана. Единственность следует из неравенства (12).

Существование и единственность решения задачи (9) доказываются аналогично.

**Определение 3.** *Обобщенным решением задачи* (8) *при $f \in W^{-1}_{2t}(Q)$ будем называть такую функцию $u(\tau,x) \in L_2(Q)$, для которой существует последовательность гладких функций $\big\{u_i(\tau,x)\big\}_{i=1}^{\infty}$, $u_i \in W^1_{20}(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\|u_i-u\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.*

**Определение 4.** *Обобщенным решением задачи* (9) *с правой частью из $W^{-1}_{20}(Q)$ будем называть такую функцию $v(\tau,x) \in L_2(Q)$, для которой существует последовательность функций $\big\{v_i(\tau,x)\big\}_{i=1}^{\infty}$, $v_i \in W^1_{2t}(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}^*v_i - g\|_{-10Q} \to 0$, $\|v_i - v\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.*

**Теорема 2.** *Для любой функции $f \in W^{-1}_{2t}(Q)$ существует единственное обобщенное решение в смысле определения* 3 *задачи* (8)*; для любой $g \in W^{-1}_{2o}(Q)$ существует единственное обобщенное решение в смысле определения* 4 *задачи* (9).

**Доказательство.** Пространство $L_2(Q)$ плотно в $W^{-1}_{2t}(Q)$, поэтому для любой $f \in W^{-1}_{2t}(Q)$ в $L_2(Q)$ существует последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющая соотношению $\|f_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $i \to \infty$. По теореме 1 для любой $f_i \in L_2(Q)$ существует единственное решение $u_i(\tau,x)$ задачи (8) в смысле определения 1.

Используя неравенство (12), находим $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} = \|f_i - f\|_{-1tQ} \geqslant c\|u_i - u\|_{0Q}$. Переходя в этом неравенстве к пределу по $i \to \infty$, устанавливаем существование обобщенного решения задачи (8) с правой частью из $W^{-1}_{2t}(Q)$ в смысле определения 3. Единственность следует из неравенства (12).

Доказательство второй части теоремы аналогично.

Обратимся теперь к приближенному решению краевой задачи. Рассмотрим вначале задачу (8), когда правая часть $f \in L_2(Q)$. Ее приближенное решение будем искать в виде

$$u_k(\tau,x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau)\rho_i(x), \quad k = 1,2,\dots, \tag{19}$$

где $\big\{\rho_i(x)\big\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(Q)$, удовлетворяющая условию (1), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\Big(\frac{\partial u_k}{\partial\tau},\rho_j\Big)_{0P} + (\mathcal{B}u_k,\rho_j)_{0P} = (f,\rho_j)_{0P}, \quad \big(u_k(0,x),\rho_j\big)_{0P} = y_j(0), \quad j = 1,\dots,k. \tag{20}$$

Используя (19), получаем

$$\frac{dy_i(\tau)}{d\tau} + \sum_{s=1}^{k} y_s(\tau)(\mathcal{B}\rho_s,\rho_j)_{0P} = (f,\rho_j)_{0P}, \quad y_i(0) = 0, \quad i,j = 1,\dots,k. \tag{21}$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме:

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = F_k y(\tau) + G_k(\tau), \quad y(0) = 0, \tag{22}$$

где $y(\tau)$ и $G_k(\tau)$ — векторы-столбцы, $y(\tau)=\{y_1(\tau),y_2(\tau),\dots,y_k(\tau)\}$,

$$G_k(\tau)=\{(f,\rho_1)_{0P},(f,\rho_2)_{0P}\dots,(f,\rho_k)_{0P}\},\quad F_k=-\begin{bmatrix}(\mathcal{B}\rho_1,\rho_1)_{0P}\cdots(\mathcal{B}\rho_1,\rho_k)_{0P}\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ (\mathcal{B}\rho_k,\rho_1)_{0P}\cdots(\mathcal{B}\rho_k,\rho_k)_{0P}\end{bmatrix}.$$

Отметим, что решение (21) понимается в обобщенном смысле [5, 7].

**Лемма 3.** *Для любой функции $f\in L_2(Q)$ справедливо неравенство $\|f\|_{0Q}\geqslant c\|u_k\|_{10Q}$.*

**Доказательство.** Умножим обе части соотношения (20) на $(2t-\tau)\dfrac{dy_j(\tau)}{d\tau}$. Суммируя по $j$ от 1 до $k$ и интегрируя по $\tau\in[0,t]$, находим

$$\int\limits_0^t\Big(\frac{\partial u_k}{\partial\tau},\sum_{j=1}^k(2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j\Big)_{0P}d\tau+\int\limits_0^t\Big(\mathcal{B}u_k,\sum_{j=1}^k(2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j\Big)_{0P}d\tau=\int\limits_0^t\Big(f,\sum_{j=1}^k(2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j\Big)_{0P}d\tau.$$

Отсюда, применяя соотношение (19), получаем

$$\Big(\frac{\partial u_k}{\partial\tau},(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}+\Big(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}\equiv\Big(\mathcal{L}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}=\Big(f,(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}.$$

Рассмотрим выражение $\Big(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\dfrac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}$. Справедливо равенство

$$\Big(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}=\frac12\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\{[2t-\tau]\mathcal{B}u_k,u_k\}\Big)_{0Q}+\frac12(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}.$$

Согласно формуле Остроградского и учитывая то, что $u(0,x)=0$ и $\cos(\bar n,\tau)\neq0$ только при $\tau=0$ и $\tau=t$, имеем

$$\Big(\mathcal{B}u_k,(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}=\frac12(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}+\frac12t\big(\mathcal{B}u_k(t,x),u_k(t,x)\big)_{0P}\geqslant\frac12(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}.$$

Таким образом,

$$\Big(f,(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}\geqslant\frac12(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}+\Big(\frac{\partial u_k}{\partial\tau},(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}\geqslant c\|u_k\|^2_{10Q}.$$

Здесь учтено, что $(2t-\tau)\geqslant t$, $0<c\leqslant t$, $c$ — константа.

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к левой части, находим

$$c\|u_k\|^2_{10Q}\leqslant\|f\|_{0Q}\Big\|(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big\|_{0Q}\leqslant2t\|f\|_{0Q}\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big\|_{0Q},$$

т.е. справедливо соотношение

$$\|f\|^2_{0Q}\geqslant\left(\frac{c}{2t}\frac{\|u_k\|^2_{10Q}}{\Big\|\dfrac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big\|_{0Q}}\right)^2\geqslant\frac{c^2}{4t^2}\frac{\|u_k\|^4_{10Q}}{\Big\|\dfrac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big\|^2_{0Q}+(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}}=c_1^2\|u_k\|^2_{10Q},\quad c_1=\frac{c}{2t}.$$

Последнее неравенство верно, так как скалярное произведение $(\mathcal{B}u_k,u_k)_{0Q}\geqslant0$. Таким образом, справедливо неравенство $\|f\|_{0Q}\geqslant c\|u_k\|_{10Q}$, что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** *Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, такая, что $\Big[\alpha(x)\dfrac{d\rho_i(x)}{d\bar\nu}+\beta(x)\rho_i(x)\Big]\Big|_{x\in\Gamma}=0$, а $y_i(\tau)$ — решение задачи (22). Тогда*

$$u_k(\tau,x)=\sum_{i=1}^k y_i(\tau)\rho_i(x),\quad k=1,2,\dots,$$

*задает в смысле определения 1 решение задачи (8), т.е. $\|u_k-u\|_{10Q}\to0$, $\|\mathcal{L}u_k-f\|_{-1tQ}\to0$, $k\to\infty$.*

**Доказательство.** Согласно лемме 3 множество функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено в $W_{20}^1(Q)$ и, тем самым, слабо компактно в $W_{20}^1(Q)$; следовательно, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ в $W_{20}^1(Q)$. Тогда в силу плотности $W_{20}^1(Q)$ подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому пределу $\bar u \in W_{20}^1(Q)$. Покажем, что $\bar u$ — решение задачи (8). Умножим (20) на произвольную функцию $\varphi(\tau) \in W_{20}^1(Q)$. После интегрирования от 0 до $t$ получим

$$\big(\mathcal{L}u_{k_n}, \varphi(\tau)\rho_j(x)\big)_{0Q} = \big(f, \varphi(\tau)\rho_j(x)\big)_{0Q}, \quad j = 1,\dots,k. \tag{23}$$

Так как $\|u_{k_n} - \bar u\|_{10Q} \to 0,\ k\to\infty$, то согласно неравенству (10)

$$\|\mathcal{L}u_{k_n} - \mathcal{L}u_{k_m}\|_{-1tQ} \leqslant c_1\,\|u_{k_n} - \bar u\|_{10Q} \to 0, \quad n,\, m \to \infty.$$

Последовательность $\{\mathcal{L}u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $W_{2t}^{-1}(Q)$ и имеет предел в $W_{2t}^{-1}(Q)$. Обозначим этот предел $\mathcal{L}\bar u$. Функция $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ принадлежит $W_{2t}^{-1}(Q)$; (23) можно понимать в смысле билинейной формы, т.е. (23) справедливо, если $\mathcal{L}u_{k_n} \in W_{2t}^{-1}(Q)$. Перейдем к пределу по $k\to\infty$ в (23). С учетом непрерывности скалярного произведения в $L_2(Q)$ получим $\big\langle \mathcal{L}\bar u, \varphi(\tau)\rho_j(x)\big\rangle_{tQ} = \big\langle f, \varphi(\tau)\rho_j(x)\big\rangle_{0Q}$, $j=1,\dots,k$. Это выражение можно записать в виде

$$\big\langle \mathcal{L}\bar u - f, \varphi(\tau)\rho_j(x)\big\rangle_{tQ} = 0. \tag{24}$$

В силу произвольности $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ получаем, что $\mathcal{L}\bar u - f = 0$, т.е. $\bar u$ — решение уравнения (8), что и требовалось доказать. Следует отметить, что (24) справедливо и в случае, когда $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$.

**Теорема 4.** *Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, причем $\rho_i(x) \in W_2^1(P)$ и $\Big[\alpha(x)\,\dfrac{d\rho_i(x)}{d\nu} + \beta(x)\rho_i(x)\Big]\Big|_{x\in\Gamma=0}$; функция $f(\tau,x)$ принадлежит пространству $W_{2t}^{-1}(Q)$; $\big\{f_\varepsilon(\tau,x)\big\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность осреднений функции $f(\tau,x)$ [7]; функция $y_{i\varepsilon}(\tau)$ — решение задачи*

$$\frac{dy_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{k} y_{j\varepsilon}(\tau)(\mathcal{B}\rho_j,\rho_i)_{0P} = (f_\varepsilon,\rho_i)_{0P}, \quad y_{i\varepsilon}(0)=0, \quad i=1,\dots,k.$$

*Тогда справедливы соотношения $\|u_{k\varepsilon} - u\|_{0Q} \to 0$, $\|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f\|_{-1tQ} \to 0$, $k\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, где функции $u_{k\varepsilon}(\tau,x) = \sum\limits_{i=1}^{k} y_{i\varepsilon}(\tau)\rho_i(x)$, $\|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\varepsilon \to 0$ и $u(\tau,x)$ — решение задачи* (8).

**Доказательство.** Запишем соотношение (20) для функций $f$ и $f_\varepsilon$:

$$\Big(\frac{\partial u_{k\varepsilon}}{\partial\tau}, \rho_j\Big)_{0P} + (\mathcal{B}u_{k\varepsilon},\rho_j)_{0P} = (f_\varepsilon,\rho_j)_{0P}; \quad \Big(\frac{\partial u_k}{\partial\tau}, \rho_j\Big)_{0P} + (\mathcal{B}u_k,\rho_j)_{0P} = (f,\rho_j)_{0P}.$$

После вычитания первого из второго получим

$$\Big(\frac{\partial(u_k - u_{k\varepsilon})}{\partial\tau}, \rho_j\Big)_{0P} + \big(\mathcal{B}(u_k - u_{k\varepsilon}),\rho_j\big)_{0P} = (f - f_\varepsilon,\rho_j)_{0P}. \tag{25}$$

Умножая (25) на функцию $\mathcal{J}_t(y_{j\varepsilon} - y_j) = \displaystyle\int_t^\tau \big[-(1+s)^{-1}\big]\big[y_{j\varepsilon}(s) - y_j(s)\big]\,ds$ и суммируя по $j$ $(j=1,\dots,k)$, находим

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial(u_k - u_{k\varepsilon})}{\partial\tau}, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\Big)_{0Q} + \big(\mathcal{B}(u_k - u_{k\varepsilon}), \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big)_{0Q} &= \big(f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big)_{0Q} = \\ &= \big(f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big)_{0Q}.\end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{J}_t$ переводит элемент из $L_2(Q)$ в пространство $W_{2t}^1(Q)$, поэтому справедливо равенство

$$\big\langle \mathcal{L}(u_k - u_{k\varepsilon}), \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\rangle_{tQ} = \big\langle f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\rangle_{tQ}.$$

Согласно (18),

$$\big\langle \mathcal{L}(u_k - u_{k\varepsilon}), \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\rangle_{tQ} \geqslant c\,\big\|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\big\|_{1tQ}^2.$$

Верно также неравенство

$$\left\langle f - f_\varepsilon, \mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\right\rangle_{tQ} \geqslant c\left\|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\right\|^2_{1tQ}.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \geqslant c\left\|\mathcal{J}_t(u_k - u_{k\varepsilon})\right\|_{1tQ} \geqslant c\,\|u_k - u_{k\varepsilon}\|_{0Q}.$$

По теореме 3

$$\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{10Q} \to 0, \quad \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Имеет место соотношение (см. лемму 2)

$$c_1\,\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{0Q} \leqslant \left\|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon)\right\|_{-1tQ}. \tag{26}$$

Так как $\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то последовательность $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ фундаментальна. Действительно, $\|f_{\varepsilon_1} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$ при $\varepsilon_1$, $\varepsilon \to 0$; из (26) вытекает, что $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}\|_{0Q} \to 0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon \to 0$. Обозначим $\bar{u} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$. Покажем, что $\bar{u} = u$. Неравенство (12) справедливо для всех $u \in L_2(Q)$, т.е. $\|\mathcal{L}u_\varepsilon\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|\,u_\varepsilon\|_{0Q}$; следовательно,

$$\left\|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u)\right\|_{-1tQ} = \|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|\,u_\varepsilon - u\|_{0Q}.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, находим $0 \geqslant c\,\|\bar{u} - u\|_{0Q}$, но $\|\bar{u} - u\|_{0Q} \geqslant 0$ и поэтому $\bar{u} = u$. Теорема 4 доказана.

**2.** Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор гиперболического типа

$$\mathcal{M}_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{M}_1),$$

где $D(\mathcal{M}_1)$ — множество функций $u(\tau, x)$, заданных в области $Q$, дважды непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0, t]$, а по переменной $x \in P$ функции $u(\tau, x) \in H^+_{\mathcal{B}}$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)\Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\alpha(x)\,\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \bar{\nu}} + \beta(x)u(\tau, x)\right]\Big|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{27}$$

Введем обозначения: $W^1_{20}(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{M}_1)$ по норме (6); $\|\,.\,\|_{10Q}$, $(.,.)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в позитивном пространстве $W^1_{20}(Q)$; $W^{-1}_{20}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|\,v\,\|_{-10Q} = \sup_u \left[\frac{|(u, v)_{0Q}|}{\|\,u\,\|_{10Q}}\,,\ v \in L_2(Q),\ u \in W^1_{20}(Q),\ \|u\|_{10Q} \neq 0\right].$$

Обозначим через $D(\mathcal{M}^*_1)$ множество функций $u(\tau, x)$, имеющих хотя бы две производных в классическом смысле по $\tau$, а по $x$ функции $u(\tau, x) \in H^+_{\mathcal{B}}$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau, x)\Big|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\alpha(x)\,\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \bar{\nu}} + \beta(x)u(\tau, x)\right]\Big|_{x\in\Gamma} = 0,$$

$W^1_{2t}(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{M}^*_1)$ по норме (6). Пусть $W^{-1}_{2t}(Q)$ — негативное пространство, построенное по $W^1_{2t}(Q)$ и $L_2(Q)$; $\mathcal{M}^*_1$ — сопряженный оператор к $\mathcal{M}_1$:

$$\mathcal{M}^*_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{M}^*_1).$$

Расширим по непрерывности операторы $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}^*_1$ на все пространство $W^1_{20}(Q)$ и $W^1_{2t}(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$.

Введем оператор $\mathcal{J}u \equiv \displaystyle\int_t^\tau b^{-1}(s)u(s, x)\,ds = v(\tau, x)$, где функция $b(\tau) = -2[t + \tau]$. Отметим, что

$$v(t, x) = 0, \quad \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} = b^{-1}(\tau)u(\tau, x), \quad \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad u(\tau, x) = b(\tau)\,\frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}\,. \tag{28}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$. Справедливо соотношение

$$(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\, dQ + \int\limits_Q \mathcal{B}u(\tau,x)v(\tau,x)\, dQ = \\ = \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\, dQ + \int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ. \tag{29}$$

Последнее равенство справедливо благодаря симметричности оператора $\mathcal{B}$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части (29) следующим образом. Перебросим операцию дифференцирования на функцию $v$; применяя формулу Остроградского и используя (28) и (27), находим

$$(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\, dQ + \int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ = \\ = \int\limits_Q u(\tau,x)\, \frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ - \int\limits_P u(t,x)\, \frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}\, dP + \int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ. \tag{30}$$

Преобразуя первое слагаемое в (30) аналогично предыдущему, получим

$$2\int\limits_Q u(\tau,x)\, \frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ = 2\int\limits_Q b(\tau)\, \frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\, \frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ = \\ = \int\limits_P b(t)\left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}\right]^2 dP - \int\limits_P b(0)\left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}\right]^2 dP - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big]^2 dQ. \tag{31}$$

Так как $u(\tau,x) = b(\tau)\, \dfrac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}$, то интегрируя по частям третье слагаемое в правой части (30), находим

$$\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ = -\int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\, dP - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\, v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ. \tag{32}$$

Подставляя выражения (31) и (32) в (30), имеем

$$(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = -\frac{1}{2}\int\limits_P b(t)\left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}\right]^2 dP - \frac{1}{2}\int\limits_P b(0)\left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}\right]^2 dP - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\, dP - \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big]^2 dQ - \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\, v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ$$

и, так как $b(\tau) = -2(t+\tau)$ и $b(0) = -2t$, $b(t) = -4t$, $\dfrac{db(\tau)}{d\tau} = -2$, $b^{-1}(\tau) = -\dfrac{1}{2(t+\tau)}$, то

$$(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{M}u, v)_{0Q} = 2t\int\limits_P \left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}\right]^2 dP + t\int\limits_P \left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}\right]^2 dP + \\ + t\int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\, dP + \int\limits_Q \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big]^2 dQ + \int\limits_Q v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ.$$

Учитывая, что $t > 0$, $\displaystyle\int\limits_P \left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}\right]^2 dP \geqslant 0$, $\displaystyle\int\limits_P \left[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}\right]^2 dP = 0$, а также положительную определенность оператора $\mathcal{B}$: $\displaystyle\int\limits_P v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\, dP \geqslant c\,\|v(0,x)\|^2_{0P} \geqslant 0$, получаем

$$(\mathcal{M}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{M}u, v)_{0Q} \geqslant \int\limits_Q \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big]^2 dQ + \int\limits_Q v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ \geqslant c\,\|\,v\,\|^2_{1tQ} = c\,\|\mathcal{J}u\|^2_{1tQ},$$

т.е.

$$(\mathcal{M}u,\mathcal{J}u)_{0Q}\geqslant c\,\|\mathcal{J}u\|^2_{1tQ}. \tag{33}$$

По определению негативной нормы из (33) находим, что

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ}=\sup_{\mathcal{J}u\neq 0}\frac{\left|(\mathcal{M}u,\mathcal{J}u)_{0Q}\right|}{\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}}\geqslant c\,\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}.$$

Используя определение нормы в пространстве $W^1_{2t}(Q)$ и явный вид оператора $\mathcal{J}$, имеем

$$\|\mathcal{J}u\|^2_{1tQ}\geqslant\int\limits_Q\frac{1}{4(t+\tau)^2}\,u^2(\tau,x)\,dQ\geqslant c\,\|\,u\,\|^2_{0Q},$$

где $c$ — некоторая положительная константа, независящая от $u$. Этим доказано неравенство

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ}\geqslant c\,\|\,u\,\|_{0Q}.$$

Установим справедливость неравенства

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ}\leqslant c\,\|\,u\,\|_{10Q}. \tag{34}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{M}u,v)_{0Q}$ на элементах $u\in D(\mathcal{M})$ и $v\in W^1_{2t}(Q)$. Интегрируя по частям и применяя неравенство Остроградского, находим

$$(\mathcal{M}u,v)_{0Q}=\int\limits_Q\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau^2}\,v(\tau,x)\,dQ+\int\limits_Q v(\tau,x)\mathcal{B}u(\tau,x)\,dQ=-\int\limits_Q\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ+$$
$$+\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_i}\,dQ+\int\limits_{\Gamma_2}\frac{a(x)}{\alpha(x)}\,\beta(x)u(\tau,x)v(\tau,x)\,d\Gamma+\int\limits_Q a_0(x)u(\tau,x)v(\tau,x)\,dQ.$$

Введем функцию $\widehat{a}_0(x)=\widetilde{a}_0(x)+a_0(x)$, где $\widetilde{a}(x)=\begin{cases}\dfrac{a(x)\beta(x)}{\alpha(x)}, & x\in\Gamma_2;\\ 0, & x\notin\Gamma_2.\end{cases}$ Тогда

$$(\mathcal{M}u,v)_{0Q}=-\int\limits_Q\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ+\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x_j}\,\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_i}\,dQ+\int\limits_Q\widehat{a}_0(x)u(\tau,x)v(\tau,x)\,dQ.$$

Далее, по определению негативной нормы и учитывая свойства функций $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$ и $\widetilde{a}_0(x)$, получаем

$$\|\mathcal{M}u\|_{-1tQ}=\sup_{v\neq 0}\frac{\left|(\mathcal{M}u,v)_{0Q}\right|}{\|\,v\,\|_{1tQ}}\leqslant c\,\sup_{v\neq 0}\frac{\left|(u,v)_{1Q}\right|}{\|\,v\,\|_{1tQ}}\leqslant c\,\sup_{v\neq 0}\frac{\|\,u\,\|_{10Q}\|\,v\,\|_{1tQ}}{\|\,v\,\|_{1tQ}}\leqslant c\,\|\,u\,\|_{10Q}.$$

Аналогично доказываются неравенства для сопряженного оператора

$$\|\mathcal{M}^*v\|_{-10Q}\geqslant c\,\|\,v\,\|_{0Q},\quad \|\mathcal{M}^*v\|_{-10Q}\leqslant c\,\|\,v\,\|_{1tQ}.$$

Далее рассмотрим вопрос о разрешимости пары задач:

$$\mathcal{M}u=f,\quad f\in L_2,\quad u\in W^1_{20}(Q), \tag{35}$$

$$\mathcal{M}^*v=g,\quad g\in L_2,\quad v\in W^1_{2t}(Q), \tag{36}$$

где $u,v$ — искомые, а $f,g$ — заданные функции.

**Определение 5.** *Обобщенным решением задачи* (35) *называется такая функция* $u\in W^1_{20}(Q)$ , *что интегральное тождество*

$$\int\limits_Q\Big[-\frac{\partial v}{\partial\tau}\,\frac{\partial u}{\partial\tau}+\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial(va_{ij})}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,+v\widehat{a}_0u\Big]\,dQ=\int\limits_Q vf\,dQ$$

*выполняется для любой гладкой функции* $v \in W^1_{2t}(Q)$ *и* $\widehat{a}_0(x) = \widetilde{a}_0(x) + a_0(x)$.

Очевидно, что если обобщенное решение из $W^1_{20}(Q)$ имеет обобщенные производные до второго порядка включительно, то оно является решением уравнения (35) почти всюду в $Q$.

**Определение 6.** *Обобщенным решением задачи* (35) *называется такая функция* $u \in W^1_{2t}(Q)$, *для которой существует последовательность гладких функций* $\{u_i\}$, $i \to \infty$, *удовлетворяющих граничным условиям* (27), *и имеет место соотношение*

$$\|\mathcal{M}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0, \quad \|u_i - u\|_{10Q} \to 0, \quad i \to \infty.$$

**Теорема 5.** *Определения* 5 *и* 6 *для задачи* (35) *эквивалентны.*

**Доказательство.** Действительно, если существует обобщенное решение в смысле определения 6, то, полагая $\mathcal{M}u_i \equiv f_i$, имеем

$$\lim_{i\to\infty}\big[(v, \mathcal{M}u_i) - (v, f_i)\big] = (v, \mathcal{M}u)_0 - (v, f) = 0.$$

Интегрируя по частям, применяя формулу Остроградского в левой части равенства $(v, \mathcal{L}u)_0 = (v, f)$ и учитывая свойства функций $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$ и $\widetilde{a}_0(x)$, получим, что обобщенное решение в смысле определения 6 есть обобщенное решение в смысле определения 5.

Покажем теперь, что обобщенное решение в смысле определения 5 есть обобщенное решение в смысле определения 6. Действительно, из равенства в определении 5, "перебрасывая" одно дифференцирование на $v$, получим

$$(v, f) = (u, \mathcal{M}^* v). \tag{37}$$

Множество гладких в $Q$ функций, удовлетворяющих условию (27), плотно в пространстве $W^1_{20}(Q)$, поэтому найдется последовательность гладких функций $u_i$, удовлетворяющих условию (27) в обычном смысле, такая, что $\|u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$. В силу неравенства (34) получаем, что $\mathcal{M}u_i \equiv f_i$ сходится при $i \to \infty$ по норме $W^{-1}_{2t}(Q)$ к некоторому элементу $\widehat{f} \in W^{-1}_{2t}(Q)$. Для последовательности $\{u_i\}$, такой, что $\|u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$, справедливо равенство $(v, f_i) = (u_i, \mathcal{L}^* v)$, вычитая которое из (37) получим $(v, f - f_i) = (u - u_i, \mathcal{L}^* v)$. Переходя к пределу при $i \to \infty$ имеем $(v, f - \widehat{f}) = 0$ для всех гладких $v \in W^1_{2t}(Q)$, а это означает, что $\|f - \widehat{f}\|_{-1tQ} = 0$. Эквивалентность определений 5 и 6 доказана.

**Теорема 6.** *Для любых функций* $f \in L_2(Q)$ *и* $g \in L_2(Q)$ *существуют единственные обобщенные решения задач* (35) *и* (36) *соответственно в пространствах* $W^1_{20}(Q)$ *и* $W^1_{2t}(Q)$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

**Определение 7.** *Обобщенным решением задачи* (35) *с правой частью* $f(\tau, x) \in W^{-1}_{2t}(Q)$ *будем называть такую функцию* $u(\tau, x) \in L_2(Q)$, *для которой существует последовательность гладких функций* $\big\{u_i(\tau, x)\big\}_{i=1}^{\infty}$, $u_i \in W^1_{20}(Q)$, *удовлетворяющих соотношениям* $\|\mathcal{M}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\|u_i - u\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

**Определение 8.** *Обобщенным решением задачи* (36) *с правой частью из* $W^{-1}_{20}(Q)$ *будем называть такую функцию* $v(\tau, x) \in L_2(Q)$, *для которой существует последовательность функций* $\big\{v_i(\tau, x)\big\}_{i=1}^{\infty}$, $v_i \in W^1_{2t}(Q)$, *удовлетворяющих соотношениям* $\|\mathcal{M}^* v_i - g\|_{-10Q} \to 0$, $\|v_i - v\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

**Теорема 7.** *Для любой функции* $f \in W^{-1}_{2t}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение в смысле определения* 7 *задачи* (35); *для любой* $g \in W^{-1}_{20}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение в смысле определения* 8 *задачи* (36).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Рассмотрим приближенный метод решения краевых задач (35) и (36). Приближенное решение задачи (35), когда правая часть $f \in L_2(Q)$, будем искать в виде

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau)\rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\big\{\rho_i(x)\big\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, удовлетворяющая условию (1), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 y_i(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{s=1}^{k} y_s(\tau)(\mathcal{B}\rho_s, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \\ &y_i(0) = 0, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad \frac{dy_i(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad i, j = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{38}$$

Это уравнение можно записать в матричной форме

$$\frac{d^2y(\tau)}{d\tau^2} = F_k y(\tau) + G_k(\tau), \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \tag{39}$$

где $y(\tau)$ и $G_k(\tau)$ — векторы-столбцы, $y(\tau) = \{y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_k(\tau)\}$,

$$G_k(\tau) = \{(f,\rho_1)_{0P}, (f,\rho_2)_{0P}, \dots, (f,\rho_k)_{0P}\}; \quad F_k = -\begin{bmatrix} (\mathcal{B}\rho_1,\rho_1)_{0P} \cdots (\mathcal{B}\rho_1,\rho_k)_{0P} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (\mathcal{B}\rho_k,\rho_1)_{0P} \cdots (\mathcal{B}\rho_k,\rho_k)_{0P} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что решение (38) понимается в обобщенном смысле [5, 7].

Верны следующие утверждения:

**Лемма 4.** *Для любой функции $f \in L_2(Q)$ справедливо неравенство $\| f \|_{0Q} \geqslant c \| u_k \|_{10Q}$.*

**Теорема 8.** *Пусть $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, для которых выполняется* (1), *а $y_i(\tau)$ — решение задачи* (39). *Тогда*

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau)\rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

*задает в смысле определения 7 решение задачи* (35), *т.е. выполняются соотношения*

$$||u_k - u||_{10Q} \to 0, \quad ||\mathcal{M}u_k - f||_{-1tQ} \to 0, \quad k \to \infty.$$

**Теорема 9.** *Пусть $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких функций в $L_2(P)$, причем $\rho_i(x) \in W_2^1(P)$ и $\rho_i(x)$ удовлетворяют* (1), *функция $f(\tau, x)$ принадлежит пространству $W_{2t}^{-1}(Q)$, $\{f_\varepsilon(\tau, x)\}_{\varepsilon>0}$ — последовательность осреднений функции $f(\tau, x)$, функция $y_{i\varepsilon}(\tau)$ — решение задачи*

$$\frac{d^2y_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{j=1}^{k} y_{j\varepsilon}(\tau)(\mathcal{B}\rho_j, \rho_i)_{0P} = (f_\varepsilon, \rho_i)_{0P}, \quad y_{i\varepsilon}(0) = 0, \quad \frac{dy_{i\varepsilon}}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

*Тогда справедливы соотношения $||u_{k\varepsilon} - u||_{0Q} \to 0$, $||\mathcal{M}u_{k\varepsilon} - f||_{-1tQ} \to 0$, $k \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, где $u_{k\varepsilon}(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} y_{i\varepsilon}(\tau)\rho_i(x)$, $||f_\varepsilon - f||_{-1tQ} \to 0$, $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство утверждений леммы 4, теорем 8 и 9 аналогично лемме 3, теорем 3 и 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
2. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Изд. Иностранной литературы, 1961.
3. *Диденко В.П.* О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением. ДАН СССР. 1972. **205**, № 4. 352–355.
4. *Диденко В.П.* О некоторых краевых задачах для многомерного уравнения смешанного типа. Дифференц. уравн. 1973. **9**, № 1. 43–51.
5. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Колос М.В., Колос И.В.* О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 68–78.
7. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
8. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
21.09.2004