УДК 518

КВАЗИЭРМИТОВЫ СПЛАЙНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. К. Демьянович[1]

Построены (вообще говоря, неполиномиальные) сплайны второго порядка эрмитова типа (называемые квазиэрмитовыми) на произвольной неравномерной сетке, получено продолжение системы функционалов, биортогональных к системе упомянутых сплайнов в определенных классах объемлющих пространств, установлены необходимые и достаточные условия непрерывности рассматриваемых сплайнов, даны прямые решения некоторых обобщенных эрмитовых интерполяционных задач. Построено предельное пространство квазиэрмитовых сплайнов в предельном переходе от пространств B-сплайнов при “склеивании” некоторых узлов сетки.
Работа частично поддержана грантами РФФИ 04-01-00692 и 04-01-00026.

Широко известны полиномиальные эрмитовы сплайны (см. [1 – 4]); иногда их называют сплайнами ненулевой высоты. На равномерной сетке их свойства удобно изучать с использованием преобразования Фурье (см., например, [2]). Однако на неравномерной сетке это преимущество пропадает и приходится прибегать к аппроксимационным соотношениям и вводить структуру расположения носителей сплайнов, фигурирующих в упомянутых соотношениях [4]. Для сплайнов лагражевого типа (т.е. для сплайнов нулевой высоты) на неравномерной сетке ранее (см. [5]) были рассмотрены свойства вложенности пространств таких сплайнов, построены системы функционалов, биортогональных к образующей системе этих сплайнов, найдены прямые решения интерполяционных задач в пространствах упомянутых сплайнов и, наконец, даны их вейвлетные разложения.

Цель данной работы — построить (не обязательно полиномиальные) сплайны второго порядка эрмитового типа (называемые здесь квазиэрмитовыми сплайнами), дать соответствующие биортогональные системы функционалов, получить решение некоторых обобщений эрмитовых интерполяционных задач в классе рассматриваемых сплайнов, вывести необходимые и достаточные условия непрерывности этих сплайнов, а также выделить одно из пространств квазиэрмитовых сплайнов предельным переходом от B-сплайнов (путем процесса “склеивания” некоторых узлов сетки).

В первом пункте вводятся некоторые обозначения и определения; в частности, определяются пространства квазиэрмитовых сплайнов. Во втором пункте строится продолжение системы функционалов, биортогональной к системе упомянутых сплайнов, на некоторые объемлющие пространства функций. Третий пункт посвящен конкретизации вариантов продолжений биортогональных систем для квадратичных сплайнов. Необходимые и достаточные условия непрерывности сплайнов рассмотрены в четвертом пункте. В пятом пункте производится предельный переход от B-сплайнов к квазиэрмитовым сплайнам и выделяются пространства квазиэрмитовых сплайнов, из которых можно создать телескопическую систему пространств при измельчении сетки; это позволяет стандартным образом получать вейвлетное разложение с использованием указанной биортогональной системы функционалов.

1. Некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{Z}$ — множество всех целых чисел, $3\mathcal{Z}$ — множество всех целых чисел вида $0, \pm 3, \pm 6, \ldots$, а $\mathcal{R}^3$ — пространство трехмерных вектор-столбцов с вещественными компонентами. Компоненты вектора обозначаются квадратными скобками, например, для $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3$ пишем $\mathbf{a} = \big([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, [\mathbf{a}]_2\big)^T$. Квадратную матрицу третьего порядка с трехкомпонентными вектор-столбцами $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ будем обозначать $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

На конечном или бесконечном интервале (α, β) вещественной оси $\mathcal{R}^1$ рассмотрим сетку

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathcal{Z}}, \quad X: \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1.1}$$

для которой

$$\lim_{j\to-\infty} x_j = \alpha, \quad \lim_{j\to+\infty} x_j = \beta. \tag{1.2}$$

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, механико-математический факультет, Университетская наб., 79, 199034, г. Санкт-Петербург; e-mail: Yuri.Demjanovich@paloma.spbu.ru

Дальше через $\mathcal{J}$ всегда обозначается целое число, которое делится на 3, т.е. считается, что $\mathcal{J} = 3j$, где $j \in \mathcal{Z}$ (или, что то же самое, $\mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$).

Объединение $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathcal{Z}}(x_j, x_{j+1})$ назовем *сеточным подразделением*. Введем обозначения

$$J_{\mathcal{J}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{J}-2, \mathcal{J}-1, \mathcal{J}\}, \quad J_{\mathcal{J}+1} = J_{\mathcal{J}+2} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{J}-1, \mathcal{J}, \mathcal{J}+1\},$$
$$S_{\mathcal{J}-2} \stackrel{\text{def}}{=} [x_{\mathcal{J}-2}, x_{\mathcal{J}+1}], \qquad S_{\mathcal{J}-1} = S_{\mathcal{J}} \stackrel{\text{def}}{=} [x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+3}], \quad \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}.$$

Рассмотрим $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$ — множество трехмерных вектор-столбцов $\mathbf{a}_j$ с вещественными компонентами. Пусть $A_j \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j\Big)$, $j \in \mathcal{Z}$.

Множество $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если

$$\det A_j \neq 0 \quad \forall j \in \mathcal{Z}. \tag{1.3}$$

Линейное пространство вещественнозначных функций $u(t)$, заданных на множестве M и имеющих ограниченную вариацию на каждом интервале (x_j, x_{j+1}), $j \in \mathcal{Z}$, обозначим через $\mathcal{V}_X$ и положим $\mathcal{V}_X^s \stackrel{\text{def}}{=} \big\{u \mid u^{(i)} \in \mathcal{V}_X,\ i = 0, 1, \ldots, s\big\}$. Пусть $C\langle c, d\rangle$ — линейное пространство, состоящее из функций u пространства $C(c, d)$, которые имеют конечные пределы $\lim\limits_{t\to c+0} u(t)$ и $\lim\limits_{t\to d-0} u(t)$. Введем также пространства $\mathcal{C}_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes\limits_{k\in\mathcal{Z}} C\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, $\mathcal{C}_X^s \stackrel{\text{def}}{=} \big\{u \mid u^{(i)} \in \mathcal{C}_X,\ \forall i = 0, 1, \ldots, s\big\}$. В дальнейшем (если нет специального указания) через $\mathcal{X}$ обозначается любое из пространств $\mathcal{V}_X^s$ и $\mathcal{C}_X^s$.

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$ с компонентами из $\mathcal{X}$. Пусть $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$ — полная цепочка векторов, а функции $\omega_j \in \mathcal{X}$, $j \in \mathcal{Z}$, удовлетворяют тождествам (называемым *аппроксимационными соотношениями* [4])

$$\sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\omega_{j'}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \quad \forall k \in \mathcal{Z}, \tag{1.4}$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \quad \forall t \notin S_j \cap M, \quad \forall j \in \mathcal{Z}. \tag{1.5}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1})$ соотношения (1.4) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду свойства (1.3) система (1.4) однозначно разрешима:

$$\omega_j(t) = \frac{\det\big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \,\|'^{j}\, \varphi(t)\big)}{\det\big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k}\big)} \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \quad \forall j \in J_k; \tag{1.6}$$

здесь символ $\|'^{j}$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\varphi(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов). Из соотношения (1.5) ясно, что $\operatorname{supp} \omega_j \subset S_j$.

Дадим более наглядную запись соотношений (1.4) – (1.6):

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}\omega_{\mathcal{J}-2}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}\omega_{\mathcal{J}-1}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}}\omega_{\mathcal{J}}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}),$$
$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}\omega_{\mathcal{J}-1}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}}\omega_{\mathcal{J}}(t) + \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}\omega_{\mathcal{J}+1}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z},$$

$$\omega_j(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in M\backslash S_j,\ \forall j \in \mathcal{Z},$$

$$\omega_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}}\big)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} \quad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \tag{1.7}$$

$$\omega_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{\det\big(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}\big)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \tag{1.8}$$

$$\omega_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t)\big)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} \quad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \tag{1.9}$$

$$\omega_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}\big)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}). \tag{1.10}$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{\det\big(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi(t)\big)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \tag{1.11}$$

$$\omega_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{\det\big(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3}\big)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}). \tag{1.12}$$

Замечание 1. Узлы сетки X с индексами $\mathcal{J}$ из множества $3\mathcal{Z}$ не участвуют в определении функций ω_j и не потребуются в следующих пунктах 2–4; однако эти узлы используются в п. 5 в процессе "склеивания" узлов. Заметим также, что в дальнейшем используются ряды вида $\sum\limits_{j\in\mathcal{Z}} c_j\omega_j(t)$, где c_j — произвольные вещественные числа; эти ряды сходятся (поточечно): при каждом фиксированном $t \in M$ в таком ряде имеется не более трех ненулевых слагаемых.

Введем множество $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{S_j \mid j \in \mathcal{Z}\}$ и рассмотрим линейное пространство

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_{(\mathbf{A},\varphi,\mathcal{S})}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\omega_j(t) \quad \forall t \in M, \quad \forall c_j \in \mathcal{R}^1\Big\}.$$

Очевидно, что $\widetilde{X} \subset \mathcal{X}$. Элементы пространства $\widetilde{X}$ будем здесь называть *квазиэрмитовыми сплайнами второго порядка*. Функции ω_j, $j \in \mathcal{Z}$, называются *образующими пространства* $\widetilde{X}$.

2. Построение биортогональной системы. Дальше рассматриваются линейные функционалы из пространства $\mathcal{X}^*$. Будем говорить, что носитель функционала $f \in \mathcal{X}^*$ содержится в отрезке $[a,b]$, если его значения $\langle f, u\rangle$ на функциях $u \in \mathcal{X}$ определяются лишь значениями функции u на интервале (a,b) и $\big\langle f, (1-\chi_{(a,b)})u\big\rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{X}$, где $\chi_{(a,b)}$ — характеристическая функция интервала (a,b).

Вводя вектор-функцию $\Omega_{(k)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\omega_{k-2}(t), \omega_{k-1}(t), \omega_k(t)\big)^T$ $\forall k \in \mathcal{Z}$ и фиксируя $k \in \mathcal{Z}$, перепишем систему (1.4) в виде

$$A_k\Omega_{(k)}(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}). \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Пусть компонентами вектора* $\mathbf{f}^{(k)}$, $\mathbf{f}^{(k)} = \big(f^{(k)}_{\langle 0\rangle}, f^{(k)}_{\langle 1\rangle}, f^{(k)}_{\langle 2\rangle}\big)^T$, *являются функционалы* $f^{(k)}_{\langle i\rangle}$ *со свойствами*

а) *биортогональности к системе функций* $[\varphi]_0(t)$, $[\varphi]_1(t)$, $[\varphi]_2(t)$:

$$\big\langle f^{(k)}_{\langle i\rangle}, [\varphi]_j\big\rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i,j \in \{0,1,2\} \quad \forall k \in \mathcal{Z}, \tag{2.2}$$

б) *локализации носителя в промежутке* $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\operatorname{supp} f^{(k)}_{\langle i\rangle} \subset [x_k, x_{k+1}] \quad \forall k \in \mathcal{Z}.$$

Тогда при каждом $k \in \mathcal{Z}$ *система функционалов* $\{g^{(k)}_{\langle i\rangle}\}_{i\in\{0,1,2\}}$, $g^{(k)}_{\langle i\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \big[A_k^T\mathbf{f}^{(k)}\big]_i$

А) *биортогональна к системе функций* $\{\omega_{k-2}(t),\ \omega_{k-1}(t),\ \omega_k(t)\}$:

$$\langle g^{(k)}_{\langle i\rangle}, \omega_{k-2+j}\rangle = \delta_{i,j}, \tag{2.3}$$

Б) *локализована в промежутке* $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\operatorname{supp} g^{(k)}_{\langle i\rangle} \subset [x_k, x_{k+1}] \quad \forall k \in \mathcal{Z}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Для доказательства формулы (2.3) заметим, что свойство (2.2) можно записать в виде

$$\mathbf{f}^{(k)}\varphi^T = I, \tag{2.5}$$

где I — единичная матрица третьего порядка. Теперь, обозначая $\mathbf{g}^{(k)} = (g^{(k)}_{\langle 0\rangle}, g^{(k)}_{\langle 1\rangle}, g^{(k)}_{\langle 2\rangle})^T \quad \forall k \in \mathcal{Z}$ и используя соотношение (2.1), имеем $\mathbf{g}^{(k)}\Omega^T_{(k)} = A_k^T\mathbf{f}^{(k)}(A_k^{-1}\varphi)^T$, откуда ввиду (2.5) получаем $\mathbf{g}^{(k)}\Omega^T_{(k)} = I$. Последнее эквивалентно формулам (2.3).

Соотношение (2.4) очевидно. ∎

Замечание 2. При $k = \mathcal{J}+1$ и при $k' = \mathcal{J}+2$ ($\mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$) матрицы A_k и $A_{k'}$ совпадают, так что теорема 1 остается справедливой, если при этом k в качестве области локализации в пунктах б) и Б) вместо промежутка $[x_k, x_{k+1}]$ взять промежуток $[x_k, x_{k+2}]$.

Теорема 2. *Пусть функционалы* $g^{(k)}_{\langle i\rangle}$, $i \in \{0,1,2\}$, *удовлетворяют условиям* (2.3)–(2.4) *при любых* $k \in \mathcal{Z}$. *Тогда система функционалов* $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$, *определяемая соотношениями*

$$\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2} \stackrel{\text{def}}{=} g^{(\mathcal{J})}_{\langle 0\rangle}, \quad \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1} \stackrel{\text{def}}{=} g^{(\mathcal{J}+1)}_{\langle 0\rangle}, \quad \widehat{\omega}_{\mathcal{J}} \stackrel{\text{def}}{=} g^{(\mathcal{J}+1)}_{\langle 1\rangle}, \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z},$$

биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$: $\langle \widehat{\omega}_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}$.

Доказательство. Доказательство разобьем на несколько частей.

1. Сначала определим значения функционала $\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2}$ на функциях $\omega_{j'}$, $\mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$, $j' \in \mathcal{Z}$. Согласно теореме 1 имеем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{\mathcal{J}-2}\rangle = 1, \quad \langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{\mathcal{J}-1}\rangle = 0, \quad \langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{\mathcal{J}}\rangle = 0. \tag{2.6}$$

По определению $\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2} = g^{(\mathcal{J})}_{\langle 0\rangle}$ и потому $\operatorname{supp} \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2} = \operatorname{supp} g^{(\mathcal{J})}_{\langle 0\rangle} \subset [x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}]$, так что при выполнении условия

$$(x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}) \cap \operatorname{supp} \omega_{j'} = \emptyset \tag{2.7}$$

значение функционала $\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2}$ на функции $\omega_{j'}$ равно нулю:

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{j'}\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Ввиду формул (2.6) в этом пункте нам осталось доказать соотношение (2.8) в двух случаях: для $j' \leqslant \mathcal{J}-3$ и для $j' \geqslant \mathcal{J}+1$. В первом случае возьмем сначала $j' = \mathcal{J}-3$; тогда согласно (1.9)–(1.10)

$$\operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{j'}, x_{j'+3}] = [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}],$$

откуда ясно, что (2.7) выполнено и для этого j' соотношение (2.8) установлено. Если взять $j' = \mathcal{J}-4$, то в соответствии с формулами (1.7)–(1.8) опять-таки $\operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}]$ и снова приходим к (2.8). Запишем последнее рассуждение кратко в символьном виде:

$$j' = \mathcal{J}-4 \quad \stackrel{(1.7)-(1.8)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \quad \Longrightarrow (2.8).$$

Для $j' = \mathcal{J}-5$ следует воспользоваться формулами (1.11)–(1.12), откуда $\operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-5}, x_{\mathcal{J}-2}]$, и опять получаем (2.8), что можно кратко записать в символьном виде

$$j' = \mathcal{J}-5 \quad \stackrel{(1.11)-(1.12)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-5}, x_{\mathcal{J}-2}] \quad \Longrightarrow (2.8).$$

Ясно, что с уменьшением номера j' носитель функции $\omega_{j'}$ отодвигается налево (в сторону уменьшения чисел на числовой оси), и потому для остальных значений $j' \leqslant \mathcal{J}-3$ соотношение (2.7), а с ним и (2.8) подавно выполнены. Итак, при $j' \leqslant \mathcal{J}-3$ соотношение (2.8) установлено.

Рассмотрим случай, когда $j' \geqslant \mathcal{J}+1$. Для $j' = \mathcal{J}+1$, $\mathcal{J}+2$, $\mathcal{J}+3$ доказательство соотношения (2.8) в символьном виде выглядит следующим образом:

$$j' = \mathcal{J}+1 \quad \stackrel{(1.11)-(1.12)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+4}] \quad \Longrightarrow (2.8),$$

$$j' = \mathcal{J}+2 \quad \stackrel{(1.7)-(1.8)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \quad \Longrightarrow (2.8),$$

$$j' = \mathcal{J}+3 \quad \stackrel{(1.9)-(1.10)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \quad \Longrightarrow (2.8).$$

Поскольку с увеличением номера j' носитель функции $\omega_{j'}$ отодвигается направо (в сторону увеличения чисел на числовой оси), то для остальных значений $j' \geqslant \mathcal{J}+1$ соотношение (2.7), а с ним и (2.8) тоже выполнены. Таким образом, при всех $j' \leqslant \mathcal{J}-3$ и при всех $j' \geqslant \mathcal{J}+1$ соотношение (2.8) установлено. С учетом формул (2.6) получаем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2}, \omega_{j'}\rangle = \delta_{\mathcal{J}-2,j'}. \tag{2.9}$$

2. Теперь найдем значения функционала $\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1}$ на функциях $\omega_{j'}$, $\mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$, $j' \in \mathcal{Z}$. В соответствии с теоремой 1 имеем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{\mathcal{J}-1}\rangle = 1, \quad \langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{\mathcal{J}}\rangle = 0, \quad \langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{\mathcal{J}+1}\rangle = 0. \tag{2.10}$$

Из определения функционала $\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1}$ получаем $\operatorname{supp} \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1} = \operatorname{supp} g^{(\mathcal{J}+1)}_{\langle 0\rangle} \subset [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}]$, так что при выполнении условия

$$(x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}) \cap \operatorname{supp} \omega_{j'} = \emptyset \tag{2.11}$$

имеем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{j'} \rangle = 0. \tag{2.12}$$

Ввиду формул (2.10) в этом пункте важно установить соотношение (2.12) в двух случаях: для $j' \leqslant \mathcal{J} - 2$ и для $j' \geqslant \mathcal{J} + 2$. В первом случае возьмем сначала $j' = \mathcal{J} - 2$, $j' = \mathcal{J} - 3$, $j' = \mathcal{J} - 4$; имеем:

$$\begin{aligned}
j' &= \mathcal{J} - 2 \quad \overset{(1.11)-(1.12)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-2}, x_{\mathcal{J}+1}] \quad \Longrightarrow (2.11) \quad \Longrightarrow (2.12),\\
j' &= \mathcal{J} - 3 \quad \overset{(1.9)-(1.10)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \quad \Longrightarrow (2.11) \quad \Longrightarrow (2.12),\\
j' &= \mathcal{J} - 4 \quad \overset{(1.7)-(1.8)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \quad \Longrightarrow (2.11) \quad \Longrightarrow (2.12).
\end{aligned}$$

Для остальных $j' \leqslant \mathcal{J} - 2$ соотношение (2.12) очевидно.

Во втором случае $j' \geqslant \mathcal{J} + 2$; опять-таки для $j' = \mathcal{J} + 2$, $j' = \mathcal{J} + 3$ соответственно получаем

$$\begin{aligned}
j' &= \mathcal{J} + 2 \quad \overset{(1.7)-(1.8)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \quad \Longrightarrow (2.11) \quad \Longrightarrow (2.12),\\
j' &= \mathcal{J} + 3 \quad \overset{(1.9)-(1.10)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \quad \Longrightarrow (2.11) \quad \Longrightarrow (2.12),
\end{aligned}$$

а для остальных $j' \geqslant \mathcal{J} + 2$ соотношение (2.12) очевидно. С учетом формул (2.10) получаем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1}, \omega_{j'} \rangle = \delta_{\mathcal{J}-1, j'}. \tag{2.13}$$

3. Случай функционала $\widehat{\omega}_{\mathcal{J}}$ рассматривается аналогично предыдущему. Используя теорему 1, имеем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{\mathcal{J}-1} \rangle = 0, \quad \langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{\mathcal{J}} \rangle = 1, \quad \langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{\mathcal{J}+1} \rangle = 0. \tag{2.14}$$

Поскольку $\operatorname{supp}\ \widehat{\omega}_{\mathcal{J}} = \operatorname{supp}\ g^{(\mathcal{J}+1)}_{\langle 1 \rangle} \subset [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}]$, то при выполнении условия

$$(x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+2}) \cap \operatorname{supp} \omega_{j'} = \emptyset \tag{2.15}$$

имеем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{j'} \rangle = 0. \tag{2.16}$$

Ввиду формул (2.14) достаточно установить соотношение (2.16) в двух случаях: для $j' \leqslant \mathcal{J} - 2$ и для $j' \geqslant \mathcal{J} + 2$. В первом случае рассмотрим $j' = \mathcal{J} - 2$, $j' = \mathcal{J} - 3$, $j' = \mathcal{J} - 4$; получаем соответственно:

$$\begin{aligned}
j' &= \mathcal{J} - 2 \quad \overset{(1.11)-(1.12)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-2}, x_{\mathcal{J}+1}] \quad \Longrightarrow (2.15) \quad \Longrightarrow (2.16),\\
j' &= \mathcal{J} - 3 \quad \overset{(1.9)-(1.10)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \quad \Longrightarrow (2.15) \quad \Longrightarrow (2.16),\\
j' &= \mathcal{J} - 4 \quad \overset{(1.7)-(1.8)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}-3}, x_{\mathcal{J}}] \quad \Longrightarrow (2.15) \quad \Longrightarrow (2.16).
\end{aligned}$$

Для остальных $j' \leqslant \mathcal{J} - 2$ соотношение (2.16) еще более очевидно.

Во втором случае $j' \geqslant \mathcal{J} + 2$; опять-таки для $j' = \mathcal{J} + 2$, $j' = \mathcal{J} + 3$ соответственно получаем

$$\begin{aligned}
j' &= \mathcal{J} + 2 \quad \overset{(1.7)-(1.8)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \quad \Longrightarrow (2.15) \quad \Longrightarrow (2.16),\\
j' &= \mathcal{J} + 3 \quad \overset{(1.9)-(1.10)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{supp}\ \omega_{j'} \subset [x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+6}] \quad \Longrightarrow (2.15) \quad \Longrightarrow (2.16),
\end{aligned}$$

а для остальных $j' \geqslant \mathcal{J} + 2$ соотношение (2.15) совершенно очевидно. С учетом формул (2.14) получаем

$$\langle \widehat{\omega}_{\mathcal{J}}, \omega_{j'} \rangle = \delta_{\mathcal{J}, j'}. \tag{2.17}$$

Поскольку $\mathcal{J}$ — произвольный элемент множества $3\mathcal{J}$, то из (2.9), (2.13) и (2.17) следует соотношение $\langle \widehat{\omega}_j, \omega_{j'} \rangle = \delta_{j,j'}$ $\forall j,\ j' \in \mathcal{Z}$. Теорема полностью доказана. ■

3. Биортогональные системы для квадратичных сплайнов. В случае, когда вектор-функция имеет вид $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, формулы (1.7) – (1.12) дают квадратичные сплайны.

Возьмем в качестве исходного пространства функций пространство $\mathcal{X} = \mathcal{C}^2_X$, а в качестве продолжения системы функционалов, биортогональной к функциям $[\varphi]_0(t) = 1$, $[\varphi]_1(t) = t$, $[\varphi]_2(t) = t^2$, возьмем систему функционалов, определяемых формулами

$$\langle f^{(k)}_{\langle 0 \rangle}, u \rangle \overset{\text{def}}{=} u(\xi_k) - \xi_k u'(\xi_k) + \frac{1}{2}\,\xi_k^2 u''(\xi_k), \quad \langle f^{(k)}_{\langle 1 \rangle}, u \rangle \overset{\text{def}}{=} u'(\xi_k) - \xi_k u''(\xi_k), \quad \langle f^{(k)}_{\langle 2 \rangle}, u \rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\xi_k^2 u''(\xi_k),$$

где ξ_k — некоторая точка интервала (α,β), выбираемая так, чтобы

$$\xi_{\mathcal{J}} \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \quad \xi_{\mathcal{J}+1}, \xi_{\mathcal{J}+2} \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \quad \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}. \tag{3.1}$$

Полагая $\mathbf{f}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(k)}_{\langle 0\rangle}, f^{(k)}_{\langle 1\rangle}, f^{(k)}_{\langle 2\rangle})^T$, в соответствии с теоремой 1 получаем систему функционалов

$$\{g^{(k)}_{\langle i\rangle}\}_{i=0,1,2}, \quad g^{(k)}_{\langle i\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} [A_k^T \mathbf{f}^{(k)}]_i,$$

биортогональную функциям ω_{k-2}, ω_{k-1}, ω_k. В данной ситуации удобно рассмотреть отдельно случай $k=\mathcal{J}$ и случаи $k=\mathcal{J}+1, \mathcal{J}+2$, (при $\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}$), ибо в последних двух случаях $A_{\mathcal{J}+1} = A_{\mathcal{J}+2}$ и области локализации функционалов $f^{(\mathcal{J}+1)}_{\langle i\rangle}$ и $f^{(\mathcal{J}+2)}_{\langle i\rangle}$, $i=0,1,2$, совпадают (см. формулы (3.1)).

Итак, обозначая $\mathbf{g}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (g^{(k)}_{\langle 0\rangle}, g^{(k)}_{\langle 1\rangle}, g^{(k)}_{\langle 2\rangle})^T$, имеем

$$\mathbf{g}^{(\mathcal{J})} = A^T_{\mathcal{J}}\mathbf{f}^{(\mathcal{J})} = \left.\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}\right|_{t=\xi_{\mathcal{J}}},$$

$$\mathbf{g}^{(\mathcal{J}+1)} = A^T_{\mathcal{J}+1}\mathbf{f}^{(\mathcal{J}+1)} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}\right|_{t=\xi_{\mathcal{J}+1}},$$

$$\mathbf{g}^{(\mathcal{J}+2)} = A^T_{\mathcal{J}+2}\mathbf{f}^{(\mathcal{J}+2)} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \\ [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0)\,\dfrac{d}{dt} + \dfrac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}]_2)\,\dfrac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}\right|_{t=\xi_{\mathcal{J}+2}}.$$

Пользуясь теоремой 2, найдем в пространстве $(\mathcal{C}^2_X)^*$ систему функционалов $\{\widehat{\omega}_j\}_{j\in\mathcal{Z}}$, биортогональную системе сплайнов $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathcal{Z}}$: при $\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}$

$$\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-2} = \left.\Big([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 - \xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0)\,\frac{d}{dt} + \frac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_2)\,\frac{d^2}{dt^2}\Big)\right|_{t=\xi_{\mathcal{J}}}, \tag{3.2}$$

$$\widehat{\omega}_{\mathcal{J}-1} = \left.\Big([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0)\,\frac{d}{dt} + \frac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+1}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2)\,\frac{d^2}{dt^2}\Big)\right|_{t=\xi_{\mathcal{J}+1}}, \tag{3.3}$$

$$\widehat{\omega}_{\mathcal{J}} \;\;= \left.\Big([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 + ([\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 - \xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0)\,\frac{d}{dt} + \frac12\,(\xi^2_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 - 2\xi_{\mathcal{J}+2}[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 + [\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2)\,\frac{d^2}{dt^2}\Big)\right|_{t=\xi_{\mathcal{J}+2}}. \tag{3.4}$$

Пример 1 (“квазиэрмитова” система функционалов). В формулах (3.2) – (3.4) выберем векторы $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}$, специальным образом: $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_0 = 1$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_1 = \xi_{\mathcal{J}}$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}]_2 = \xi^2_{\mathcal{J}}$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_0 = 1$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_1 = \xi_{\mathcal{J}+1}$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}]_2 = \xi^2_{\mathcal{J}+1}$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_0 = 0$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_1 = 1$, $[\mathbf{a}_{\mathcal{J}}]_2 = 2\,\xi_{\mathcal{J}+2}$; получаемые в результате функционалы и сплайны будем обозначать верхним индексом “единица”: $\widehat{\omega}^1_j$, $\omega^1_{j'}$, так что $\langle\widehat{\omega}^1_j, \omega^1_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}$. При таком выборе упомянутых векторов имеем

$$\langle\widehat{\omega}^1_{\mathcal{J}-2}, u\rangle = u(\xi_{\mathcal{J}}), \quad \langle\widehat{\omega}^1_{\mathcal{J}-1}, u\rangle = u(\xi_{\mathcal{J}+1}), \quad \langle\widehat{\omega}^1_{\mathcal{J}}, u\rangle = \frac{du}{dt}\,(\xi_{\mathcal{J}+2}), \tag{3.5}$$

что соответствует определенному обобщению функционалов, участвующих в задаче Эрмита. При этом формулы (1.7) – (1.12) могут быть записаны в виде

$$\omega^1_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{(t-\xi_{\mathcal{J}})(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}} - t)}{(\xi_{\mathcal{J}+1} - \xi_{\mathcal{J}})(2\xi_{\mathcal{J}+2} - \xi_{\mathcal{J}} - \xi_{\mathcal{J}+1})} \qquad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \tag{3.6}$$

$$\omega^1_{\mathcal{J}-1}(t)=\frac{(\xi_{\mathcal{J}+3}-t)(t+\xi_{\mathcal{J}+3}-2\xi_{\mathcal{J}+2})}{(\xi_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+1})(\xi_{\mathcal{J}+1}+\xi_{\mathcal{J}+3}-2\xi_{\mathcal{J}+2})} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}), \tag{3.7}$$

$$\omega^1_{\mathcal{J}}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}})(t-\xi_{\mathcal{J}+1})}{(2\xi_{\mathcal{J}+2}-\xi_{\mathcal{J}}-\xi_{\mathcal{J}+1})} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}},x_{\mathcal{J}+1}), \tag{3.8}$$

$$\omega^1_{\mathcal{J}}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}+1})(t-\xi_{\mathcal{J}+3})}{(2\xi_{\mathcal{J}+2}-\xi_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}), \tag{3.9}$$

$$\omega^1_{\mathcal{J}+1}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}+1})(2\xi_{\mathcal{J}+2}-\xi_{\mathcal{J}+1}-t)}{(\xi_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+1})(2\xi_{\mathcal{J}+2}-\xi_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}+3})} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}), \tag{3.10}$$

$$\omega^1_{\mathcal{J}+1}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}+4})(2\xi_{\mathcal{J}+5}-\xi_{\mathcal{J}+4}-t)}{(\xi_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+4})(2\xi_{\mathcal{J}+5}-\xi_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+4})} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+3},x_{\mathcal{J}+4}). \tag{3.11}$$

Пространство $\widetilde{X}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}^1(t)=\sum\limits_{j\in\mathcal{Z}} c_j\omega^1_j(t)\ \forall t\in M,\ \forall c_j\in\mathcal{R}^1\right\}$ лежит в пространстве $\mathcal{C}^1$, а функция $\widetilde{u}^1\in\widetilde{X}^1$, $\widetilde{u}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j\in\mathcal{Z}} v_j\omega^1_j(t)$, представляет собой решение интерполяционной задачи вида

$$u(\xi_{\mathcal{J}})=v_{\mathcal{J}},\quad u(\xi_{\mathcal{J}+1})=v_{\mathcal{J}+1},\quad \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+2})=v_{\mathcal{J}+2},\quad u\in\mathcal{C}^1,$$

где v_j — заданные числа ($j\in\mathcal{Z}$).

Пример 2. Учитывая соотношения (3.1), положим $\xi_{\mathcal{J}+1}=\xi_{\mathcal{J}+2}$ для упрощения формул (3.5) – (3.11). Получаемые в результате функционалы и функции снабдим верхним индексом 2:

$$\langle\widehat{\omega}^2_{\mathcal{J}-2},u\rangle=u(\xi_{\mathcal{J}}),\quad \langle\widehat{\omega}^2_{\mathcal{J}-1},u\rangle=u(\xi_{\mathcal{J}+1}),\quad \langle\widehat{\omega}^2_{\mathcal{J}},u\rangle=\frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+1}),$$

$$\omega^2_{\mathcal{J}-1}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}})(2\xi_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}}-t)}{(\xi_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}})^2} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}},x_{\mathcal{J}+1}), \tag{3.12}$$

$$\omega^2_{\mathcal{J}-1}(t)=\frac{(\xi_{\mathcal{J}+3}-t)(t+\xi_{\mathcal{J}+3}-2\xi_{\mathcal{J}+1})}{(\xi_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+1})^2} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}), \tag{3.13}$$

$$\omega^2_{\mathcal{J}}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}})(t-\xi_{\mathcal{J}+1})}{\xi_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}}} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}},x_{\mathcal{J}+1}), \tag{3.14}$$

$$\omega^2_{\mathcal{J}}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}+1})(t-\xi_{\mathcal{J}+3})}{\xi_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}+3}} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}), \tag{3.15}$$

$$\omega^2_{\mathcal{J}+1}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}+1})^2}{(\xi_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+1})^2} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}), \tag{3.16}$$

$$\omega^2_{\mathcal{J}+1}(t)=\frac{(t-\xi_{\mathcal{J}+4})^2}{(\xi_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+4})^2} \quad \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+3},x_{\mathcal{J}+4}). \tag{3.17}$$

Функции ω^2_j, $j\in\mathcal{Z}$, непрерывны на промежутке (α,β), а их производные, вообще говоря, имеют разрывы первого рода в узлах, лежащих в носителе (отметим, что функции $\omega^2_{\mathcal{J}+1}$ непрерывно дифференцируемы в узлах $x_{\mathcal{J}+1}$ $x_{\mathcal{J}+4}$, $\forall\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}$). Пространство $\widetilde{X}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}^2(t)=\sum\limits_{j\in\mathcal{Z}} c_j\omega^2_j(t)\ \forall t\in M,\ \forall c_j\in\mathcal{R}^1\right\}$ содержится в пространстве $\mathcal{C}^1_X\cap C(\alpha,\beta)$, а функция $\widetilde{u}^2(t)\in\widetilde{X}^2$, $\widetilde{u}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j\in\mathcal{Z}} v_j\omega^2_j(t)$, является решением интерполяционной задачи вида

$$u(\xi_{\mathcal{J}})=v_{\mathcal{J}},\quad u(\xi_{\mathcal{J}+1})=v_{\mathcal{J}+1},\quad \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+1})=v_{\mathcal{J}+2},\quad u\in\mathcal{C}^1_X\cap C(\alpha,\beta), \tag{3.18}$$

представляющей собой один из вариантов задачи Эрмита.

Пример 3. Если в предыдущем примере перейти к пределу при

$$\xi_{\mathcal{J}}\to x_{\mathcal{J}}+0,\quad \xi_{\mathcal{J}+1}\to x_{\mathcal{J}+1}+0\quad \forall\mathcal{J}\in\mathcal{Z} \tag{3.19}$$

и полученный результат обозначить верхним индексом 3, то приходим к еще одному варианту эрмитовой системы функционалов над пространством $\mathcal{C}^1_X$:

$$\langle \widehat{\omega}^3_{\mathcal{J}-2}, u\rangle = u(x_{\mathcal{J}}+0), \quad \langle \widehat{\omega}^3_{\mathcal{J}-1}, u\rangle = u(x_{\mathcal{J}+1}+0), \quad \langle \widehat{\omega}^3_{\mathcal{J}}, u\rangle = \frac{du}{dt}(x_{\mathcal{J}+1}+0).$$

После предельного перехода (3.19) формулы (3.12) – (3.17) принимают вид

$$\begin{aligned}
\omega^3_{\mathcal{J}-1}(t) &= \frac{(t-x_{\mathcal{J}})(2x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}}-t)}{(x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}})^2} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}),\\
\omega^3_{\mathcal{J}-1}(t) &= \frac{(x_{\mathcal{J}+3}-t)(t+x_{\mathcal{J}+3}-2x_{\mathcal{J}+1})}{(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}),\\
\omega^3_{\mathcal{J}}(t) &= \frac{(t-x_{\mathcal{J}})(t-x_{\mathcal{J}+1})}{x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}}} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}),\\
\omega^3_{\mathcal{J}}(t) &= \frac{(t-x_{\mathcal{J}+1})(t-x_{\mathcal{J}+3})}{x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}+3}} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}),\\
\omega^3_{\mathcal{J}+1}(t) &= \frac{(t-x_{\mathcal{J}+1})^2}{(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}),\\
\omega^3_{\mathcal{J}+1}(t) &= \frac{(t-x_{\mathcal{J}+4})^2}{(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+4})^2} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}).
\end{aligned}$$

Рассмотрим линейное пространство $\widetilde{X}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\widetilde{u} \mid \widetilde{u}^3(t) = \sum\limits_{j\in\mathcal{Z}} c_j\omega^3_j(t)\ \forall t\in M,\ \forall c_j\in\mathcal{R}^1\Big\}$; очевидно, что $\widetilde{X}^3 \subset \mathcal{C}^1_X \cap C(\alpha,\beta)$, а функция $\widetilde{u}^3(t)\in\widetilde{X}^3$, $\widetilde{u}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j\in\mathcal{Z}} v_j\omega^3_j(t)$ — решение интерполяционной задачи

$$u(x_{\mathcal{J}}) = v_{\mathcal{J}}, \quad u(\xi_{\mathcal{J}+1}) = v_{\mathcal{J}+1}, \quad \frac{du}{dt}(\xi_{\mathcal{J}+1}+0) = v_{\mathcal{J}+2}, \quad u\in\mathcal{C}^1_X\cap C(\alpha,\beta);$$

в отличие от (3.18) здесь узлы интерполяции совпадают с узлами интерполирующего сплайна.

4. Об условиях непрерывности. Пусть

$$\varphi\in C(\alpha,\beta), \quad \varphi(t)\neq 0 \quad \forall t\in(\alpha,\beta). \tag{4.1}$$

Введем обозначение $\varphi_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_j)$. При условии (4.1) для непрерывности образующих функций необходимо и достаточно, чтобы последние обращались в ноль на концах носителя; поэтому в рассматриваемом случае непрерывность эквивалентна равенствам:

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}) = 0, \quad \det(\varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0, \tag{4.2}$$

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}}) = 0, \quad \det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0, \tag{4.3}$$

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+1}) = 0, \quad \det(\varphi_{\mathcal{J}+4}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3}) = 0 \quad \forall\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}. \tag{4.4}$$

Сгруппируем соотношения в (4.2) – (4.3) иначе; возьмем первое соотношение в (4.2) и первое соотношение в (4.3):

$$\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}) = 0, \quad \det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}}) = 0.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}$ линейно независимые, и принимая во внимание предположение (4.1), приходим к выводу, что с некоторыми константами $c_{\mathcal{J}}\neq 0$ верны соотношения

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2} = c_{\mathcal{J}}\varphi_{\mathcal{J}} \quad \forall\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}. \tag{4.5}$$

Теперь, сравнивая вторые соотношения в (4.2) – (4.3)

$$\det(\varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0, \quad \det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+1}) = 0,$$

убеждаемся, что с некоторыми константами $c_{\mathcal{J}+3}\neq 0$ должны выполняться также соотношения

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}+1} = c_{\mathcal{J}+3}\varphi_{\mathcal{J}+3} \quad \forall\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}; \tag{4.6}$$

очевидно, что соотношения (4.5) и (4.6) эквивалентны.

Наконец, первое и второе из соотношений в (4.4) эквивалентны и означают, что векторы $\varphi_{\mathcal{J}+1}$ представляют собой линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}$ и $\mathbf{a}_{\mathcal{J}}$:

$$\varphi_{\mathcal{J}+1} = c'_{\mathcal{J}}\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1} + c''_{\mathcal{J}}\mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \quad c'_{\mathcal{J}}, c''_{\mathcal{J}} \in \mathcal{R}^1, \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}. \tag{4.7}$$

Итак, установлено следующее утверждение

Теорема 3. *При условии* (4.1) *для непрерывности функций* $\omega_j(t)$ *необходимо и достаточно выполнение соотношений* (4.5) *и* (4.7).

Обозначим через $\omega_j^\diamond$ функции, полученные по формулам (1.7) – (1.12) при $\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2} = \varphi_{\mathcal{J}}$ $\forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}$; тогда по упомянутым формулам имеем:

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{\det\bigl(\varphi_{\mathcal{J}}, \varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}}\bigr)}{\det(\varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \tag{4.8}$$

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{\det\bigl(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3}\bigr)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \tag{4.9}$$

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\det\bigl(\varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t)\bigr)}{\det(\varphi_{\mathcal{J}}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+1}), \tag{4.10}$$

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \varphi(t), \varphi_{\mathcal{J}+3}\bigr)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \tag{4.11}$$

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{\det\bigl(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi(t)\bigr)}{\det(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+3})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+3}), \tag{4.12}$$

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{\det\bigl(\varphi(t), \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3}\bigr)}{\det(\varphi_{\mathcal{J}+3}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+2}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}+3})} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{\mathcal{J}+3}, x_{\mathcal{J}+4}). \tag{4.13}$$

Из формул (4.8) – (4.13) видно, что

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}-1}(x_{\mathcal{J}}+0) = \omega^\diamond_{\mathcal{J}-1}(x_{\mathcal{J}+3}-0) = 0, \quad \omega^\diamond_{\mathcal{J}}(x_{\mathcal{J}}+0) = \omega^\diamond_{\mathcal{J}}(x_{\mathcal{J}+3}-0) = 0;$$

кроме того, $\omega^\diamond_{\mathcal{J}+1}(x_{\mathcal{J}+3}-0) = \omega^\diamond_{\mathcal{J}+1}(x_{\mathcal{J}+3}+0) = 1$. При выполнении условия (4.7), или (что то же самое) условия

$$\det\bigl(\mathbf{a}_{\mathcal{J}-1}, \mathbf{a}_{\mathcal{J}}, \varphi_{\mathcal{J}+1}\bigr) = 0 \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z}, \tag{4.14}$$

верны формулы

$$\omega^\diamond_{\mathcal{J}+1}(x_{\mathcal{J}+1}+0) = \omega^\diamond_{\mathcal{J}+1}(x_{\mathcal{J}+4}-0) = 0.$$

Замечание 3. При $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ можно потребовать непрерывность первых производных в узлах; это требование эквивалентно соотношениям вида

$$\mathbf{a}_{\mathcal{J}-2} = \overline{c}_{\mathcal{J}}\varphi'_{\mathcal{J}} \quad \forall \mathcal{J} \in 3\mathcal{Z} \tag{4.15}$$

с некоторыми ненулевыми константами $\overline{c}_{\mathcal{J}}$; однако одновременное выполнение соотношений (4.5) и (4.15), вообще говоря, невозможно.

5. Квазиэрмитовы сплайны как предел B-сплайнов при “склеивании” некоторых узлов. На сетке (1.1) – (1.2) рассмотрим B-сплайны второй степени, определяемые соотношениями

$$\mathbf{a}^B_{j-2}\omega^B_{j-2}(t) + \mathbf{a}^B_{j-1}\omega^B_{j-1}(t) + \mathbf{a}^B_j\omega^B_j(t) \equiv \varphi(t) \quad \forall t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{5.1}$$

$$\operatorname{supp}\, \omega^B_j = [x_j, x_{j+3}], \tag{5.2}$$

где

$$\mathbf{a}^B_j \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl(1, \,\frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}\,, \,x_{j+1}x_{j+2}\Bigr)^T, \quad \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T. \tag{5.3}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&\omega_j^B(t) = (t-x_j)^2(x_{j+1}-x_j)^{-1}(x_{j+2}-x_j)^{-1} && \text{при} \quad t\in[x_j,x_{j+1}),\\
&\omega_j^B(t) = (x_{j+2}-x_j)^{-1}(x_{j+2}-x_{j+1})^{-1}(x_{j+3}-x_{j+1})^{-1}\times\\
&\quad\times\big[(x_j-x_{j+2}-x_{j+3}+x_{j+1})t^2-2(x_{j+1}x_j-x_{j+2}x_{j+3})t+\\
&\quad+x_jx_{j+1}x_{j+3}-x_jx_{j+2}x_{j+3}+x_jx_{j+1}x_{j+2}-x_{j+1}x_{j+2}x_{j+3}\big] && \text{при} \quad t\in[x_{j+1},x_{j+2}),\\
&\omega_j^B(t) = (t-x_{j+3})^2(x_{j+3}-x_{j+2})^{-1}(x_{j+3}-x_{j+1})^{-1} && \text{при}\ t\in[x_{j+2},x_{j+3}],\\
&\omega_j^B(t) = 0 && \text{при}\ t\notin[x_j,x_{j+3}],
\end{aligned}$$

так что supp $\omega_j^B = [x_j, x_{j+3}]$. Легко проверить, что система функционалов $\{\widehat{\omega}_i^B\}_{i\in\mathcal{Z}}$,

$$\langle\widehat{\omega}_i^B, u\rangle \overset{\text{def}}{=} u(x_{i+1}) + \frac{(x_{i+2}-x_{i+1})u'(x_{i+1})}{2} \quad \forall u\in C^1(\alpha,\beta),$$

биортогональна к системе $\{\omega_j^B\}_{j\in\mathcal{Z}}$. Перейдем к пределу при условии $x_{\mathcal{J}-1}\to x_{\mathcal{J}}$ $\forall\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}$ в соотношениях (5.1)–(5.3). Учитывая свойства локальности и непрерывности упомянутых соотношений (в каждом из них фигурирует конечное число параметров) и обозначая предельные значения рассматриваемых объектов верхним символом $\flat$, из (5.1)–(5.3) получаем:

$$\mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}-2}\omega^\flat_{\mathcal{J}-2}(t)+\mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}-1}\omega^\flat_{\mathcal{J}-1}(t)+\mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}}\omega^\flat_{\mathcal{J}}(t)\equiv\varphi(t) \quad \forall t\in(x_{\mathcal{J}},x_{\mathcal{J}+1}), \tag{5.4}$$

$$\mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}-1}\omega^\flat_{\mathcal{J}-1}(t)+\mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}}\omega^\flat_{\mathcal{J}}(t)+\mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}+1}\omega^\flat_{\mathcal{J}+1}(t)\equiv\varphi(t) \quad \forall t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}), \tag{5.5}$$

$$\text{supp}\ \omega^\flat_{\mathcal{J}-1} = \text{supp}\ \omega^\flat_{\mathcal{J}} = [x_{\mathcal{J}}, x_{\mathcal{J}+3}], \quad \text{supp}\ \omega^\flat_{\mathcal{J}+1} = [x_{\mathcal{J}+1}, x_{\mathcal{J}+4}], \tag{5.6}$$

где при $\mathcal{J}\in 3\mathcal{Z}$

$$\mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}-2} \overset{\text{def}}{=} \big(1, x_{\mathcal{J}}, x^2_{\mathcal{J}}\big)^T, \quad \mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}-1} \overset{\text{def}}{=} \Big(1, \frac{x_{\mathcal{J}}+x_{\mathcal{J}+1}}{2}, x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+1}\Big)^T, \quad \mathbf{a}^\flat_{\mathcal{J}} \overset{\text{def}}{=} \Big(1, \frac{x_{\mathcal{J}+1}+x_{\mathcal{J}+3}}{2}, x_{\mathcal{J}+1}x_{\mathcal{J}+3}\Big)^T.$$

Из условий (5.4)–(5.6) однозначно определяются функции $\omega^\flat_j$; они имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega^\flat_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{(t-x_{\mathcal{J}})\big[2x_{\mathcal{J}+1}x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+3}+t(2x_{\mathcal{J}}-x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+1})\big]}{(x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}})^2(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}})} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}},x_{\mathcal{J}+1}),\\
&\omega^\flat_{\mathcal{J}-1}(t) = \frac{(t-x_{\mathcal{J}+3})^2}{(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}})(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+1})} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}),\\
&\omega^\flat_{\mathcal{J}}(t) \quad = \frac{(t-x_{\mathcal{J}})^2}{(x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}})(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}})} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}},x_{\mathcal{J}+1}),\\
&\omega^\flat_{\mathcal{J}}(t) \quad = \frac{(x_{\mathcal{J}+3}-t)\big[2x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+1}-x_{\mathcal{J}}x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+1}x_{\mathcal{J}+3}+t(2x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}}-x_{\mathcal{J}+1})\big]}{(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}})(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}),\\
&\omega^\flat_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{(t-x_{\mathcal{J}+1})^2}{(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+1})^2} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}),\\
&\omega^\flat_{\mathcal{J}+1}(t) = \frac{(t-x_{\mathcal{J}+4})^2}{(x_{\mathcal{J}+3}-x_{\mathcal{J}+4})^2} && \text{при} \quad t\in(x_{\mathcal{J}+3},x_{\mathcal{J}+4}).
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что полученные функции $\omega^\flat_j$ неотрицательны и непрерывны, однако их первые производные, вообще говоря, разрывны в узлах, лежащих в носителе (заметим, что первая производная функции $\omega^\flat_{\mathcal{J}+1}$ в точках $x_{\mathcal{J}+1}$ и $x_{\mathcal{J}+4}$ непрерывна). Таким образом, можно считать, что значения $\omega^\flat_j\in C(\alpha,\beta)\cap\mathcal{C}^2_X \quad \forall j\in\mathcal{Z}$.

Распространение функционалов соответствующей биортогональной системы на $C(\alpha,\beta)\cap\mathcal{C}^2_X$ получается по формулам (3.2)–(3.4), если там положить $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}^\flat_j$, $j\in\mathcal{Z}$:

$$\widehat{\omega}^\flat_{\mathcal{J}-2} = \Big(1+(x_{\mathcal{J}}-\xi_{\mathcal{J}})\frac{d}{dt}+\frac{(x_{\mathcal{J}}-\xi_{\mathcal{J}})^2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Big)\Big|_{t=\xi_{\mathcal{J}}}, \qquad \xi_{\mathcal{J}}\in(x_{\mathcal{J}},x_{\mathcal{J}+1}),$$

$$\widehat{\omega}^\flat_{\mathcal{J}-1} = \Big(1+\Big(\frac{x_{\mathcal{J}}+x_{\mathcal{J}}}{2}-\xi_{\mathcal{J}}\Big)\frac{d}{dt}+\frac{(x_{\mathcal{J}}-\xi_{\mathcal{J}+1})(x_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}+1})}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Big)\Big|_{t=\xi_{\mathcal{J}+1}}, \qquad \xi_{\mathcal{J}+1}\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}),$$

$$\widehat{\omega}^\flat_{\mathcal{J}} \quad = \Big(1+\Big(\frac{x_{\mathcal{J}+1}+x_{\mathcal{J}+3}}{2}-\xi_{\mathcal{J}+2}\Big)\frac{d}{dt}+\frac{(x_{\mathcal{J}+1}-\xi_{\mathcal{J}+2})(x_{\mathcal{J}+3}-\xi_{\mathcal{J}+2})}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Big)\Big|_{t=\xi_{\mathcal{J}+2}}, \quad \xi_{\mathcal{J}+2}\in(x_{\mathcal{J}+1},x_{\mathcal{J}+3}).$$

Один из вариантов упомянутой биортогональной системы можно получить переходом к пределу $\xi_{\mathcal{J}} \to x_{\mathcal{J}} + 0$, $\xi_{\mathcal{J}+1} = \xi_{\mathcal{J}+2} \to x_{\mathcal{J}} + 0$. В результате для $u \in C(\alpha, \beta) \cap \mathcal{C}^1_X$ находим

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\omega}^\flat_{\mathcal{J}-2}, u\rangle &= u(x_{\mathcal{J}}),\\
\langle \widehat{\omega}^\flat_{\mathcal{J}-1}, u\rangle &= u(x_{\mathcal{J}+1}) + \frac{x_{\mathcal{J}} - x_{\mathcal{J}+1}}{2}\,\frac{du}{dt}\,(x_{\mathcal{J}+1}+0),\\
\langle \widehat{\omega}^\flat_{\mathcal{J}}, u\rangle &= u(x_{\mathcal{J}+1}) + \frac{x_{\mathcal{J}+3} - x_{\mathcal{J}+1}}{2}\,\frac{du}{dt}\,(x_{\mathcal{J}+1}+0).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Рассмотрим линейное пространство $\widetilde{X}^\flat \stackrel{\rm def}{=} \left\{\widetilde{u}^\flat \mid \widetilde{u}^\flat(t) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} c_j\omega^\flat_j(t)\ \forall t \in M,\ \forall c_j \in \mathcal{R}^1\right\}$; очевидно, что $\widetilde{X}^\flat \subset \mathcal{C}^1_X \cap C(\alpha, \beta)$, а функция $\widetilde{u}^\flat \in \widetilde{X}^\flat$, $\widetilde{u}^\flat \stackrel{\rm def}{=} \sum_{j\in\mathcal{Z}} v_j\omega^\flat_j(t)$, является решением интерполяционной задачи вида

$$u(x_{\mathcal{J}}) = v_{\mathcal{J}}, \quad u(\xi_{\mathcal{J}+1}) = v_{\mathcal{J}+1}, \quad \frac{du}{dt}\,(\xi_{\mathcal{J}+1}+0) = v_{\mathcal{J}+2}, \quad u \in \mathcal{C}^1_X \cap C(\alpha, \beta).$$

Замечание 4. Пусть сетка $\overline{X}_1$ получена из сетки X удалением одного или нескольких узлов, а пространство $\widetilde{X}^\flat_1$ построено аналогично пространству $\widetilde{X}^\flat$ с использованием новой сетки $\overline{X}_1$; тогда справедливо включение $\widetilde{X}^\flat_1 \subset \widetilde{X}^\flat$. Благодаря этому на последовательности измельчающихся сеток можно получить последовательность вложенных пространств псевдоэрмитовых сплайнов. Использование биортогональных систем вида (5.7) теперь приведет к вейвлетным разложениям упомянутых пространств (аналогично тому, как это сделано в работе [5] для сплайнов нулевой высоты), к соответствующим калибровочным соотношениям и к формулам декомпозиции/реконструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. *Стрэнг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М: Мир, 1977.
3. *Михлин С.Г.* Вариационно-сеточная аппроксимация // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1974. **48**. 32–188.
4. *Демьянович Ю.К.* Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб, 1994.
5. *Демьянович Ю.К.* Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке // Докл. РАН. 2002. **382**, № 3. 313–316.

Поступила в редакцию
30.08.2004