

УДК 518.61:539.375

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАЩИТНОГО ВООРУЖЕНИЯ НОМАДОВ ЦЕНТРАЛЬНОЙ АЗИИ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С. Н. Коробейников<sup>1</sup>, Ю. С. Худяков<sup>2</sup>, А. В. Шутов<sup>3</sup>

Разработанная ранее авторами модель хрупкого разрушения тонкостенных конструкций используется для сравнительного анализа защитного вооружения древних воинов численным решением линейных и нелинейных задач механики деформируемого твердого тела. Сравнение функциональных свойств защитного вооружения проводится путем сопоставления зон разрушения панцирей, составленных из бронзовых или железных пластин. Динамическое деформирование системы “панцирь–тело человека” под воздействием стрелы, выпущенной из лука, моделируется сосредоточенной массой (равной массе наконечника стрелы) с заданной начальной скоростью. Численные решения задач получены с помощью вычислительного комплекса PLO-NER. Приведены количественные характеристики защитных свойств железных и бронзовых панцирей.

**Введение.** Защитное вооружение номадов (кочевых народов и племен, обитавших на территории Центральной Азии с XII в. до н.э. по XIX в. н.э.) в позднем бронзовом и раннем железном веках состояло, в основном, из панцирей и шлемов. Классификация археологических находок элементов защитного вооружения проведена в [1, 2]. Анализ этих находок показывает, что на рубеже периода древности и эпохи средневековья панцири из железных пластин появились у кочевников в верхнем Приобье, древних тюрок в Горном Алтае и у кыргызов на Енисее [1, 3]. В древности, в позднем бронзовом веке, цельнолитые шлемы изготавливались путем отливки в форме из бронзы [2]. Со времени освоения железоделательной технологии в раннем железном веке детали шлемов и панцирей стали ковать из железа. В комплексах культуры сяньби II–III вв. н.э. обнаружены железные пластины от чешуйчатого панциря и шлема [4]. Хотя в Центральной Азии пока найдена только одна бронзовая панцирная пластина, можно предположить, что первые металлические панцири были набраны из бронзовых пластин, но слабые защитные свойства этих пластин привели в дальнейшей эволюции защитного вооружения к их замене на железные пластины. Цель настоящей работы состоит в проверке этого предположения методом математического моделирования. При этом проверяется возможность разрушения фрагментов защитного вооружения при прямом попадании стрелы в центральную часть одной из пластин защитного вооружения (наихудшие условия по отношению к защитным свойствам панциря).

Математическое моделирование процесса разрушения фрагмента защитного панциря осуществляется с помощью решения динамической задачи о совместном деформировании фрагмента панциря и тела человека. Задача решается численно, при этом пространственная дискретизация нелинейных уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) осуществляется методом конечных элементов (МКЭ). Предварительные расчеты по деформированию бронзовой пластинки с присоединенной сосредоточенной массой, имитирующей воздействие стрелы, проведенные в [5] в рамках уравнений линейной теории упругости, выявили механизм разрушения пластины. Показано, что при ударе стрелы разрушение пластины происходит вследствие ее изгиба при зарождении трещины на противоположной от воздействия стрелы стороне пластины. Этот механизм кардинально отличается от механизма разрушения такой же пластины пулей, летящей с гораздо большей скоростью, чем стрела. При этом площадка контакта пули с пластиной гораздо меньше, чем такая же площадка для стрелы. Поэтому пуля разрушает материал в окрестности ее контакта с пластиной. Для оценки защитных свойств панциря при его пробивании пулей достаточно ограничиться локальной областью деформирования и при прямом ударе решать осесимметричную задачу. Но для решения задачи о разрушении фрагмента панциря стрелой надо как можно более

<sup>1</sup> Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, просп. акад. Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск; e-mail: korob@hydro.nsc.ru

<sup>2</sup> Институт археологии и этнографии СО РАН, просп. акад. Лаврентьева, 17, 630090, г. Новосибирск; e-mail: alisa@bronze.archaeology.nsc.ru

<sup>3</sup> Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Пирогова, 2, 630090, г. Новосибирск; e-mail: shutov@ngs.ru

тщательно составить математическую модель панциря и учесть его совместное деформирование с телом человека для того, чтобы как можно более точно воспроизвести изгиб пластины, который приводит к ее разрушению.

В настоящей работе математическая модель панциря, одетого на тело человека, представляет трехслойную область с разными механическими характеристиками каждого слоя. Первый слой представляет защитный панцирь, набранный из металлических пластин, которые моделируются тонкостенными элементами. Мягкие ткани тела человека моделируются трехмерными элементами из линейного упругого слабо сжимаемого материала. Ребра человека моделируются трехмерными элементами с большим модулем Юнга. Разрушение пластин панциря моделируется с помощью нелинейной модели материала, подробно изложенной и протестированной на решениях квазистатических и динамических задач нелинейной механики разрушения в [6].

Деформирование пластин с низкими скоростями диктует в качестве оптимального выбор неявной схемы интегрирования уравнений движения (при решении задачи о пробивании пластины пулей более выгодным было бы использование явной схемы интегрирования этих уравнений). В настоящей работе используется двухшаговая неявная безусловно устойчивая схема Ньюмарка с итерационным уточнением решения методом Ньютона-Рафсона [7, 8].

**1. Численное решение динамических задач механики деформируемого твердого тела.** Основы численных методов решения линейных и нелинейных задач МДТТ представлены в ряде монографий (см., например, [7-12]). Кратко представим уравнения и алгоритмы численного решения динамических задач, требуемые для математического моделирования поведения системы “панцирь-тело человека” при ударе стрелы.

**1.1. Динамические задачи линейной теории упругости.** Приведем полную систему уравнений линейной теории упругости, описывающую деформирование упругого тела в предположении малости деформаций, поворотов и перемещений (в то же время допускаются большие трансляционные перемещения тела как жесткого целого).

1. Уравнения движения (без учета действия объемных и вязких сил)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{в } V \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{на } S_u, \quad \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^* \quad \text{на } S_T, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \quad (2)$$

Здесь и далее  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши;  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  — дивергенция тензора напряжений (вектор);  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $V \subset R^3$  — область, занимаемая телом в отсчетной конфигурации;  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая  $V$ ;  $S_u, S_T$  — части поверхности  $S = S_u \cup S_T$  ( $S_u \cap S_T = \emptyset$ ), на которых заданы векторы перемещений  $\mathbf{u}$  и напряжений  $\mathbf{T} \equiv \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  соответственно;  $\mathbf{N}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_T$ ;  $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$  — заданные векторные поля (начальные значения векторов перемещения и скорости);  $\rho$  — массовая плотность материала; знак \* обозначает заданную величину; точка между тензорами и/или векторами обозначает операцию их скалярного (внутреннего) произведения; точка над величиной обозначает частную производную этой величины по времени  $t$ .

2. Кинематические соотношения имеют вид

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\epsilon}$  — тензор деформаций Коши;  $\nabla \mathbf{u}$  — тензор градиента перемещений; здесь и далее индекс “Т” обозначает операцию транспонирования.

3. Определяющие соотношения закона Гука линейного изотропного упругого материала записываются в форме

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E : \boldsymbol{\epsilon} = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{g} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{g}$  — метрический (единичный) тензор; здесь и далее знак “:” между тензорами обозначает операцию их двойного скалярного произведения (свертки по двум индексам);  $\mathbf{C}^E$  — тензор четвертого ранга, не зависящий от  $t$ , но (в нашем случае) кусочно-постоянным образом компоненты тензора могут зависеть от пространственных координат через параметры Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ , которые можно представить через две другие константы материала  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

В декартовой системе координат компоненты тензора  $\mathbf{C}^E$  (здесь и далее компоненты тензоров и векторов пробегают значения 1, 2, 3) имеют следующий вид:

$$C_{ijkl}^E = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

где  $\delta_{ij}$  — символы Кронеккера. Тензор  $\mathbf{C}^E$  обладает следующими симметриями:

$$C_{ijkl}^E = C_{jikl}^E = C_{klij}^E. \tag{5}$$

Исходную задачу (1)–(4) сводим к конечномерному аналогу, пользуясь МКЭ. В настоящей работе этот метод рассматривается как метод Бубнова–Галеркина с выбором специфических базисных функций — таких функций, которые имеют финитные носители на локальных подобластях  $V^e \subseteq V$  (конечных элементах). Как это обычно делается в методе Бубнова–Галеркина, исходим из слабой формы уравнения движения (1), выражаемой уравнением принципа возможных перемещений

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} + \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{S_T} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \widehat{R}_c \quad \forall \delta \mathbf{u}, \tag{6}$$

где знак  $\delta$  обозначает вариацию, так что  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  на  $S_u$  (граничные условия на  $S_u$  являются главными, а на  $S_T$  — естественными); вариация тензора деформаций Коши определяется следующим образом:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla(\delta \mathbf{u}) + \nabla(\delta \mathbf{u})^T];$$

$\widehat{R}_c$  — виртуальная работа сосредоточенных сил  $R_i^k$  ( $i \in [1, 2, 3]$ ,  $k = \overline{1, K_c}$ ):

$$\widehat{R}_c = \sum_{k=1}^{K_c} R_i^k \delta u_i^k \quad (\text{не суммировать по } i),$$

которую вводим непосредственно в слабую форму уравнений (6) ( $K_c$  — общее число сосредоточенных сил). Эти силы в дифференциальных уравнениях (1) с граничными условиями (2) можно ввести с помощью дельта-функций Дирака.

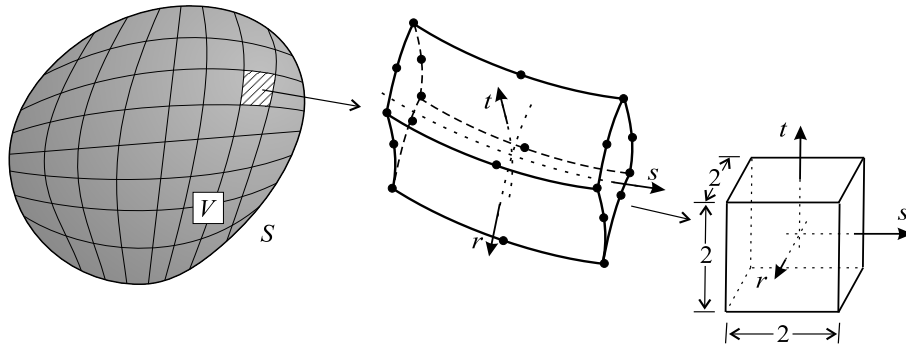


Рис. 1. Моделирование деформируемого тела конечными элементами (приведен конечный элемент с квадратичной аппроксимацией геометрии и перемещений)

Пусть в евклидовом пространстве  $R^3$  введена декартова система координат  $x_1, x_2, x_3$ . Область  $V \subset R^3$  аппроксимируем  $M$  восьмиугольными подобластями  $V^m$  ( $m = \overline{1, M}$ ):

$$V \approx V^h \equiv V^1 \cup V^2 \cup \dots \cup V^M, \tag{7}$$

в каждой из которых вводится в общем случае криволинейная локальная (естественная) система координат  $r, s, t$  ( $-1 \leq r \leq +1, -1 \leq s \leq +1, -1 \leq t \leq +1$ ), так что каждая из подобластей  $V^m$  отображается на стандартный куб с длиной ребра равной двум (рис. 1). Подобласти  $V^m$  с введенными полиномами  $h_k(r, s, t)$ , обладающими свойствами

$$h_k(r_l, s_l, t_l) = \delta_{kl}, \quad \sum_{k=1}^N h_k(r, s, t) = 1 \quad (k, l = \overline{1, N}), \quad \delta_{kl} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } k = l \\ 0, & \text{если } k \neq l \end{cases}$$

называются конечными элементами. Здесь  $N \geq 8$  — число узловых точек в элементе (на рис. 1 приведен криволинейный конечный элемент с  $N = 20$ );  $r_l, s_l, t_l$  — локальные координаты  $l$ -ой узловой точки элемента. Рассматриваем изопараметрические конечные элементы, радиус-векторы материальных точек которых  $\mathbf{x} \equiv [x_1, x_2, x_3]^T$  и векторы перемещений  $\mathbf{u} \equiv [u_1, u_2, u_3]^T$  аппроксимируются одним и тем же набором полиномов  $h_k$ :

$$\mathbf{x}(r, s, t) = \sum_{k=1}^N h_k(r, s, t) \mathbf{x}^k, \quad \mathbf{u}(r, s, t) = \sum_{k=1}^N h_k(r, s, t) \mathbf{u}^k. \quad (8)$$

Здесь верхний правый индекс  $k$  указывает на то, что данные величины определяются в  $k$ -й узловой точке элемента:

$$\mathbf{x}^k \equiv \mathbf{x}(r_k, s_k, t_k), \quad \mathbf{u}^k \equiv \mathbf{u}(r_k, s_k, t_k).$$

Разбивая область  $V$  на конечные элементы в соответствии с (7) и проводя процедуру аппроксимации уравнения (6) на базе (8), подробно описанную в [2], получаем систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = \mathbf{V}_0, \quad (9)$$

где  $\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0$  — начальные значения глобальных векторов узловых перемещений и их скоростей ансамбля элементов, полученные из векторов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$  соответственно;  $\mathbf{M}$  — положительно определенная матрица масс ансамбля;  $\mathbf{K}$  — положительно полуопределенная матрица жесткости ансамбля в общем случае, а при надлежащей постановке граничных условий на  $S_u$  (при исключении движения тела как твердого целого) — положительно определенная. Отметим, что размер вектор-столбцов  $\mathbf{U}, \mathbf{R}, \mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0$  равен  $N_{\text{eq}}$ , а размерность матриц масс  $\mathbf{M}$  и жесткости  $\mathbf{K}$  равна  $N_{\text{eq}} \times N_{\text{eq}}$ .

**1.2. Динамические задачи МДТТ с физической нелинейностью.** Полная система уравнений МДТТ с физической нелинейностью (MNO — material nonlinear only — подход к формулировке уравнений [7, 8]) состоит из уравнений (1), граничных и начальных условий (2), кинематических соотношений (3) и нелинейных определяющих соотношений, заменяющих закон Гука (4). В настоящей работе физическая нелинейность вводится при использовании соотношений нелинейной механики разрушения, предсказывающей возникновение трещин в первоначально неповрежденном материале, дальнейшее их распространение, закрытие трещин и полное разрушение материала. Определяющие соотношения такой модели материала описываются однородной связью скоростей компонент тензора напряжений со скоростями тензора деформаций [6]

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{C}$  — тензор четвертого ранга, компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций (и, возможно, их скоростей), внутренних параметров и обладают симметриями вида (5).

Предполагаем, что в момент времени  $t$  все искомые величины определены, т.е. равенство (6) удовлетворено тождественно. Используем шаговую процедуру интегрирования по времени уравнения (6). Считаем шаг по времени  $\Delta t$  достаточно малым. Требуется определить соответствующие величины в момент времени  $t + \Delta t$ . Зависимость исследуемых функций от времени показываем далее левым верхним индексом, например  ${}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$  — значения тензора напряжений Коши в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  соответственно.

Рассматривая уравнение (6) в момент времени  $t + \Delta t$  и вычитая из обеих частей этого уравнения член  $\int_V {}^t\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV$ , получаем

$$\int_V (\Delta\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} + \rho {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u}) dV = \int_{S_T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS + {}^{t+\Delta t}\hat{R}_c - \int_V {}^t\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon} dV \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (\delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u). \quad (11)$$

Здесь и далее знак  $\Delta$  перед величиной означает ее приращение с момента времени  $t$  к моменту времени  $t + \Delta t$ , например  $\Delta\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Delta\boldsymbol{\epsilon} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon} - {}^t\boldsymbol{\epsilon}$ .

Линеаризуя определяющие соотношения (10) относительно момента времени  $t$ , получаем

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получаем линейризованное уравнение принципа возможных перемещений, записанное в приращениях:

$$\int_V (\delta \epsilon : {}^t \mathbf{C} : \Delta \epsilon + \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{S_T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + {}^{t+\Delta t} \widehat{R}_c - \int_V {}^t \boldsymbol{\sigma} : \delta \epsilon dV \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u). \quad (13)$$

Пространственная дискретизация уравнений (13) проводится точно так же, как и в п. 1.1, при этом вместо линейных уравнений (9) получаем линейризованные уравнения движения (подробный вывод этих уравнений приведен в [6]):

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}, \quad {}^0 \mathbf{U} = \mathbf{U}_0, \quad {}^0 \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{V}_0, \quad (14)$$

где  ${}^t \mathbf{K}$  — касательная матрица жесткости, а  ${}^t \mathbf{F}$  — вектор внутренних сил ансамбля конечных элементов.

Во избежание плохой обусловленности матрицы  ${}^t \mathbf{K}$  (которая может возникнуть в том случае, когда один из линейных размеров элемента существенно меньше двух других) трехмерные элементы модифицируются к тонкостенным элементам (подробнее см. в [6, 13]). Нелинейная модель разрушения материала в настоящей работе применяется для описания растрескивания только тонкостенных элементов, моделирующих пластины панциря защитного вооружения. В [6] подробно описана модель материала разрушения тонкостенного элемента и представлены формулы определения компонент тензора  ${}^t \mathbf{C}$  в (10) и компонент тензора напряжений, требуемых для вычисления вектора  ${}^t \mathbf{F}$  в (14) при переходе к следующему моменту времени  $t + \Delta t$ .

**1.3. Динамические задачи МДТТ с физической и геометрической нелинейностями.** При больших деформациях, перемещениях и поворотах вместо уравнений, представленных в пп. 1.1, 1.2, надо использовать *геометрически нелинейные* уравнения МДТТ. В настоящей работе используется TL (Total Lagrangian)-формулировка геометрически нелинейных уравнений [7, 8], когда в качестве отсчетной конфигурации используется начальная конфигурация, которая у нас является также естественной (свободной от напряжений). Кроме того, деформации предполагаются малыми (но повороты и перемещения могут быть большими). В этом случае в качестве тензоров напряжений и деформаций наиболее выгодно использовать второй тензор напряжений Пиола–Кирхгофа  $\mathbf{S}$  и тензор деформаций Грина–Лагранжа  $\mathbf{E}$  [8]. Приведем полную систему уравнений, описывающую деформирование тела с физической и геометрической нелинейностями в оговоренных выше предположениях.

1. Уравнения движения (без учета действия объемных и вязких сил)

$$\nabla \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{в } V \quad (15)$$

с граничными и начальными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{на } S_u, \quad \mathbf{N} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{T}^* \quad \text{на } S_T, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \quad (16)$$

Обозначения в (15) и (16) совпадают с обозначениями, введенными в п. 1.1, кроме того

$$\mathbf{S} \equiv J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{g} + \nabla \mathbf{u}^T, \quad J \equiv \det \mathbf{F}.$$

Тензор  $\mathbf{S}$  называется вторым тензором напряжений Пиола–Кирхгофа, а тензор  $\mathbf{F}$  — тензором градиента движения.

2. Кинематические соотношения имеют вид

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (17)$$

Тензор  $\mathbf{E}$  называется тензором деформаций Грина–Лагранжа.

3. Определяющие соотношения с учетом геометрической и физической нелинейностей записываются в виде

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}}. \quad (18)$$

Отметим, что тензоры  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{E}$  инвариантны: при евклидовых преобразованиях пространства (или, что то же самое, при жестких движениях тела, наложенных на деформированные) эти тензоры не изменяются. Кроме того, эта пара тензоров является сопряженной по отношению к мощности внутренних сил  $w$ , отнесенной к единице объема деформируемого тела в отсчетной конфигурации, т.е. справедливо

равенство  $w = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$  [8]. Тензоры  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{E}$  при малых деформациях тела (но возможных больших перемещениях и поворотах) имеют простую интерпретацию [7, 8]: компоненты этих тензоров приближенно равны компонентам тензоров  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  и  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ , полученных из тензоров напряжений и деформаций Коши  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\epsilon}$  преобразованием поворота. Поэтому для такого типа деформаций учет больших поворотов в определяющих соотношениях происходит автоматически заменой пары тензоров  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\epsilon}$  на пару  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{E}$ . Например, для линейного изотропного упругого материала выражение закона Гука в (4) при учете больших поворотов заменяется на соотношение

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^E : \mathbf{E} = \lambda(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{g} + 2\mu\mathbf{E}.$$

Точно так же для физически нелинейного материала, учитывающего разрушение, соотношение (10) заменяется на (18), при этом для тонкостенного элемента в определяющих соотношениях, представленных в [6], надо произвести замену пары тензоров  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\epsilon}$  на пару  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{E}$ .

Дискретизация уравнений (15), (17), (18) происходит по схеме, представленной в п. 1.2, при этом линейаризованные уравнения движения имеют вид (14). Формулы для определения компонент матрицы  ${}^t\mathbf{K}$  и вектора  ${}^t\mathbf{F}$ , учитывающие геометрическую нелинейность, даны для конечного элемента трехмерного сплошного тела в [7, 8], а для тонкостенного элемента — в [13].

**1.4. Алгоритмы численных решений динамических задач МДТТ и их программное воплощение.** Задачи (9) и (14) являются задачами Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (линейных в (9) и нелинейных, представленных в линейаризованном виде в (14)). Для решения этих задач на сегменте времени  $[0, T] \subset R$  ( $T > 0$ ) используется конечно-разностная схема Ньюмарка, подробно описанная в [6–8]. Схема Ньюмарка принадлежит к двухшаговым двухпараметрическим (параметры  $\alpha$  и  $\delta$ ) конечно-разностным схемам. Параметры  $\alpha$  и  $\delta$  выбираются из условия устойчивости и точности интегрирования уравнений движения. Если  $\alpha = 0,25$  и  $\delta = 0,5$ , то схема Ньюмарка имеет второй порядок точности интегрирования по времени и схемная диссипация отсутствует. При других значениях  $\alpha$  и  $\delta$  схема Ньюмарка имеет первый порядок точности и появляется схемная диссипация при интегрировании уравнений движения. Диссипативные схемы интегрирования оказываются полезными при решении задач о распространении ударных волн и при решении динамических контактных задач. Для линейных задач схема Ньюмарка является безусловно устойчивой при  $\delta \geq 0,5$  и  $\alpha \geq 0,25(\delta + 0,5)^2$ .

При использовании неявной схемы Ньюмарка на каждом шаге по времени решается алгебраическая система уравнений

$${}^t\hat{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}, \quad (19)$$

где  ${}^t\hat{\mathbf{K}}$  — эффективная симметричная касательная матрица жесткости, а  ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}$  — эффективный вектор внешних сил. Система (19) решается методом  $\mathbf{LDL}^T$ -факторизации [7] (методом Гаусса, учитывающим симметричность матрицы  ${}^t\hat{\mathbf{K}}$ , разреженность ее элементов и ее переменный профиль). Отметим, что при решении задачи (9) матрицу  ${}^t\hat{\mathbf{K}}$  надо заменить на матрицу  $\hat{\mathbf{K}}$ , не зависящую от времени. Если же рассматривается нелинейная система уравнений, то решение линейаризованной системы (19) надо уточнять. В настоящей работе для такого уточнения используется метод Ньютона–Рафсона [7–11], уточнение решения проводится на каждом шаге по времени.

Поскольку в настоящей работе используется неявная безусловно устойчивая схема Ньюмарка интегрирования уравнений движения, то шаг по времени  $\Delta t$  выбирается из условия оптимального (по времени вычислений) воспроизведения механического содержания задачи (т.е. этот шаг не должен быть ни слишком малым, ни слишком большим). Общий подход к выбору величины шага по времени представлен в [7] и состоит в следующем. Прежде чем приступить к решению задачи (9), надо решить вспомогательную задачу по определению частот собственных колебаний  $\omega$  и соответствующих им форм  $\Phi$  из решения обобщенной задачи по определению собственных значений и соответствующих им собственных векторов:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\Phi = \mathbf{0}. \quad (20)$$

При решении задач, возникающих в практике, как правило, достаточно ограничиться определением только нескольких нижних частот (обозначим требуемое число через  $L$ ):  $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_L$ . Отметим, что при задании граничных условий на  $S_u$ , запрещающих движение тела как жесткого целого (матрица  $\mathbf{K}$  положительно определена), справедливо строгое неравенство  $\omega_1 > 0$ . Исследователь должен из механического смысла задачи определить число  $L$ , соответствующее достаточно точному приближению решения

при его представлении разложением по нижним  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_L$  формам собственных колебаний

$$\mathbf{U} \approx \sum_{i=1}^L x_i(t) \Phi_i, \tag{21}$$

где  $x_i(t)$  — коэффициент вклада  $\Phi_i$ -ой собственной формы в решение задачи.

Определим период колебаний по наивысшей рассматриваемой частоте в предположении  $\omega_L > 0$ :

$$T_L = 2\pi/\omega_L. \tag{22}$$

Для достаточно точного шагового интегрирования правой части (21) нужно выбрать минимум 20 временных шагов по периоду  $T_L$ , воспроизводящих вклад наивысшей требуемой частоты (вклады остальных нижних форм воспроизводятся с большей точностью). Стандартная практика численного решения задачи (9) состоит в выборе шага  $\Delta t$  из интервала

$$\frac{T_L}{100} \leq \Delta t \leq \frac{T_L}{20}. \tag{23}$$

Выбор  $\Delta t < T_L/100$  увеличит время решения задачи без существенного улучшения его точности. С другой стороны, шаг  $\Delta t > T_L/20$  плохо приближает разложение в правой части (21).

При решении нелинейных задач изложенный выше подход к выбору шага по времени не годится, так как спектр частот в этом случае зависит от времени и на каждом шаге по времени заново решать задачу вида (20) малопродуктивно. Поэтому шаг по времени  $\Delta t$  выбирается из условия (22) только на начальном этапе, при этом в (20) под матрицей  $\mathbf{K}$  подразумевается матрица  ${}^0\mathbf{K}$ . Далее, если итерационный процесс при использовании метода Ньютона–Рафсона не сходится с заданной точностью за заранее заданное число итераций  $N_{\max}$  (обычная практика состоит в выборе  $15 \leq N_{\max} \leq 30$ ), то шаг  $\Delta t$  уменьшается и задача решается заново с уменьшенным шагом. Уменьшение шага  $\Delta t$  происходит до тех пор, пока не получается сходящееся к точному решению задачи вплоть до момента времени  $T$ .

**2. Результаты математического моделирования.** Изложенные алгоритмы решения линейных и нелинейных задач реализованы в многоцелевом вычислительном комплексе PIONER, ранняя версия которого представлена в [14]. Для ввода узловой и элементной информации и визуализации результатов расчетов используется пакет FEMAP 7.1, входящий в качестве пре/постпроцессора в пакет MSC/NASTRAN for Windows 4.6, демо-версия которого любезно предоставлена авторам сотрудниками московского представительства корпорации MSC.software. Обмен информацией между пакетами FEMAP и PIONER производится с помощью нейтральных файлов пакета FEMAP и специально написанными программами на языке FORTRAN 77, переводящими информацию из нейтрального файла пакета FEMAP во входной файл пакета PIONER при работе пакета FEMAP в качестве препроцессора и из выходного файла пакета PIONER в нейтральный файл пакета FEMAP при работе последнего в качестве постпроцессора.

Решение задачи о деформировании панциря проведено в несколько этапов. На первом этапе решается задача (20) определения  $L$  нижних частот собственных колебаний и соответствующих им форм. Находятся те собственные частоты  $\omega_L$ , при которых появляется изгиб пластины панциря (т.е. начинает работать механизм разрушения пластин). Затем проводится решение линейных динамических задач (9) с разными значениями начальной скорости. При этом шаг по времени выбирается из условия (23). Этот шаг по времени является отправным и при решении линеаризованных задач (14). Из численных экспериментов определяется тот шаг по времени, при котором достигается сходимость итерационной процедуры Ньютона–Рафсона. Окончательное значение такого шага может оказаться на несколько порядков меньше его первоначального значения.

**2.1. Математическая модель системы “панцирь–тело человека”.** Детальное воспроизведение особенностей панциря и тела человека затруднительно в математической модели вследствие большой трудоемкости как построения самой конечно-элементной модели, так и численного решения нелинейных задач большой размерности (чем более тщательно построена модель, тем больше уравнений в системах (9) и (14)). Моделирование системы “панцирь–тело человека” проводится следующим образом.

Как видно из рис. 2 [15], пластины довольно плотно упакованы в защитном панцире. Поэтому панцирь в первом приближении можно считать изготовленным из однородного материала. Схема соединения пластин показана на рис. 3, а (см. [1]), откуда следует, что толщину панциря можно приблизительно брать равной двум толщинам пластин (рис. 3, б). Измерения пластин, хранящихся в музее Института археологии и этнографии СО РАН (г. Новосибирск) показали, что их толщины изменяются от 0,115 см. до 0,150 см. В расчетах используется усредненное значение 0,13 см. Для однородного материала панциря

поэтому берется значение 0,26 см. Хотя пластины, составляющие панцирь, были плоскими (рис. 3, *a*), в математической модели они предполагаются изогнутыми (рис. 3, *б*) (радиус кривизны равен 20 см, что соответствует утрированному телу человека цилиндрической формы).



Рис. 2. Ламеллярная корсет-кираса с набрюшником и пластинчатыми наплечниками и набедренником

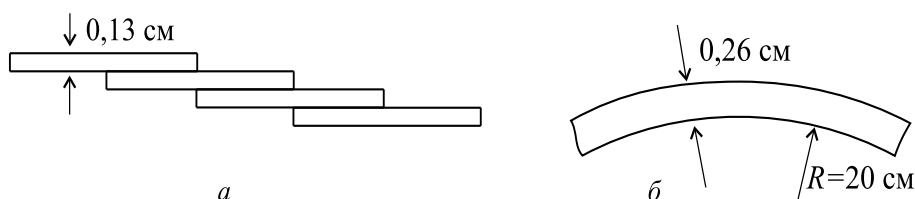


Рис. 3. Соединение пластин в панцире: *a* — модель панциря в виде набора пластин; *б* — однородная модель панциря

Однородная модель материала не воспроизводит одного важного свойства панциря, происходящего от способа перевязки пластин в составе панциря: сопротивление изгибу проявляется в разных направлениях не одинаково. Для фрагмента панциря схема сопротивления показана на рис. 4. Такие свойства разного сопротивления изгибу в разных направлениях нельзя воспроизвести на модели панциря из однородного материала. Поэтому предполагается, что панцирь изготовлен не из однородного материала, а из набора пластин, размеры которых в ширину и в длину в два раза меньше размеров исходных пластин (рис. 5, *a*). Данное моделирование отражает схему увязки пластин в панцире, представленную на рис. 3, *a*. Одна из пластин, рассмотренных в [1], имеет размеры  $3 \times 7,5$  см, поэтому в качестве базовой изогнутой пластинки выбрана пластина, представленная на рис. 5, *б*. Для воспроизведения разного сопротивления пластинки при ее изгибе в противоположных направлениях соединение пластин моделируется так, как показано на рис. 6. По нижней кромке осуществляется шарнирное сочленение, а на верхней кромке пластины соединяются стержнями из нелинейно-упругого материала с разными свойствами при растяжении и сжатии (рис. 7): при сжатии модуль Юнга материала стержня имеет значение  $E_{\text{comp}}$ , так что  $E_{\text{comp}} \ll E$  ( $E$  — модуль Юнга материала пластины), а при растяжении полагаем, что модуль Юнга материала стержня  $E_{\text{tens}}$  равен модулю Юнга материала пластины  $E$  (т.е.  $E_{\text{tens}} = E$ ). Так как в линейном и частотном анализе нельзя использовать нелинейно-упругую модель материала, то модуль Юнга материала стержней в этих случаях предполагается равным  $E_{\text{tens}}$ .

В настоящей работе рассматриваем два типа панцирных пластин, изготовленных из бронзы и железа. Механические константы для бронзы [16]:  $E = 103$  ГПа,  $\nu = 0,31$ , предел прочности  $\sigma_t = 0,2$  ГПа,  $\rho = 8800$  кг/м<sup>3</sup>, для железа [16]:  $E = 196$  ГПа,  $\nu = 0,28$ ,  $\sigma_t = 0,4$  ГПа,  $\rho = 7700$  кг/м<sup>3</sup>.

**2.2. Конечно-элементная модель системы “панцирь–тело человека”.** В соответствии с предположениями о моделировании панциря, изложенными в п. 2.1, разработана конечно-элементная модель



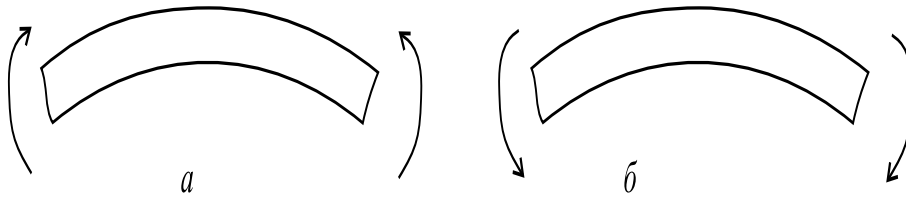


Рис. 4. Изгиб панциря моментом сил: *a* — слабое сопротивление изгибу; *б* — сильное сопротивление изгибу

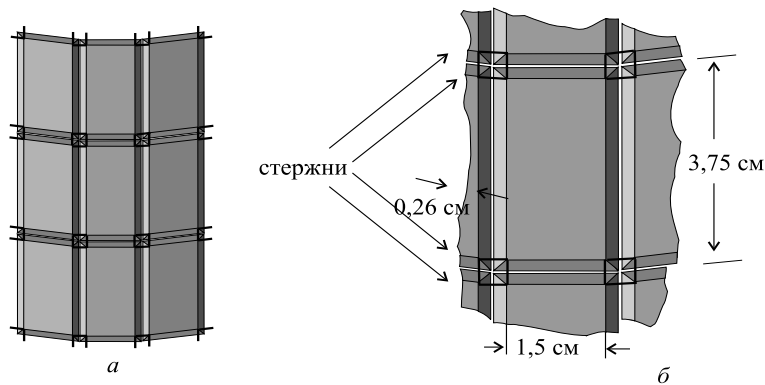


Рис. 5. Математическая модель панциря: *a* — фрагмент модели панциря; *б* — геометрические параметры отдельной пластинки

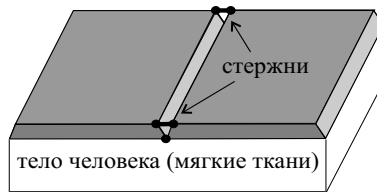


Рис. 6. Воспроизведение изгибных свойств панциря в математической модели

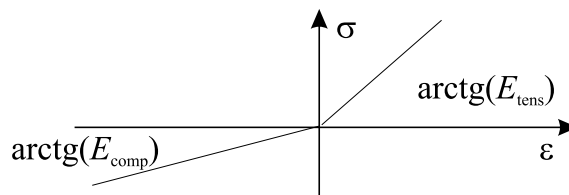


Рис. 7. Диаграмма одноосного деформирования стержня с разными свойствами сопротивления растяжению и сжатию

панциря (рис. 8). Остановимся на деталях моделирования. Панцирь моделируется восьмиузловыми тонкостенными элементами (четыре узла на нижней поверхности элемента и четыре узла на верхней), причем каждая из пластинок, представленных на рис. 5, *б*, разбивается в плане на 4 равных элемента (с точностью до их положения в пространстве), а по толщине — на один элемент. При моделировании панциря выбраны тонкостенные элементы, а не элементы оболочек по следующим причинам. Во-первых, при соединении панциря с телом человека для обеспечения сходимости решения к точному конечные элементы как панциря, так и тела человека должны иметь одинаковую аппроксимацию [12] (в настоящей работе — линейную), чего нельзя достигнуть при моделировании панциря конечными элементами оболочки, так как в каждом узле элемент оболочки имеет независимые степени свободы как перемещений, так и поворотов, а трехмерный элемент тела в узловых точках имеет в качестве степеней свободы только перемещения. Во-вторых, при использовании тонкостенных элементов на нижней и верхней лицевых поверхностях

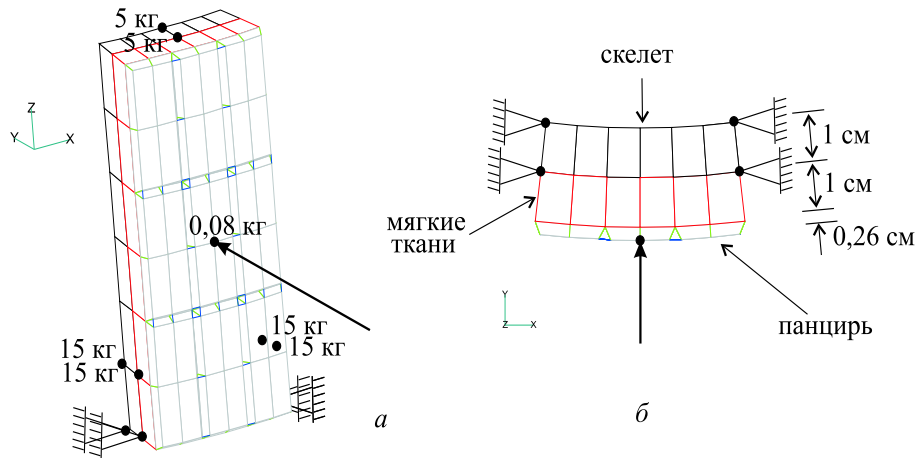


Рис. 8. Конечно-элементная модель системы “панцирь–тело человека”: *а* — общий вид; *б* — вид в плоскости  $z = 0$

элемента ставятся разные условия соединения (см. рис. 6): по верхней поверхности пластинки панциря соединяются стержневыми элементами из нелинейно-упругого материала с диаграммой, представленной на рис. 7, а по нижней поверхности соединяются узлы элементов. Такое моделирование соединения элементов невозможно провести элементами оболочки.

Для лучшего воспроизведения изгибных свойств тонкостенных билинейных элементов используется правило раздельного интегрирования мембранных и сдвиговых элементов матриц жесткости и векторов внутренних сил [6, 12].

Предполагается, что мягкая ткань тела человека находится в идеальном сцеплении с панцирем. Мягкая ткань моделируется линейно упругим материалом с модулем Юнга  $E = 15 \cdot 10^4$  Па, коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,45$  (близким к значению 0,5, соответствующему несжимаемому материалу). Мягкая ткань моделируется слоем трехмерных восьмиузловых элементов толщиной 1 см.

Скелет человека (в настоящем исследовании — ребра) моделируется совсем грубо, так как предполагается, что он находится в некотором отдалении от панциря и не оказывает существенного влияния на общую картину растрескивания. Материал скелета моделируется линейной упругой моделью. Модуль Юнга костей скелета взят близким к древесине; с учетом того, что скелет моделируется непрерывным пространственным слоем, модуль Юнга материала непрерывной модели взят в десять раз меньшим модуля Юнга древесины сосны, т.е.  $E = 0,9$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup> [16]. Толщина слоя модели скелета взята равной 1 см (см. рис. 8). Скелет, как и ткань человека, моделируется трехмерными восьмиузловыми элементами. Масса тела человека распределяется следующим образом. Масса головы со шлемом предполагается равной 10 кг; эта величина распределяется равномерно на верхнем слое скелета в виде сосредоточенных масс, приписанных к узловым точкам, показанным на рис. 8, *а*. Масса остальной части туловища (60 кг) распределяется равномерно по четырем узловым точкам на предпоследнем слое скелета.

Перемещение модели как жесткого целого предотвращается заданием нулевых компонент перемещений (по всем трем направлениям) в четырех узловых точках на нижнем слое скелета (рис. 8, *б*).

Стрела, контактирующая с панцирем, моделируется заданием сосредоточенной массы в центральной узловой точке модели панциря (рис. 8, *а*). Налетание стрелы на панцирь моделируется заданием ненулевой начальной скорости  $v_0$  (скорость подлета стрелы) в той узловой точке, где приписана сосредоточенная масса  $m = 0,08$  кг, равная массе наконечника стрелы.

Приведем некоторые характеристики численных моделей: при решениях всех задач для численного интегрирования матриц и векторов трехмерных элементов тела и скелета человека используются квадратурные формулы Гаусса–Лежандра с  $2 \times 2 \times 2$  точками интегрирования по локальным координатам  $r$ ,  $s$  и  $t$  соответственно. При решениях линейных задач (9) и (20) для численного интегрирования матриц и векторов тонкостенных элементов использовались  $2 \times 2 \times 2$  точки интегрирования мембранных компонент тензора деформаций и  $1 \times 1 \times 2$  точки интегрирования сдвиговых компонент этого тензора в соответствии с правилом раздельного интегрирования. Но при решении задач с физической нелинейностью численное интегрирование проводится с  $2 \times 2 \times 4$  точками интегрирования (4 точки по толщине) мембранных элементов и  $1 \times 1 \times 4$  — сдвиговых компонент тензора деформаций в соответствии с результатами численных

экспериментов, приведенных в [6].

Для предотвращения слишком “мягкого” деформирования тонкостенных элементов в направлении “нормали” [6] на взаимные перемещения верхних и нижних узлов накладываются ограничения, которые в конечно-элементном моделировании вводятся с помощью стержневых элементов, соединяющих верхний и нижний узлы лицевых поверхностей тонкостенных элементов. Используются следующие значения модуля Юнга  $E$  и площади поперечного сечения  $A$  этих стержневых элементов:  $E = 103$  ГПа,  $A = 1$  см<sup>2</sup>. Для стержневых элементов, соединяющих узловые точки на внешней поверхности панциря и служащих для имитации разной сопротивляемости изгибу панциря, используются следующие значения модуля: Юнга  $E_{\text{comp}} = 0,002 E$ ,  $E_{\text{tens}} = E$ , где  $E$  — модуль Юнга материала панциря. Но при решении линейных задач (9) и (20) используется модуль Юнга, равный  $E_{\text{tens}}$ , как при растяжении, так и при сжатии. Площадь поперечного сечения всех этих стержневых элементов берется равной 0,26 см<sup>2</sup>.

**2.3. Решение статической задачи линейной теории упругости по изгибу шарнирно опертой пластины.** Решение статической задачи линейной теории упругости по изгибу шарнирно опертой пластины под действием сосредоточенной силы, приложенной к ее центру, позволяет оценить начальную скорость  $v_0$  полета стрелы, при которой возникают зоны разрушения в материале пластины [5, 6]. Кроме того, решение этой вспомогательной задачи позволяет оценить точность решения нелинейной задачи о деформировании с разрушением панциря системы “панцирь–тело человека” в зависимости от используемой конечно-элементной аппроксимации геометрии и вектора перемещений.

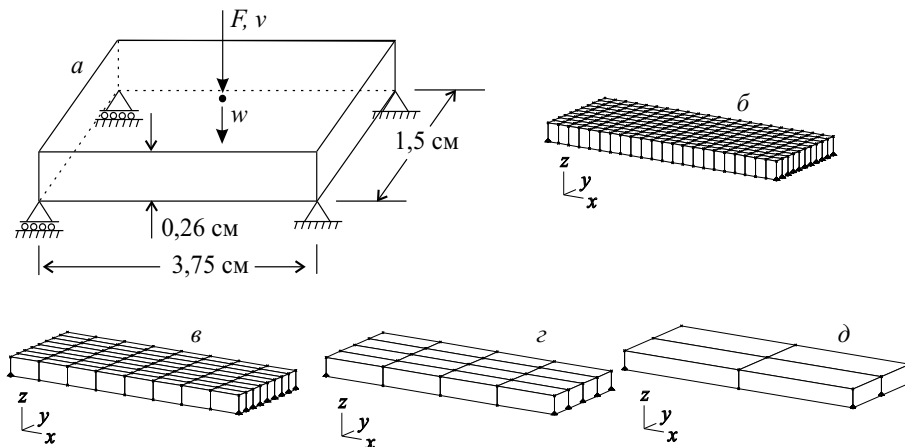


Рис. 9. Шарнирно опертая пластинка и ее конечно-элементные модели:  $a$  — геометрические параметры пластинки;  $b, c, d$  — разбиение пластинки на  $10 \times 22$ ,  $8 \times 8$ ,  $4 \times 4$  и  $2 \times 2$  элементов соответственно

Рассмотрим плоскую пластинку, близкую по своим геометрическим параметрам к пластинам, из которых набран панцирь (в математической модели панцирь набран из пластин с небольшой кривизной). Параметры пластины и граничные условия шарнирного закрепления представлены на рис. 9,  $a$ .

Для предотвращения появления сжимающей силы вдоль направления оси  $x$  перемещения узловых точек левого края пластинки в этом направлении не фиксируются (см. [17]). Кроме того, каждые два узла, расположенные друг против друга на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины, соединяются стержнями, служащими для наложения штрафа на взаимные перемещения соответствующих узловых точек, с характеристиками, представленными в п. 2.2.

С целью проверки сходимости решения к точному проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток, но по толщине пластинки всегда располагается только один элемент (рис. 9,  $b, c, d$ ). В расчетах использовано значение силы  $F = 1$  Н, так как, в силу линейности уравнений, решение для любого другого значения  $F$  можно получить простым масштабированием решения с этим значением силы. Расчеты проводились с помощью восьмиузловых элементов (четыре узла на верхней лицевой поверхности элемента и четыре — на нижней). Использовалось правило раздельного интегрирования матрицы жесткости элементов с порядком интегрирования  $2 \times 2 \times 4$  (т. е. мембранные компоненты тензора деформаций интегрировались с порядком  $2 \times 2 \times 4$ , а сдвиговые — с порядком  $1 \times 1 \times 4$ ). Четыре точки интегрирования по Гауссу по толщине пластины позволяют достаточно точно определить максимальное значение главного напряжения  $\sigma_1^m$  в пластинке. Оно определяется в результате обработки результатов расчетов следующим образом. Сначала в каждой точке интегрирования ансамбля элементов находится наибольшее главное напряжение  $\sigma_1$  в системе координат слоя [6], а затем находится максимальное значение  $\sigma_1^m$

по всем точкам интегрирования ансамбля элементов. Значение наименьшей скорости полета стрелы  $v_0$ , при которой впервые  $\sigma_1^m$  достигает предела прочности  $\sigma_t$ , находится из решения статической задачи по формуле, которую можно получить, пользуясь методикой, представленной в [5]:

$$v_0 = \frac{\sigma_t}{\sigma_1^m} \sqrt{\frac{w}{m}},$$

где  $w$  — значение прогиба под стрелой, полученное при решении статической задачи с силой  $F = 1$  Н,  $m = 0,08$  кг — масса наконечника стрелы.

Таблица 1

Значения прогиба  $w$ , максимального главного напряжения  $\sigma_1^m$  и минимальная скорость полета стрелы  $v_0$ , при которой выполняется равенство  $\sigma_1^m = \sigma_t$

сетка элементов	$\sigma_1^m$ ( $10^4$ Па)	$w$ ( $10^{-4}$ см)	$v_0$ (м/сек)
$22 \times 10$	52,15	0,4863	0,9455
$8 \times 8$	43,68	0,4736	1,114
$4 \times 4$	35,60	0,4461	1,327
$2 \times 2$	23,79	0,3442	1,746

Расчеты проведены для пластины из бронзы и результаты этих расчетов сведены в табл. 1. Решение, полученное на сетке из  $22 \times 10$  элементов, можно считать достаточно точным, так как соответствующее решение на той же сетке узлов, но образующих элементы более высокого порядка аппроксимации, а именно, составляющих сетку  $11 \times 5$  из 18-ти узловых элементов (один элемент содержит по 9 узлов на верхней и нижней лицевых поверхностях пластины, т.е. один 18-ти узловой элемент объединяет узлы четырех восьмиузловых элементов), дает практически те же значения  $\sigma_1^m$  и  $w$ . Деформированные конфигурации для всех расчетов приведены на рис. 10.

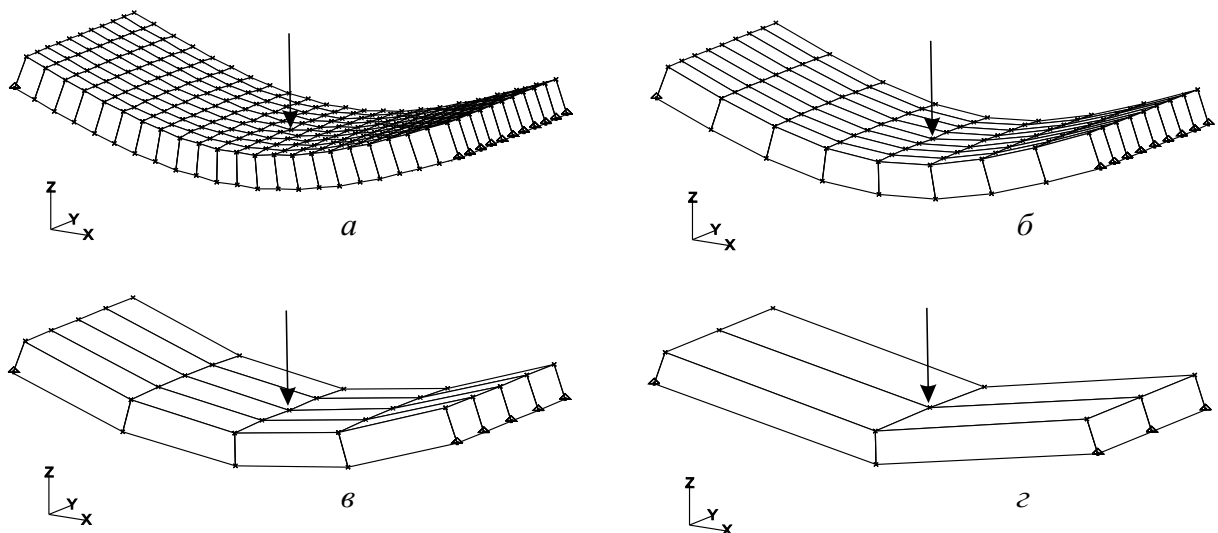


Рис. 10. Деформированные конфигурации шарнирно опертой пластинки под действием силы  $F = 1$  Н в расчетах с сетками из: (а)  $10 \times 22$ , (б)  $8 \times 8$ , (в)  $4 \times 4$  и (г)  $2 \times 2$  элементов (вектор перемещений увеличен в 10000 раз)

Анализ расчетов показывает, что для получения достаточно точного решения следует пользоваться сеткой, состоящей, по крайней мере, из  $8 \times 8$  элементов, однако в расчетах по разрушению панцирных пластин используется сетка из  $2 \times 2$  элементов в целях экономии машинного времени. Отметим, что один нелинейный расчет по деформированию системы “панцирь–тело человека” с моделированием разрушения

панциря с использованием сетки из  $2 \times 2$  элементов на одной пластине панциря требует около 15 часов работы компьютера с тактовой частотой 2 ГГц.

Еще раз подчеркнем необходимость использования отдельного интегрирования мембранных и сдвиговых компонент матрицы жесткости элементов. Так, численный расчет той же задачи с полным порядком  $(2 \times 2 \times 2)$  интегрирования на сетке из  $2 \times 2$  элементов дает значение прогиба  $w = 0,302 \cdot 10^{-5}$  см, что на порядок меньше значения прогиба, полученного на сетке из  $22 \times 10$  элементов.

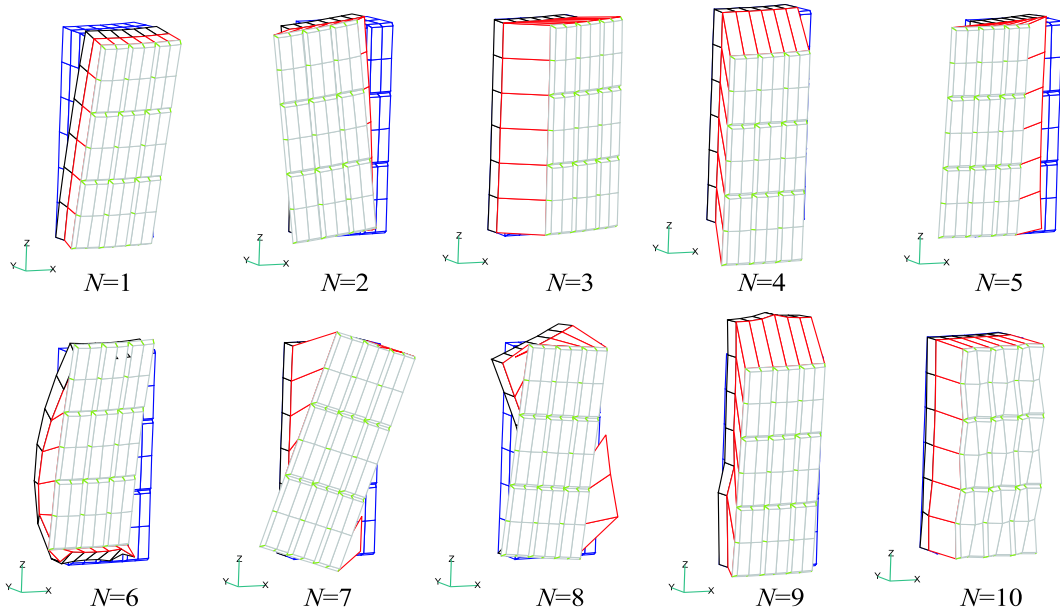


Рис. 11. Формы собственных колебаний системы “панцирь–тело человека” (материал панциря — бронза)

**2.4. Определение частот и соответствующих им форм собственных колебаний модели системы “панцирь–тело человека”.** Определим число  $L$  собственных частот, когда проявляются изгибные формы колебаний пластин, из которых составлен панцирь. Напомним, что механизмом разрушения металлических пластин является растяжение волокон панциря при его изгибе [5].

Сначала рассматривается модель панциря, изготовленного из бронзы. Численные эксперименты показали, что изгибы пластинки появляются только на 10-й форме. Соответствующие этим частотам собственные формы приведены на рис. 11. Вторая модель материала панциря — железо. Формы собственных колебаний качественно повторяют аналогичные для бронзы. Значения круговых частот собственных колебаний  $\omega$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

Десять наименьших круговых частот (Гц) собственных колебаний системы “панцирь–тело человека”

№ частоты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
бронза	83,2	300,7	344,1	360,5	382,8	415,2	477,6	850,5	873,0	1128,4
железо	83,2	301,2	354,4	372,9	384,0	415,3	506,8	850,5	873,0	1153,0

**2.5. Решение динамической задачи линейной теории упругости.** В настоящем пункте численное моделирование проводится в рамках теории, изложенной в п. 1.1. Численные решения дают возможность отметить некоторые особенности поведения панциря. В частности, линейный анализ позволяет определить наименьшую скорость подлета стрелы, при которой возникает разрушение панциря.

Задачи решены со значением скорости подлета стрелы  $v_0 = 1$  м/сек. Кривые зависимости перемещения от времени узловой точки панциря, к которой прикреплена сосредоточенная масса, равная массе наконечника стрелы, приведены на рис. 12, в, г. В силу линейности, решение для любого другого значения скорости получается пропорциональным масштабированием векторов перемещений и их скоростей.

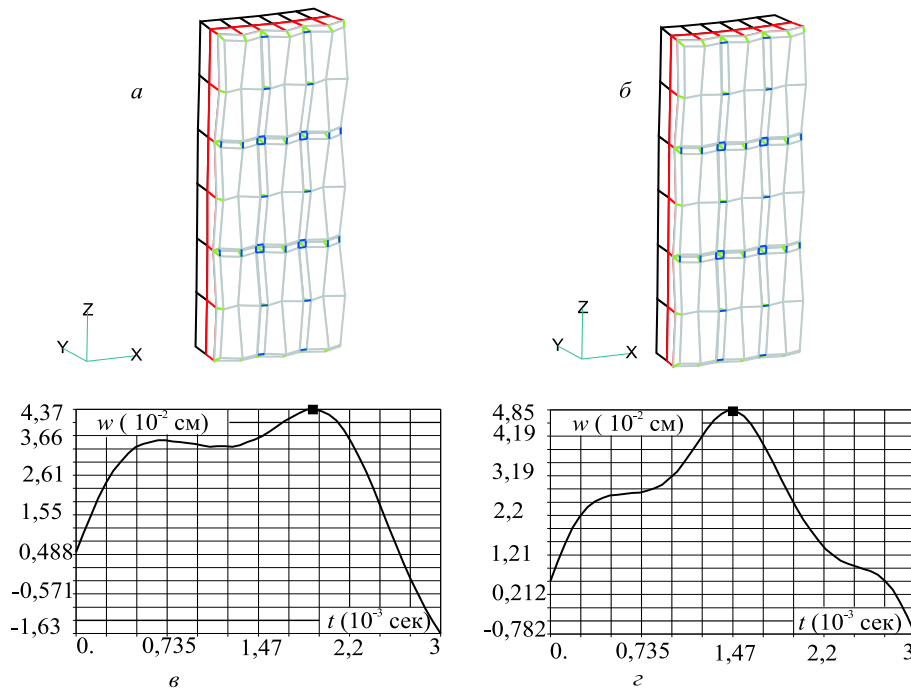


Рис. 12. Деформированные конфигурации и кривые зависимости перемещения узловой точки под стрелой системы “панцирь–тело человека” в решениях динамических линейных задач:

$a, б$  — деформированные конфигурации (компоненты вектора перемещений увеличены в 10 раз),

$v, z$  — зависимости перемещения узловой точки под стрелой от времени;

$a, v$  — система с панцирем из бронзы,  $б, z$  — система с панцирем из железа

Деформированные конфигурации в моменты времени  $t = 1,98 \cdot 10^{-3}$  сек для системы с бронзовым панцирем и  $t = 1,38 \cdot 10^{-3}$  сек для системы с железным панцирем, соответствующие максимальным значениям перемещения узловой точки под стрелой (отмечены квадратами на кривых рис. 12,  $v, z$ ), приведены на рис. 12,  $a, б$ . Максимальное главное растягивающее напряжение достигло в панцире из бронзы значения 0,05499 ГПа, а в панцире из железа — 0,06252 ГПа. Для панциря из бронзы напряжения несколько ниже, чем для аналогичного панциря из железа. Это обусловлено тем, что модуль Юнга бронзы меньше, чем у железа. Однако предел прочности железа  $\sigma_t$  больше, чем предел прочности бронзы. Максимальное главное напряжение достигает предел прочности при начальной скорости стрелы  $v_0 = 3,64$  м/сек в панцире из бронзы и  $v_0 = 6,4$  м/сек в панцире из железа.

**2.6. Решение динамической задачи с физической нелинейностью.** Получим решение задачи о деформировании системы “панцирь–тело человека” с учетом хрупкого разрушения материала панциря в геометрически линейной постановке, т.е. деформации материальных волокон и их повороты предполагаются малыми (см. п. 1.2). Рассматриваются панцири, изготовленные из бронзы и железа. В обоих случаях выбирается скорость подлета стрелы (начальная скорость сосредоточенной массы)  $v_0 = 12$  м/сек. При этой скорости заведомо происходит разрушение материала панциря в обоих случаях (см. п. 2.5).

Кривые зависимости перемещения от времени узловой точки панциря, к которой прикреплен сосредоточенная масса, приведены на рис. 13,  $v, z$ . Деформированные конфигурации в моменты времени  $t = 0,85 \cdot 10^{-3}$  сек для систем с бронзовым и железным панцирями (отмечены квадратами на кривых рис. 13,  $v, z$ ), приведены на рис. 13,  $a, б$ . При выбранном значении скорости подлета стрелы происходит разрушение материала бронзового панциря во всех конечных элементах, моделирующих панцирные пластины (т.е. произошло полное разрушение панциря). Остаточная скорость движения материальной точки с сосредоточенной массой (скорость стрелы после пробивания панциря) равна  $v_{\text{final}} = 7,3$  м/сек. Железный панцирь разрушается лишь частично — в тех элементах, которые непосредственно прилегают к сосредоточенной массе. Окончательная скорость движения стрелы составила для железного панциря  $v_{\text{final}} = 4,8$  м/сек.

Таким образом, математическое моделирование деформирования системы “панцирь–тело человека” показывает, что стрела пробивает панцирь насквозь в обоих случаях, но панцирь из железа почти в

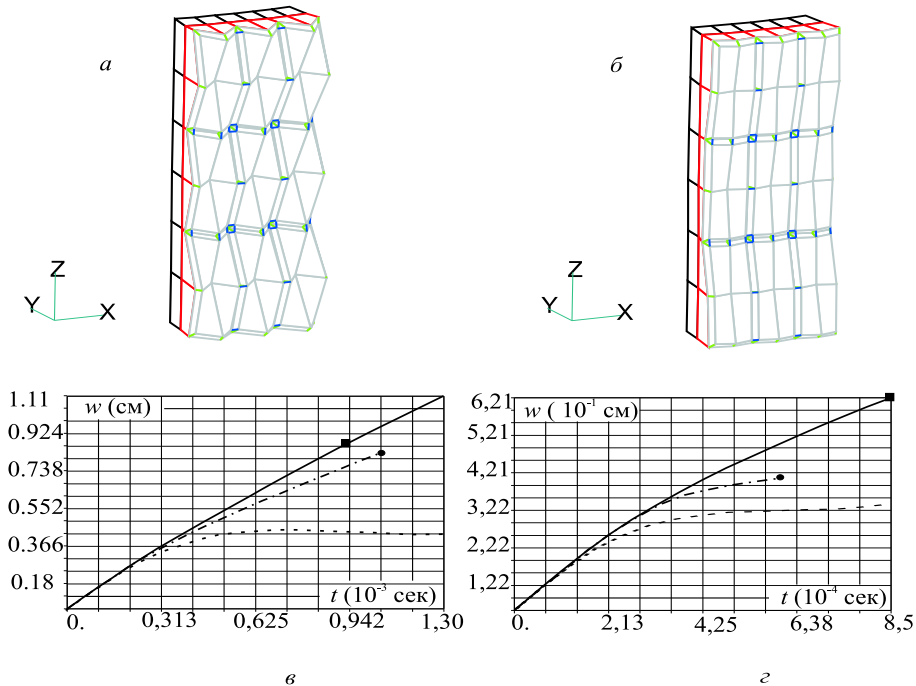


Рис. 13. Деформированные конфигурации и кривые зависимостей перемещения узловой точки под стрелой системы “панцирь–тело человека” в решениях динамических задач с физической нелинейностью: *a, б* — деформированные конфигурации (в реальном масштабе), *в, г* — зависимости перемещения узловой точки под стрелой от времени (сплошная линия — решение с учетом разрушения, пунктирная — решение в рамках линейной теории упругости, см. п. 2.5); *a, б* — система с панцирем из бронзы, *в, г* — система с панцирем из железа

два раза больше затормозил движение стрелы, чем панцирь из бронзы. Отметим, что при настоящем моделировании не учитывается дальнейшее торможение стрелы при ее вхождении в тело человека.

**2.7. Решение динамической задачи с физической и геометрической нелинейностями.** Приведенные в п. 2.6 расчеты показывают, что в процессе деформирования материальные волокна панциря претерпевают большие повороты. Для выяснения роли эффектов геометрической нелинейности проведем моделирование деформирования системы “панцирь–тело человека” в постановке, аналогичной представленной в п. 2.6, но теперь учитываем большие перемещения и повороты (см. п. 1.3).

Так же, как и в предыдущем случае, для обоих типов панциря в качестве начальной скорости движения стрелы выбраны значения  $v_0 = 12$  м/сек. Кривые зависимости перемещения от времени узловой точки панциря, к которой прикрепена сосредоточенная масса, приведены на рис. 13, *в, г* штрих-пунктирной линией. Деформированные конфигурации в моменты времени  $t = 1,08 \cdot 10^{-3}$  сек для системы с бронзовым панцирем и  $t = 0,60 \cdot 10^{-3}$  сек для системы с железным панцирем (отмечены точками на штрих-пунктирных кривых рис. 13, *в, г*) представлены на рис. 14. Решение качественно совпадает с решением, полученным в п. 2.6. Скорость движения сосредоточенной массы (стрелы) после разрушения бронзового панциря равна  $v_{\text{final}} = 6,0$  м/сек и  $v_{\text{final}} = 1,8$  м/сек после разрушения железного панциря.

Отличие от соответствующих расчетов в геометрически линейной постановке состоит в том, что учет геометрической нелинейности приводит к увеличению жесткости панциря. Как следствие, максимальные главные напряжения достигают предела прочности при меньших значениях времени. При этом панцирь оказывает большее сопротивление стреле по сравнению с сопротивлением, полученном при решении задачи в геометрически линейной постановке.

**2.8. Анализ результатов расчетов.** Для отображения основных особенностей поведения системы “панцирь–тело человека” в линейной постановке достаточно шага по времени

$$\Delta t_{\text{max}} = T_{10}/20 = 0,000272 \text{ сек},$$

где  $T_{10} = 2\pi/\omega_{10} = 0,00545$  сек — период колебаний системы по 10-й частоте  $\omega_{10} = 1153,0$  Гц для панциря, набранного из железных пластин. В численных решениях линейных задач о деформировании системы “панцирь–тело человека” используется шаг по времени  $\Delta t = 3 \cdot 10^{-5}$  сек  $< \Delta t_{\text{max}}$ .

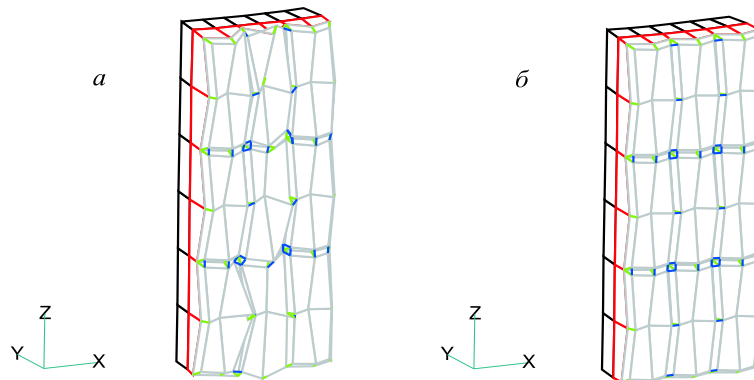


Рис. 14. Деформированные конфигурации (в реальном масштабе) системы “панцирь–тело человека”, полученные в решениях динамических задач с физической и геометрической нелинейностями: *a* — система с панцирем из бронзы, *b* — система с панцирем из железа

Таблица 3

Основные параметры численных решений динамических задач о деформировании системы “панцирь–тело человека” (NSTE — общее число шагов по времени)

материал панциря	линейный расчет		расчет с физической нелинейностью		расчет с физической и геометрической нелинейностями	
	$\Delta t$ сек	NSTE	$\Delta t$ сек	NSTE	$\Delta t$ сек	NSTE
бронза	$3 \cdot 10^{-5}$	100	$1 \cdot 10^{-7}$	13276	$5 \cdot 10^{-8}$	21640
железо	$3 \cdot 10^{-5}$	100	$1 \cdot 10^{-7}$	8549	$1 \cdot 10^{-7}$	6118

При решениях же нелинейных задач этот шаг по времени использовался как стартовое значение для первой попытки решения. Если итерационная процедура метода Ньютона–Рафсона не позволяла получить решение, удовлетворяющее критериям сходимости, то шаг по времени  $\Delta t$  уменьшался до тех пор, пока не удавалось получить решение задачи, моделирующей разрушение панциря стрелой. В табл. 3 приведены основные параметры численных решений динамических задач о деформировании системы “панцирь–тело человека” сосредоточенной массой, имеющей начальную скорость  $v_0 = 1$  м/сек при решении линейных задач и  $v_0 = 12$  м/сек — при решении нелинейных задач.

Для оценки объема вычислений приведем основные характеристики конечно-элементной модели системы “панцирь–тело человека”: NUMNP=228, NEQ=672, МК=327, ММ=129, где NUMNP — общее число узловых точек модели, NEQ — число степеней свободы (число уравнений), МК, ММ — соответственно максимальное и среднее значения ширины профиля касательной матрицы жесткости [7].

Отметим полезность иерархического подхода к решению задачи о деформировании сложной системы “панцирь–тело человека”. Решение статической задачи о деформировании шарнирно опертой пластинки под действием сосредоточенной силы помогает оценить “качество” конечно-элементной сетки. Как уже ранее отмечалось, из этого анализа следует, что сетка для решения задачи о деформировании системы “панцирь–тело человека” выбрана довольно грубой вследствие сложностей, возникающих при решении нелинейных задач с большим числом степеней свободы. Решение задачи на собственные колебания исследуемой системы помогает определить тот шаг по времени  $\Delta t$ , с которым нужно решать задачу в линейной постановке так, чтобы при минимальных объемах вычислений получить те значения напряжений, при которых происходит разрушение панциря при его изгибе. Решение линейной динамической задачи помогает выявить особенности деформирования исследуемой системы в предположении, что пластины панциря не разрушаются. Решение задачи с физической нелинейностью, когда учитывается разрушение пластин панциря, дает как картину разрушения панциря при его пробивании стрелой, так и оценивает скорость движения стрелы после пробивания панциря. “Расплатой” за такое моделирование разрушения панциря является существенное увеличение процессорного времени численного решения задачи (см. табл. 3). Наконец, учет геометрической нелинейности помогает при незначительном увеличении объема вычислений получить более реалистичную модель разрушения панциря и внести существенные поправки



в оценке скорости движения стрелы в результате пробивания панциря (см. п. 2.7).

**Заключение.** Численным решением задачи о деформировании системы “панцирь–тело человека” показано преимущество панцирей, изготовленных из железа, по сравнению с бронзовыми панцирями с точки зрения их защитных свойств. Решающую роль в этом преимуществе играет то, что предел прочности железа в два раза больше предела прочности бронзы. Из решений задач получено, что после пробивания железного панциря скорость движения стрелы в три раза ниже, чем после пробивания бронзового панциря.

В настоящей работе сделаны только первые попытки численного моделирования деформирования системы “панцирь–тело человека”. Укажем на некоторые моменты моделирования, требующие дальнейшего усовершенствования. Во-первых, геометрическая модель этой системы может быть существенно улучшена. Во-вторых, надо использовать более мелкую сетку элементов (в соответствии с результатами численных экспериментов, проведенных в п. 2.2). В-третьих, получена не реалистичная картина деформирования панциря: происходит разрушение не только той пластины, которая взаимодействует со стрелой, но и соседние пластины. Это свидетельствует о том, что используется модель слишком жесткого сочленения пластин. На самом деле пластины в панцире соединяются с помощью кожаных ремней, так что воздействие пластины, подверженной удару стрелы, на соседние пластины “смягчается”. Для более реалистичного моделирования деформирования панциря желательно учесть такой тип соединения пластин. Более правдоподобный анализ системы “панцирь–тело человека” требует дальнейшей детализации и дальнейшего исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00195, 04-06-80248) и гранта Министерства образования РФ А03-2.10-617.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробейников С.Н., Худяков Ю.С. Анализ функциональных свойств защитного вооружения номадов Центральной Азии // Археология, этнография и антропология Евразии. 2001. 8, № 4. 108–115.
2. Коробейников С.Н., Худяков Ю.С., Шутов А.В. Методы математического моделирования для анализа защитных свойств бронзовых шлемов номадов Центральной Азии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. 5, № 2. 126–138.
3. Худяков Ю.С., Соловьев А.В. Из истории защитного доспеха в Северной и Центральной Азии // Сб. статей “Военное дело древнего населения Северной Азии”. Новосибирск: Наука, 1987. 135–163.
4. Худяков Ю.С., Юй Су-Хуа. Комплекс вооружения сянби // Сб. статей “Древности Алтая”. Горно-Алтайск: Изд-во ГАГУ, 2000. 37–48.
5. Шутов А.В. Математическая модель ударного взаимодействия стрелы с панцирным покрытием // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. 6, № 2. 145–155.
6. Коробейников С.Н., Худяков Ю.С., Шутов А.В. Математическое моделирование хрупкого разрушения тонких тел // Вычислительные методы и программирование. 2002. 3, № 2. 94–117.
7. Bathe K.-J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1982.
8. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
9. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. London: McGraw Hill, 1991.
10. Curnier A. Computational methods in solid mechanics. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1994.
11. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: Изд-во “ДАС”, 2001.
12. Hughes T.J.R. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.
13. Korobeinikov S.N., Bondarenko M.I. A material and geometric nonlinear analysis of shells including large rotation increments // Numerical Methods in Engineering, 1996. Proc. of the 2nd ECCOMAS Conf. / J.-A. Désidéri *et al.* (Eds). Chichester: John Wiley & Sons, 1996. 754–762.
14. Korobeinikov S.N., Agapov V.P., Bondarenko M.I., Soldatkin A.N. The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // Proc. of the Intern. Conf. on Numerical Methods and Applications / B. Sendov *et al.* (Eds). Sofia: Publ. House of the Bulgarian Acad. of Sci., 1989. 228–233.
15. Бобров Л.А. Защитное вооружение кочевников Центральной Азии и Южной Сибири в период позднего средневековья // Сибирская заимка. 2000. №7. <http://www.zaimka.ru/kochevie/bobrov1.shtml>.
16. Краткий физико-технический справочник (т. 1) / Бронштейн И.Н. и др. М: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1960.
17. Коробейников С.Н., Шутов А.В. Выбор отсчетной поверхности в уравнениях пластин и оболочек // Вычислительные технологии. 2003. 8, №6. 38–59.