

УДК 539.375

**БЕЗМОМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОЛЗУЧЕСТИ ТОНКИХ ПРОСЛОЕК**В. Д. Кургузов<sup>1</sup>

Рассматривается плоская деформация тонких прослоек между жесткими блоками в случае, когда наряду с упругопластическим деформированием прослойки происходит ее вязкое деформирование (ползучесть). Проводится сопоставление построенной модели с традиционной моделью установившейся ползучести прослоек и с моделью упругопластического деформирования прослоек без ползучести. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ НШ-319.2003.1

Исследованию плоской пластической деформации прослоек между жесткими блоками посвящено большое число работ [1, 2]. Однако изучалось лишь предельное состояние прямолинейных прослоек постоянной толщины при частных видах нагрузок. Ниже сформулирована модель плоской деформации прослоек, имеющая целью моделирование всего процесса упругопластического деформирования прослоек от момента возникновения пластических деформаций до достижения предельного состояния при комбинированном действии нагрузок растяжения (сжатия), сдвига и изгиба прослоек в общем случае, когда прослойка может быть криволинейной, а толщина ее переменной.

**1. Аппроксимация зависимости напряжений от скоростей деформаций.** В качестве уравнений упругопластического деформирования, определяющих зависимость напряжений от средних в промежутке времени  $[t; t + \tau]$  скоростей деформаций, принимаются уравнения [3]

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}(t + \tau) &= \sigma'_{ij}(t) + \tau[2\mu e'_{ij} - \lambda \sigma'_{ij}(t + \tau)], \quad \sigma(t + \tau) = \sigma(t) + K\tau e, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \\ e'_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \quad e = \delta^{ij}e_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\delta^{ij}\sigma_{ij}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций в декартовой системе координат;  $\lambda$  — неотрицательная величина:  $\lambda = 0$  при  $J_2(t + \tau) < J_2^*$ , в остальных случаях  $\lambda$  определяется условием  $J_2(t + \tau) = J_2^*$  при идеальной пластичности и условием

$$\lambda = \frac{(1 - \alpha)[J_2(t + \tau) - J_2^*]}{2\alpha J_2(t + \tau)}$$

при изотропном упрочнении. Здесь

$$J_2(t + \tau) = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}(t + \tau)\sigma'_{ij}(t + \tau), \quad J_2^* = \max(J_2^s, J_2^m),$$

$J_2^s$  — значение  $J_2$ , при котором элемент среды впервые начинает деформироваться пластически,  $J_2^m$  — максимальное за предыдущую историю деформирования элемента среды значение  $J_2$ ,  $\alpha = \mu'/\mu$  — коэффициент упрочнения,  $\mu'$  — касательный модуль диаграммы чистого сдвига,  $\mu$  — модуль сдвига,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Тем же методом, каким в [4] доказываются единственность скоростей напряжений в задачах упругопластического деформирования, можно показать, что задача определения напряжений  $\sigma_{ij}(t + \tau)$ , удовлетворяющих (1), уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t + \tau)}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям  $\sigma_{ij}(t + \tau)n_j|_{S_s} = p_i$ ,  $u_i|_{S_u} = u_i^0$ , может иметь лишь единственное решение. При изотропном упрочнении единственным будет и решение задачи определения скоростей деформаций  $e_{ij}$ . В

<sup>1</sup> Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. акад. Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск; e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

случае идеальной пластичности величина  $\lambda$  может определяться уравнением (1) неоднозначно. Поэтому в случае идеальной пластичности наряду с теми  $e_{ij}$ , которые определяются излагаемым ниже алгоритмом, могут соответствовать найденным по этому алгоритму  $\sigma_{ij}(t + \tau)$  и другие величины  $e'_{ij}$ .

Ввиду нелинейности уравнений (1) удовлетворить им можно лишь последовательными приближениями. Ниже используется процесс последовательных приближений, состоящий из двух чередующихся этапов:

1) решение задачи о деформировании прослойки в промежутке  $[t; t + \tau]$  при заданной в (1) зависимости  $\lambda$  от координат;

2) вычисление  $\lambda$  по найденным на предыдущем этапе скоростям деформаций при помощи равенств [3]:  
 — в случае идеальной пластичности:  $\tau\lambda = 0$  при  $J_2^e \leq J_2^*$ ,  $\tau\lambda = \sqrt{J_2^e/J_2^*} - 1$  при  $J_2^e > J_2^*$ ;

— в случае изотропного упрочнения:  $\frac{1}{1 + \tau\lambda} = \frac{\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 + (1 - \varkappa^2)(J_2^*/J_2^e)}}{1 + \varkappa}$ .

Здесь  $J_2^e = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} e'_{ij}$ ,  $\sigma'_{ij} = 2\mu\tau e'_{ij} + \sigma'_{ij}(t)$ . При вычислении первого приближения принимается, что  $\lambda = 0$  всюду в прослойке.

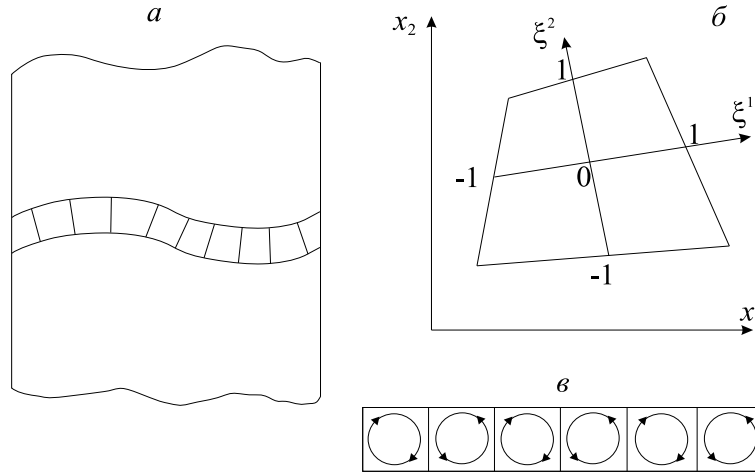


Рис. 1. Представление прослойки в виде слоя четырехугольных элементов

**2. Уравнения жесткости элементов прослойки.** В рассматриваемой безмоментной модели плоской деформации прослойки используется представление прослойки в виде слоя четырехугольных элементов (рис. 1, а). Под уравнениями жесткости элемента понимаются зависимости усилий на гранях элемента от средних величин скоростей граней. При построении уравнений жесткости в каждом из элементов вводится косоугольная система координат, показанная на рис. 1, б. Уравнения (1) записываются в виде

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t + \tau) &= a^{\alpha\beta ij} \tau \hat{e}_{ij} + \hat{\sigma}_x^{\alpha,\beta}, \quad \hat{e}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} \cdot \hat{\mathbf{G}}_\beta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\beta} \cdot \hat{\mathbf{G}}_\alpha \right), \\ \hat{\sigma}_x^{\alpha,\beta} &= (1 - \tilde{\lambda}) \hat{g}^{\alpha,\beta} \sigma(t) + \tilde{\lambda} \hat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t), \quad \sigma(t) = \frac{1}{3} [\hat{g}_{\alpha,\beta} \hat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t) + \sigma^{33}(t)], \\ \sigma^{33}(t + \tau) &= \left( K - \frac{2}{3} \mu \tilde{\lambda} \right) \hat{g}^{\alpha,\beta} \tau \hat{e}_{\alpha,\beta} + (1 - \tilde{\lambda}) \sigma(t) + \tilde{\lambda} \sigma^{33}(t), \\ a^{\alpha\beta ij} &= \left( K - \frac{2}{3} \mu \tilde{\lambda} \right) \hat{g}^{\alpha,\beta} \hat{g}^{ij} + \mu \tilde{\lambda} (\hat{g}^{\alpha i} \hat{g}^{\beta j} + \hat{g}^{\alpha j} \hat{g}^{\beta i}), \quad \tilde{\lambda} = \frac{1}{1 + \tau\lambda}, \\ \hat{g}^{\alpha,\beta} &= \hat{\mathbf{G}}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{G}}^\beta, \quad \hat{\mathbf{G}}^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \mathbf{e}^i, \quad \hat{\mathbf{G}}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_i, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \end{aligned} \tag{3}$$

а уравнения (2) — в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha(t + \tau)}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g} \mathbf{f} &= 0, \quad \mathbf{p}^\alpha(t + \tau) = A^{\alpha,\beta} \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\beta} + \mathbf{p}_x^\alpha, \\ A^{\alpha,\beta} &= \sqrt{g} a^{\alpha ij} \hat{\mathbf{G}}_i \hat{\mathbf{G}}_j, \quad \mathbf{p}_x^\alpha = \hat{\sigma}_x^{\alpha,\beta} \sqrt{g} \hat{\mathbf{G}}_\beta, \quad \sqrt{g} = |\hat{\mathbf{G}}_1 \times \hat{\mathbf{G}}_2|. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $\widehat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t+\tau)$ ,  $\widehat{e}_{\alpha,\beta}$  — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций в системе координат  $\xi^\alpha$ ,  $\mathbf{e}_i$  — базисные векторы декартовой системы координат  $x^i$ . Ниже с целью упрощения записи формул величины  $\widehat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t+\tau)$ ,  $\mathbf{p}^\alpha(t+\tau)$  обозначены через  $\widehat{\sigma}^{\alpha,\beta}$ ,  $\mathbf{p}^\alpha$ .

При построении уравнений жесткости используется одна аппроксимация векторов усилий  $\mathbf{p}^\alpha$ :

$$\mathbf{p}^\alpha = \mathbf{p}^{(0)\alpha} + \mathbf{p}^{(1)\alpha} \xi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (5)$$

и три аппроксимации вектора скорости:

$$\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^{(0)\alpha} + \mathbf{u}^{(1)\alpha} \xi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{u}^{(0)}$  — средняя в элементе величина скорости,  $\mathbf{u}^\alpha$  — средние величины скоростей на линиях  $\xi^\alpha = \text{const}$ .

Принимается, что  $\mathbf{p}^\alpha$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}^\alpha$  связаны уравнениями

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g} \mathbf{f} \right) d\omega = 0, \quad \int_{\omega} \left( \mathbf{p}^\alpha - A^{\alpha,\beta} \tau \frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta} - \mathbf{p}_\times^\alpha - \mathbf{q}^\alpha \right) d\omega = 0, \quad \omega = \{\xi^1, \xi^2 \in [-1; 1]\}, \quad (7)$$

$$\mathbf{q}^1 = \gamma_1 \sqrt{g} a^{1212} \tau \left( \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \xi^1} \cdot \widehat{\mathbf{G}}_2 \right) \widehat{\mathbf{G}}_2, \quad \mathbf{q}^2 = \gamma_2 \sqrt{g} a^{1212} \tau \left( \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \xi^2} \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1 \right) \widehat{\mathbf{G}}_1, \quad \mathbf{u}^{(0)\alpha} - \mathbf{u}^{(0)} - \Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = 0,$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  — положительные постоянные, определяющие величину сил вязкого сопротивления  $\mathbf{q}^\alpha$ . Эти силы вводятся в уравнения (7) для подавления паразитных поворотов указанного на рис. 1, 6 вида, которые при  $\mathbf{q}^\alpha = 0$  могут возникать в элементах в случае, когда граничные условия на поверхностях прослойки формулируются в виде условий для касательных напряжений. Опыт численных расчетов показывает, что задание величин  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,05$  обычно бывает достаточно для подавления паразитных поворотов.

В (7)  $\Lambda^\alpha$  — тензор, удовлетворяющий условию  $\Lambda^\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ , причем равенство возможно лишь при  $\mathbf{a} = 0$ . В рассматриваемой модели принимается

$$\Lambda^\alpha = (B^\alpha)^{-1}, \quad B^\alpha = \frac{3}{4} \tau \int_{\omega} A^{\alpha\alpha} d\omega. \quad (8)$$

При таком выборе  $\Lambda^\alpha$  уравнения жесткости элемента на основе линейных аппроксимаций (5), (6) близки к уравнениям жесткости на основе квадратичных аппроксимаций, аналогичных изложенным в [5]. Уравнения (5)–(8) в случае прямоугольных упругих элементов аналогичны тем, которые использовались в [5] при построении уравнений жесткости упругих элементов.

Обозначим

$$\mathbf{p}^\alpha|_{\xi^\alpha=\pm 1} = \mathbf{p}_\pm^\alpha, \quad \mathbf{u}^\alpha|_{\xi^\alpha=\pm 1} = \mathbf{u}_\pm^\alpha.$$

Из (5)–(8) следует, что

$$\mathbf{p}_+^1 - \mathbf{p}_-^1 + \mathbf{p}_+^2 - \mathbf{p}_-^2 + 2(\sqrt{g} \mathbf{f})^{(0)} = 0,$$

$$\mathbf{p}_+^\alpha - \mathbf{p}_-^\alpha - 3(A^{\alpha\alpha})^{(0)} \tau (\mathbf{u}_+^\alpha + \mathbf{u}_-^\alpha - 2\mathbf{u}^{(0)}) = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{p}_+^\alpha + \mathbf{p}_-^\alpha - (A^{\alpha,\beta})^{(0)} \tau (\mathbf{u}_+^\beta - \mathbf{u}_-^\beta) - 2(\mathbf{p}_\times^\alpha + \mathbf{q}^\alpha)^{(0)} = 0,$$

где символ  $(\dots)^{(0)}$  означает осреднение по  $\omega$ . Исключая  $\mathbf{u}$  в (9), находим, что уравнения жесткости элемента прослойки можно записать в виде

$$\mathbf{p}_+^\alpha - \mathbf{p}_-^\alpha = D^{\alpha,\beta} \tau (\mathbf{u}_+^\beta + \mathbf{u}_-^\beta) + 2\chi^\alpha, \quad \mathbf{p}_+^\alpha + \mathbf{p}_-^\alpha = C^{\alpha,\beta} \tau (\mathbf{u}_+^\beta - \mathbf{u}_-^\beta) + 2(\mathbf{p}_\times^\alpha)^{(0)}, \quad (10)$$

где  $D^{\alpha,\beta}$ ,  $C^{\alpha,\beta}$ ,  $\chi^\alpha$  зависят только от коэффициентов уравнений (9).

Из (5)–(7) следует, что

$$\int_{\omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\mathbf{p}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] d\omega = \int_{\omega} \left\{ \left( A^{\alpha,\beta} \tau \frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \left( \Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \right. \\ \left. + \sqrt{g} a^{1212} \tau \left[ \gamma_1 \left( \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \xi^1} \cdot \widehat{\mathbf{G}}_2 \right)^2 + \gamma_2 \left( \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \xi^2} \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1 \right)^2 \right] + \mathbf{p}_\times^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \right\} d\omega. \quad (11)$$

Используя (11), можно показать, что по заданным  $\mathbf{p}_\pm^\alpha$  уравнения (10) определяют скорости  $\mathbf{u}_\pm^\alpha$  с точностью до скоростей поступательного перемещения элемента.

Обозначим через  $\mathbf{u}_*, \mathbf{p}_*$  решения уравнений (3), (4). Из (3) – (7) следует, что

$$\int_{\omega} \left[ A^{\alpha, \beta} \tau \frac{\partial(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}^\beta)}{\partial \xi^\beta} \cdot \frac{\partial(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}^\alpha)}{\partial \xi^\alpha} + \Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \mathbf{q}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \right] d\omega =$$

$$= \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} [(\mathbf{p}_*^\alpha - \mathbf{p}^\alpha) \cdot (\mathbf{u}_* - \mathbf{u}^\alpha)] + [\sqrt{g} \mathbf{f} - (\sqrt{g} \mathbf{f})^{(0)}] \cdot \mathbf{u}_* + \left( \mathbf{u}_* - \mathbf{u}^{(0)\alpha} - \Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_*^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \right. \quad (12)$$

$$\left. + [(A^{\alpha, \beta})^{(0)} - A^{\alpha, \beta}] \tau \frac{\partial \mathbf{u}_*^\beta}{\partial \xi^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_*^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + [(\mathbf{p}_*^\alpha)^{(0)} - \mathbf{p}_*^\alpha + \mathbf{p}^\alpha - \mathbf{p}^{(0)\alpha} + (\mathbf{q}^\alpha)^{(0)}] \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_*^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \right\} d\omega.$$

Учитывая, что  $\mathbf{p}_*^\alpha$  — величина порядка произведения вектора напряжений на линейный размер элемента, находим, что правая часть равенства (12) состоит из слагаемых порядка линейного размера элемента и слагаемых порядка  $\gamma_1, \gamma_2$ . Отсюда следует, что представляя прослойку состоящей из последовательно увеличивающегося числа слоев элементов с уравнениями жесткости (10), можно получить последовательность решений, сходящихся к решению уравнений (3), (4). Рассматриваемая модель деформирования прослойки с представлением ее в виде одного слоя элементов — первое приближение в этой последовательности решений.

**3. Условия на поверхностях прослойки.** Ограничимся классом задач, в которых перемещения блоков заданы как функции времени. Обозначим через  $\mathbf{w}_\pm$  скорости частиц жестких блоков на границах раздела их с прослойкой.

В рассматриваемой модели нормальные составляющие скоростей на границах раздела блоков с прослойками считаются непрерывными:

$$(\mathbf{u}_\pm^2 - \mathbf{w}_\pm) \cdot \widehat{\mathbf{G}}^2|_{\xi^2=\pm 1} = 0.$$

Касательные напряжения на поверхностях прослойки не могут превосходить величину  $\tau_* = \sqrt{J_2^*}$ . Поэтому в рассматриваемой модели принимается

$$(\mathbf{u}_+^2 - \mathbf{w}_+) \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1|_{\xi^2=1} = 0 \quad (13)$$

при условии, что

$$|\mathbf{p}_+^2 \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1|_{\xi^2=1} \leq \tau_* |\widehat{\mathbf{G}}_1|_{\xi^2=1}. \quad (14)$$

Если при условии (13) неравенство (14) нарушается, то (13) заменяется условием

$$(\mathbf{p}_+^2 \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1)|_{\xi^2=1} = \pm \tau_* |\widehat{\mathbf{G}}_1|_{\xi^2=1}. \quad (15)$$

При этом принимается, что знак правой части (15) тот же, что и знак  $(\mathbf{p}_+^2 \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1)|_{\xi^2=1}$  при условии (13).

Если при условии (15) нарушается неравенство

$$[(\mathbf{p}_+^2 \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1)(\mathbf{w}_+ - \mathbf{u}_+^2) \cdot \widehat{\mathbf{G}}_1]|_{\xi^2=1} \geq 0, \quad (16)$$

то (15) заменяется условием (13). Неравенство (16) означает неотрицательность мощности диссипации при проскальзывании прослойки.

Аналогично (13) – (16) формулируются условия для касательных составляющих скоростей и векторов напряжений на поверхностях  $\xi^2 = -1$  элементов прослойки.

**4. Алгебраические уравнения безмоментной модели прослойки.** Из (10) и граничных условий на гранях  $\xi^2 = \pm 1$  элементов прослойки получаем

$$\mathbf{p}_+^1 = A\mathbf{u}_+^1 + B\mathbf{u}_-^1 + \varphi, \quad \mathbf{p}_-^1 = C\mathbf{u}_+^1 + D\mathbf{u}_-^1 + \psi. \quad (17)$$

Уравнения (17) и условия непрерывности векторов  $\mathbf{u}^1, \mathbf{p}^1$  на общих гранях смежных элементов образуют систему уравнений

$$\mathbf{p}_{i+1}^1 = \tau(A_{i+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i+1}^1 + B_{i+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_i^1) + \varphi_{i+\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{p}_i^1 = \tau(C_{i+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i+1}^1 + D_{i+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_i^1) + \psi_{i+\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$i = 0, 1, \dots, N - 1$ , где  $N$  — число элементов. Дополняя систему уравнений (18) граничными условиями

$$\mathbf{p}_0^1 = L_0 \tau \mathbf{u}_0^1 + \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{p}_N^1 = L_N \tau \mathbf{u}_N^1 + \boldsymbol{\psi}_N, \quad (19)$$

получим замкнутую относительно  $\mathbf{p}_i^1, \mathbf{u}_i^1$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) систему алгебраических уравнений рассматриваемой модели прослойки. Коэффициенты системы (18) и (19) зависят от  $\tau, \lambda$  и вида условий для касательных составляющих скоростей и векторов напряжений на гранях  $\xi^2 = \pm 1$  элементов прослойки.

При заданных  $\tau, \lambda$  и заданном виде условий на гранях  $\xi^2 = \pm 1$  элементов решение системы (18) и (19) может быть вычислено прогонкой. По найденному решению значения  $\lambda$  корректируются так, как это указано в пункте 1, а граничные условия на гранях  $\xi^2 = \pm 1$  элементов корректируются так, как это указано в пункте 3. Процесс итераций заканчивается, когда выполнены условия (13)–(16) и аналогичные условия на гранях  $\xi^2 = -1$  элементов, а значения  $\lambda$  в очередной итерации мало отличаются от значений  $\lambda$  в предыдущей итерации.

**5. Предельное состояние прямолинейной прослойки.** В качестве примеров применения уравнений сформулированной модели деформирования прослоек рассматривались процессы идеального упругопластического деформирования прямолинейной прослойки, у которой один из блоков был неподвижен, а второй перемещался поступательно и поворачивался. Вычислялись необходимые для осуществления процесса деформирования силы  $P, Q$  и момент  $M$ :

$$P = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{22}^+ dx_1, \quad Q = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_{12}^+ dx_1, \quad M^\pm = \int_{-l/2}^{l/2} x_1 \sigma_{22}^\pm dx_1,$$

$$M = M^+ - \frac{1}{2} Qh = M^- + \frac{1}{2} Qh = \frac{1}{2} (M^+ + M^-).$$

Здесь  $l, h$  — длина и толщина прослойки,  $\sigma_{22}^\pm, \sigma_{12}^\pm$  — нормальные и касательные напряжения на гранях  $\xi^2 = \pm 1$  элементов прослойки.

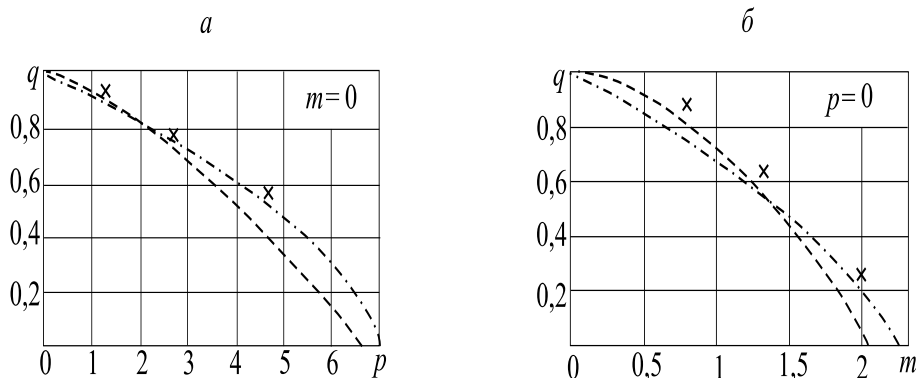


Рис. 2. Предельные нагрузки при растяжении со сдвигом (а) и изгибе со сдвигом (б) прослойки

Вычисления велись до достижения предельного состояния, т.е. состояния, в котором деформирование прослойки происходит при неизменных величинах  $P, Q, M$ . Полученные значения предельных нагрузок при растяжении со сдвигом и изгибе со сдвигом прослойки с  $l/h = 10$  показаны крестиками на рис. 2.

Здесь и ниже  $q = \frac{Q}{\tau_* l}, p = \frac{P}{\tau_* l}, m = \frac{2M}{\tau_* l^2}$ .

Штриховыми линиями на рис. 2 указаны предельные нагрузки, соответствующие приближенным решениям Л. М. Качанова [6].

На рис. 3 приведено распределение нормальных и касательных напряжений на поверхностях прослойки в предельном состоянии при растяжении со сдвигом. Сплошные линии соответствуют численному решению при  $q = 0,51, p = 5,03$ , штриховые — решению [6] при  $q = 0,51$ . Напряжения  $\sigma_{22}^+$  симметричны относительно  $x_1 = 0$  и поэтому на рис. 3 приведено их распределение только при  $x_1 \geq 0$ .

На рис. 4 представлено распределение нормальных и касательных напряжений на поверхностях прослойки в предельном состоянии при изгибе со сдвигом. Сплошные линии соответствуют численному решению при  $q = 0,62, m = 1,42$ , штриховые — решению Л. М. Качанова [6] при  $q = 0,62$ . Графики касательных напряжений  $\sigma_{12}^+, \sigma_{12}^-$  симметричны относительно  $x_1 = 0$  и поэтому на рис. 4 показаны лишь при  $x_1 \leq 0$ .

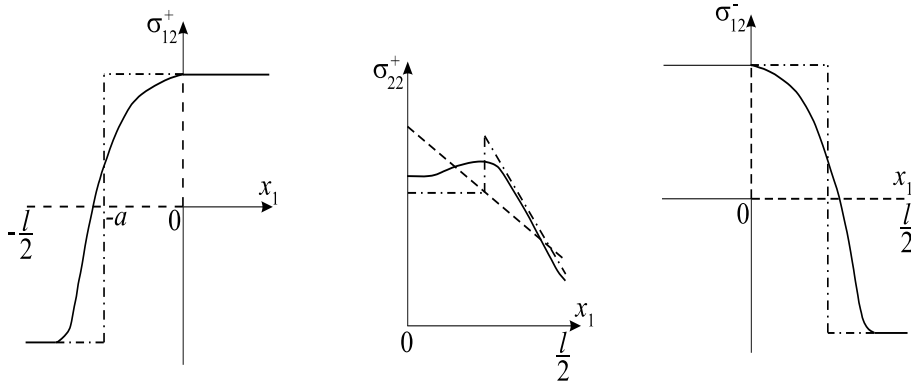


Рис. 3. Распределение нормальных и касательных напряжений на поверхностях прослойки в предельном состоянии при растяжении со сдвигом

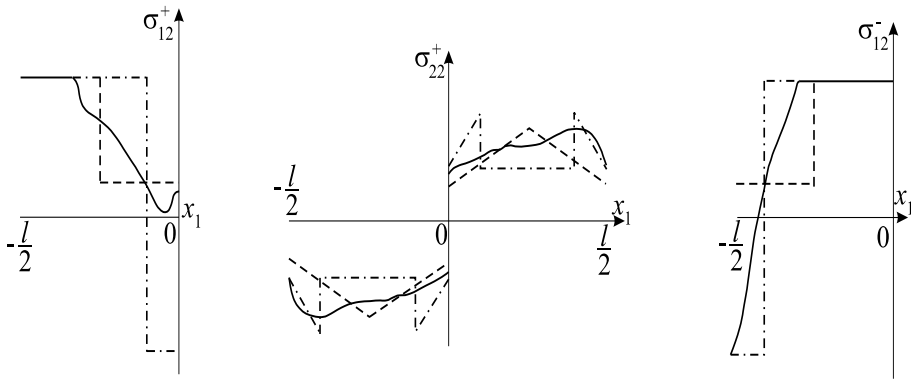


Рис. 4. Распределение нормальных и касательных напряжений на поверхностях прослойки в предельном состоянии при изгибе со сдвигом

Штрихпунктирные линии на рис. 2, а и рис. 3 соответствуют приближенному решению задачи о предельном состоянии прослойки при растяжении со сдвигом, полученному на основе уравнений

$$\sigma_{12}^{\pm} = \mp \tau_*, \quad h \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 2\tau_*, \quad \sigma_{11}|_{x_1 = -\frac{l}{2}} = 0, \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} = 2\tau_* \quad \text{при} \quad -\frac{l}{2} \leq x_1 \leq -a; \quad (20)$$

$$\sigma_{12}^+ = \sigma_{12}^- = \tau_*, \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{11} \quad \text{при} \quad -a \leq x_1 \leq 0. \quad (21)$$

Аналогично формулируются уравнения рассматриваемого приближенного решения при  $0 \leq x_1 \leq l/2$ . Напряжение  $\sigma_{11}$  считается непрерывным всюду в прослойке.

По этому решению

$$p = (1 - q) \left[ 2 + \frac{l}{2h} (1 + q) \right], \quad m = 0. \quad (22)$$

Полагая, что в одной части прослойки реализуется предельное состояние сжатия со сдвигом, а в другой — предельное состояние растяжения со сдвигом, причем оба состояния описываются уравнениями вида (20) и (21) и напряжение  $\sigma_{11}$  всюду в прослойке непрерывно, получим семейство приближенных решений задачи о предельном состоянии прослойки. Соответствующее этим решениям распределение нормальных напряжений на грани  $\xi^2 = 1$  прослойки показано на рис. 5, а. При заданной длине  $l = l_1 + l_2$  прослойки оно зависит от трех параметров:  $a_1, a_2, l_1$ . Зависимости  $m, p, q$  от этих параметров можно записать в

виде

$$\begin{aligned} q &= \frac{a_1 + a_2}{l}, \\ p &= \frac{l_1 - l_2}{l} \left(2 + \frac{l}{2h}\right) - \frac{a_1 - a_2}{l} \left(2 + \frac{l}{2h} q\right), \\ m &= 2\alpha(1 - \alpha) \left\{ 2 - \beta - \gamma + \frac{l}{4h} [1 - \alpha\beta^2 - (1 - \alpha)\gamma^2] \right\}, \\ \frac{l_1}{l} &= \alpha, \quad \frac{l_2}{l} = 1 - \alpha, \quad \frac{a_1}{l_1} = \beta, \quad \frac{a_2}{l_2} = \gamma \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно (23) в предельном состоянии при изгибе со сдвигом имеем

$$m = (1 - q) \left[ 1 + \frac{l}{8h} (1 + q) \right], \quad p = 0. \quad (24)$$

Соотношение (24) между  $m$ ,  $q$  и соответствующее ему распределение нормальных и касательных напряжений при  $q = 0,62$ ,  $m = 1,42$  представлены на рис. 2, б и рис. 4 штрихпунктирными линиями.

Согласно (23) в предельном состоянии при растяжении с изгибом имеем

$$m = \left( 1 + \frac{l}{8h} \right) \left[ 1 - \frac{p^2}{\left( 2 + \frac{l}{2h} \right)^2} \right], \quad q = 0. \quad (25)$$

Из численных экспериментов следует, что соотношение (25) между  $m$  и  $p$  при  $l/h \geq 10$  хорошо соответствует предельным величинам нагрузок по уравнениям сформулированной модели деформирования прослоек.

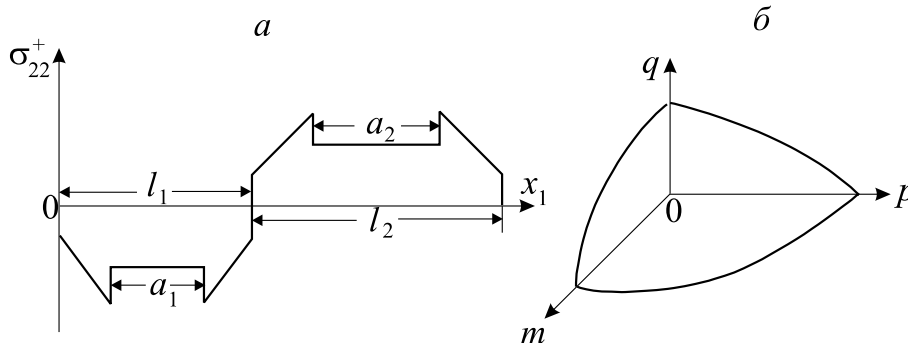


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений на грани  $\xi^2 = 1$  прослойки (а); поверхность предельных нагрузок в пространстве  $m$ ,  $p$ ,  $q$  (б)

В пространстве  $m$ ,  $p$ ,  $q$  уравнениям (23) соответствует семейство поверхностей (рис. 5, б), каждая из которых проходит через кривые (22), (24), (25). Полагая в (23)  $a_1/a_2 = l_1/l_2$ , получим

$$m = \left[ 1 + \frac{l}{8h} (1 + q) \right] \left\{ 1 - q - \frac{p^2}{(1 - q) \left[ 2 + \frac{l}{2h} (1 + q) \right]^2} \right\}. \quad (26)$$

Уравнение (26) — одна из возможных простых аппроксимаций соотношения между  $m$ ,  $p$ ,  $q$  в предельном состоянии прямолинейной прослойки.

**6. Упругопластическое деформирование и ползучесть тонких прослоек.** Рассмотрим плоскую деформацию тонких прослоек между жесткими блоками в случае, когда наряду с упругопластическим деформированием прослойки происходит ее вязкое деформирование (ползучесть). Будем использовать представление прослойки в виде слоя четырехугольных элементов. Предположим, что моментами на гранях элементов можно пренебречь. Построим уравнения, определяющие зависимость усилий на гранях элементов от средних скоростей граней, и проведем сопоставление построенной модели деформирования с моделью установившейся ползучести прослоек [7] и с моделью упругопластического деформирования прослоек без ползучести [8].

Ниже для описания процесса упругопластического деформирования используются уравнения идеальной пластичности и изотропного упрочнения [3], а для описания процесса ползучести — степенной закон ползучести [9]. Аппроксимация зависимости напряжений от скоростей деформаций строится на основе обобщения результатов [8, 10] на случай, когда наряду с упругопластическим деформированием происходит ползучесть. В качестве уравнений, определяющих зависимость напряжений в момент времени  $t + \tau$  от напряжений в момент времени  $t$  и средних в промежутке времени  $[t; t + \tau]$  скоростей деформаций, принимаются уравнения

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}(t + \tau) &= \sigma'_{ij}(t) + \tau[2\mu e'_{ij} - \lambda \sigma'_{ij}(t + \tau)], \quad \sigma(t + \tau) = \sigma(t) + K\tau e, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \\ \lambda &= \lambda_c + \lambda_p, \quad \lambda_c = \mu B \left[ J_2 \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \right]^{(m-1)/2}, \quad B \geq 0, \quad 0 \leq m \leq 1, \\ e'_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad e = \delta^{ij} e_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma, \\ \sigma &= \frac{1}{3} \delta^{ij} \sigma_{ij}, \quad J_2 \left( t + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \sigma'_{ij} \left( t + \frac{\tau}{2} \right), \quad \sigma'_{ij} \left( t + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{1}{2} [\sigma'_{ij}(t) + \sigma'_{ij}(t + \tau)], \end{aligned} \tag{27}$$

где  $\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i$  — компоненты тензоров напряжений, скоростей деформаций и векторов скоростей в декартовой системе координат  $x_i$  соответственно;  $\mu$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\lambda_p$  — неотрицательная величина:  $\lambda_p = 0$  при  $J_2(t + \tau) < J_2^*$ , в остальных случаях  $\lambda_p$  определяется условием  $J_2(t + \tau) = J_2^*$  при идеальной пластичности и условием  $\lambda_p = \frac{(1 - \varkappa)[J_2(t + \tau) - J_2^*]}{2\varkappa\tau J_2(t + \tau)}$

при изотропном упрочнении. Здесь  $J_2(t + \tau) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij}(t + \tau) \sigma'_{ij}(t + \tau)$ ,  $J_2^* = \max(J_2^s, J_2^m)$ ;  $J_2^s$  — значение  $J_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$ , при котором элемент среды впервые начинает деформироваться пластически,  $J_2^m$  — максимальное за предыдущую историю деформирования значение  $J_2$ ;  $\varkappa = \frac{\mu'}{\mu}$  — коэффициент упрочнения;  $\mu'$  — касательный модуль диаграммы чистого сдвига.

Решение задачи о деформировании прослойки в промежутке  $[t; t + \tau]$  с использованием уравнений (27) строится методом последовательных приближений, который является очевидным обобщением результатов [8, 10] на случай, когда наряду с пластическими деформациями есть деформации ползучести.

Обозначим через  $\lambda^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) последовательность приближений функции  $\lambda$ . В качестве  $\lambda^0$  принимается значение  $\lambda$ , соответствующее предыдущему шагу по времени. На первом шаге по времени принимается, что  $\lambda^0 = 0$ . При вычислении  $(k + 1)$ -го приближения напряжений и скоростей деформаций величина  $\lambda$  в уравнениях (27) полагается равной  $\lambda^k$ . При идеальных пластических деформациях величина  $\lambda^{k+1}$  определяется по скоростям деформаций, соответствующим  $(k + 1)$ -му приближению, по формулам

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &= \lambda_c^{k+1} \quad \text{при} \quad J_2^e \leq J_2^*(1 + \tau\lambda_c^{k+1})^2, \\ \tau\lambda^{k+1} &= \sqrt{\frac{J_2^e}{J_2^*}} - 1 \quad \text{при} \quad J_2^e > J_2^*(1 + \tau\lambda_c^{k+1})^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_c^{k+1} &= B \left\{ \frac{1}{8} \left[ \sigma'_{ij}(t) + \frac{\sigma_{ij}^{t'e}}{1 + \tau\lambda^k} \right] \left[ \sigma'_{ij}(t) + \frac{\sigma_{ij}^{t'e}}{1 + \tau\lambda^k} \right] \right\}^{(m-1)/2}, \\ \sigma_{ij}^{t'e} &= 2\mu\tau e'_{ij} + \sigma'_{ij}(t), \quad J_2^e = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{t'e} \sigma_{ij}^{t'e}. \end{aligned}$$

При изотропном упрочнении величина  $\lambda^{k+1}$  определяется формулами

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &= \lambda_c^{k+1} \quad \text{при} \quad J_2^e \leq J_2^*(1 + \tau\lambda_c^{k+1})^2, \\ \frac{1}{\tau\lambda^{k+1}} &= \frac{\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 + (1 - \varkappa)(1 + \varkappa + 2\varkappa\lambda_c^{k+1})(J_2^*/J_2^e)}}{1 + \varkappa + 2\varkappa\lambda_c^{k+1}} \quad \text{при} \quad J_2^e > J_2^*(1 + \tau\lambda_c^{k+1})^2. \end{aligned}$$

В рассматриваемой модели так же, как и в пункте 2, прослойка представляется в виде слоя четырехугольных элементов (рис. 1, а), в каждом из которых вводится косоугольная система координат  $\xi^1, \xi^2 \in [-1; 1]$  (рис. 1, б).



Уравнения (27) записываются в виде

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t+\tau) &= a^{\alpha\beta ij}\tau e_{ij} + \hat{\sigma}_x^{\alpha,\beta}, \quad \hat{e}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} \cdot \hat{\mathbf{G}}_\beta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\beta} \cdot \hat{\mathbf{G}}_\alpha \right), \\ \sigma^{33}(t+\tau) &= \left( K - \frac{2}{3} \mu \tilde{\lambda} \right) \hat{g}^{\alpha,\beta} \tau \hat{e}_{\alpha,\beta} + (1 - \tilde{\lambda}) \sigma(t) + \tilde{\lambda} \sigma^{33}(t), \\ a^{\alpha\beta ij} &= \left( K - \frac{2}{3} \mu \tilde{\lambda} \right) \hat{g}^{\alpha,\beta} \hat{g}^{ij} + \mu \tilde{\lambda} (\hat{g}^{\alpha i} \hat{g}^{\beta j} + \hat{g}^{\alpha j} \hat{g}^{\beta i}), \quad \tilde{\lambda} = \frac{1}{1 + \tau \lambda}, \\ \hat{g}^{\alpha,\beta} &= \hat{\mathbf{G}}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{G}}^\beta, \quad \hat{\mathbf{G}}^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \mathbf{e}^i, \quad \hat{\mathbf{G}}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_i, \quad \alpha, \beta = 1, 2,\end{aligned}\tag{28}$$

а уравнения равновесия — в виде

$$\frac{\partial \mathbf{p}^\alpha(t+\tau)}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g} \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{p}^\alpha(t+\tau) = \hat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t+\tau) \sqrt{g} \hat{\mathbf{G}}_\beta,$$

где  $\sqrt{g} = |\hat{\mathbf{G}}_1 \times \hat{\mathbf{G}}_2|$ ;  $\hat{\sigma}^{\alpha,\beta}$ ,  $\hat{e}_{\alpha,\beta}$  — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций в системе координат  $\xi^\alpha$ ;  $\mathbf{e}_i$  — базисные векторы декартовой системы координат  $x^i$ ;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$  — векторы скоростей и массовых сил. Из (28) следует:

$$\mathbf{p}^\alpha(t+\tau) = A^{\alpha,\beta} \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\beta} + \mathbf{p}_x^\alpha, \quad A^{\alpha,\beta} = \sqrt{g} a^{\alpha ij \beta} \hat{\mathbf{G}}_i \hat{\mathbf{G}}_j, \quad \mathbf{p}_x^\alpha = \hat{\sigma}_x^{\alpha,\beta} \sqrt{g} \hat{\mathbf{G}}_\beta.$$

В дальнейшем с целью упрощения записи формул будем обозначать  $\hat{\sigma}^{\alpha,\beta}(t+\tau)$ ,  $\mathbf{p}^\alpha(t+\tau)$  через  $\hat{\sigma}^{\alpha,\beta}$ ,  $\mathbf{p}^\alpha(t+\tau)$ .

Так же, как и в пункте 2, усилия в элементе аппроксимируются линейными полиномами

$$\mathbf{p}^\alpha = \mathbf{p}^{(0)\alpha} + \mathbf{p}^{(1)\alpha} \xi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2,\tag{29}$$

аппроксимация же скоростей будет отличаться, так как в пункте 2 рассматривается упругопластическое деформирование без ползучести. В этом случае большие скорости деформаций сдвига в окрестности границ  $\xi^2 = \pm 1$  прослойки с жесткими блоками возможны только при напряжениях в этой окрестности, соответствующих условию пластичности. Поэтому при упругопластических деформациях без ползучести большие скорости деформаций сдвига в окрестности границ  $\xi^2 = \pm 1$  можно моделировать разрывами скоростей на этих границах при достижении касательными напряжениями предела текучести. Такое моделирование позволяет использовать аппроксимации скоростей в виде линейных полиномов. При ползучести большие скорости деформаций сдвига в окрестности границ прослойки с жесткими блоками могут происходить и при касательных напряжениях, меньших предела текучести. Это затрудняет моделирование больших скоростей деформаций сдвига в окрестности границ  $\xi^2 = \pm 1$  путем введения разрывов скоростей и использования линейных полиномов для аппроксимации скоростей.

Ниже аппроксимации векторов средних скоростей  $\mathbf{u}^\alpha$  на линиях  $\xi^\alpha = \text{const}$  строятся по правилу

$$\mathbf{p}^\alpha \sim \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha},$$

где символ  $\sim$  означает одинаковую степень соединенных этим символом аппроксимирующих полиномов. В соответствии с этим правилом

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^{(0)\alpha} + \sum_{k=1}^2 \mathbf{u}^{(k)\alpha} P_k^\alpha, \quad \alpha = 1, 2,\tag{30}$$

где  $P_k^\alpha$  — полиномы Лежандра:  $P_0^\alpha = 1$ ,  $P_1^\alpha = \xi^\alpha$ ,  $P_2^\alpha = \frac{1}{2} [3(\xi^\alpha)^2 - 1]$ . В (29), (30) векторы  $\mathbf{p}^{(0)\alpha}$ ,  $\mathbf{p}^{(1)\alpha}$ ,  $\mathbf{u}^{(0)\alpha}$ ,  $\mathbf{u}^{(1)\alpha}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)\alpha}$  постоянны в пределах элемента.

Принимается, что  $\mathbf{p}^\alpha$ ,  $\mathbf{u}^\alpha$  связаны уравнениями

$$\begin{aligned}\int_\omega \left( \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g} \mathbf{f} \right) d\omega = 0, \quad \int_\omega \left( \mathbf{p}^\alpha - A^{\alpha,\beta} \tau \frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta} - \mathbf{p}_x^\alpha - \mathbf{q}^\alpha \right) P_k^\alpha d\omega = 0, \\ \mathbf{q}^1 = \gamma_1 \left[ \sqrt{g} a^{1212} \tau \left( \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \xi^1} \cdot \hat{\mathbf{G}}_2 \right) \hat{\mathbf{G}}_2 \right] \Bigg|_{\xi^1 = \xi^2 = 0}, \quad \mathbf{q}^2 = \gamma_2 \left[ \sqrt{g} a^{1212} \tau \left( \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \xi^2} \cdot \hat{\mathbf{G}}_1 \right) \hat{\mathbf{G}}_1 \right] \Bigg|_{\xi^1 = \xi^2 = 0}\end{aligned}\tag{31}$$

при  $k = 0, 1, \omega = \{\xi^1, \xi^2 \in [-1; 1]\}$ , где  $\gamma_1, \gamma_2$  — неотрицательные постоянные, определяющие величину сил вязкого сопротивления  $\mathbf{q}^\alpha$ . Эти силы вводятся для подавления паразитных поворотов элементов, которые могут возникать в случае, когда граничные условия на поверхности прослойки формулируются в виде условий для касательных напряжений.

Обозначим

$$\mathbf{p}^\alpha|_{\xi^\alpha=\pm 1} = \mathbf{p}_\pm^\alpha, \quad \mathbf{u}^\alpha|_{\xi^\alpha=\pm 1} = \mathbf{u}_\pm^\alpha. \quad (32)$$

Из (30), (32) следует:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_+^\alpha - \mathbf{u}_-^\alpha) + 3 \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{u}_+^\alpha + \mathbf{u}_-^\alpha) - \mathbf{u}^{(0)} \right] P_1^\alpha.$$

Полагаем, что размеры элементов прослойки в направлении  $\xi^1$  малы и поэтому можно считать тензоры  $A^{\alpha,\beta}$  и векторы  $\sqrt{g} \mathbf{f}, \mathbf{p}_\times^\alpha$  в (31) постоянными вдоль  $\xi^1$ , равными этим тензорам и векторам при  $\xi^1 = 0$ . Используя это условие, находим, что уравнения (31) при  $\alpha = 1, 2$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_+^1 - \mathbf{p}_-^1 + \mathbf{p}_+^2 - \mathbf{p}_-^2 + 2\mathbf{f}_0 &= 0, \\ \mathbf{p}_+^\alpha + \mathbf{p}_-^\alpha - A_0^{\alpha 1} \tau(\mathbf{u}_+^1 - \mathbf{u}_-^1) - A_0^{\alpha 2} \tau(\mathbf{u}_+^2 - \mathbf{u}_-^2) - 3A_1^{\alpha 2} \tau(\mathbf{u}_+^2 + \mathbf{u}_-^2 - 2\mathbf{u}^{(0)}) - 2\tilde{\mathbf{p}}_0^\alpha - 2\mathbf{q}^\alpha &= 0, \\ \mathbf{p}_+^1 - \mathbf{p}_-^1 - 3A_0^{11} \tau(\mathbf{u}_+^1 + \mathbf{u}_-^1 - 2\mathbf{u}^{(0)}) &= 0, \\ \frac{2}{3} (\mathbf{p}_+^2 - \mathbf{p}_-^2) - A_1^{21} \tau(\mathbf{u}_+^1 - \mathbf{u}_-^1) - A_1^{22} \tau(\mathbf{u}_+^2 - \mathbf{u}_-^2) - 3A_2^{22} \tau(\mathbf{u}_+^2 + \mathbf{u}_-^2 - 2\mathbf{u}^{(0)}) - 2\tilde{\mathbf{p}}_1^2 &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\mathbf{f}_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{g} \mathbf{f} d\xi^2, \quad A_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A^{\alpha,\beta}(\xi^2)^k d\xi^2, \quad \tilde{\mathbf{p}}_k^\alpha = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{p}_\times^\alpha(\xi^2)^k d\xi^2. \quad (34)$$

В случае упругопластического деформирования без ползучести уравнения (33) совпадают с уравнениями (9), если считать тензоры  $A^{\alpha,\beta}$  и векторы  $\mathbf{p}_\times^\alpha$  постоянными, равными этим тензорам и векторам в точке  $\xi^1 = \xi^2 = 0$ .

Если моделирование больших скоростей деформаций сдвига на границах  $\xi^2 = \pm 1$  производится без введения разрывов скоростей на этих границах, то тензоры  $A^{\alpha,\beta}$  и векторы  $\mathbf{p}_\times^\alpha$  в (34) нельзя считать постоянными. Ниже для вычисления интегралов (34) используется квадратичная формула Симпсона и, соответственно, учитывается информация о тензорах  $A^{\alpha,\beta}$  и векторах  $\mathbf{p}_\times^\alpha$  в точках  $\xi^1 = 0, \xi^2 = 0, \pm 1$ .

Исключая  $\mathbf{u}^{(0)}$  из уравнений (33), находим, что уравнения жесткости элемента прослойки можно записать в виде

$$\mathbf{p}_+^\alpha - \mathbf{p}_-^\alpha = D^{\alpha,\beta} \tau(\mathbf{u}_+^\beta + \mathbf{u}_-^\beta) + 2\chi^\alpha, \quad \mathbf{p}_+^\alpha + \mathbf{p}_-^\alpha = C^{\alpha,\beta} \tau(\mathbf{u}_+^\beta - \mathbf{u}_-^\beta) + 2\tilde{\mathbf{p}}^\alpha, \quad (35)$$

где  $D^{\alpha,\beta}, C^{\alpha,\beta}, \chi^\alpha, \tilde{\mathbf{p}}^\alpha$  зависят только от коэффициентов уравнений (33).

Так же, как и в пункте 3, можно показать, что по заданным  $\mathbf{p}_\pm^\alpha$  уравнения (35) определяют скорости  $\mathbf{u}_\pm^\alpha$  с точностью до скоростей поступательного перемещения.

Ограничимся классом задач, в которых перемещения жестких блоков заданы как функции времени. Обозначим через  $\mathbf{w}_\pm$  скорости частиц блоков на границах их раздела с прослойками. В рассматриваемой модели принимается, что скорости частиц блоков и прослойки непрерывны:

$$(\mathbf{u}_\pm^2 - \mathbf{w}_\pm)|_{\xi^2=\pm 1} = 0. \quad (36)$$

Из (35), (36) следует:

$$\mathbf{p}_+^1 = A\mathbf{u}_+^1 + B\mathbf{u}_-^1 + \varphi, \quad \mathbf{p}_-^1 = C\mathbf{u}_+^1 + D\mathbf{u}_-^1 + \psi. \quad (37)$$

Уравнения (37) и условия непрерывности векторов  $\mathbf{u}^1, \mathbf{p}^1$  на общих гранях смежных элементов образуют систему уравнений

$$\mathbf{p}_{i+1}^1 = \tau(A_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i+1}^1 + B_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_i^1) + \varphi_{i+\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{p}_i^1 = \tau(C_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i+1}^1 + D_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_i^1) + \psi_{i+\frac{1}{2}}, \quad (38)$$

$i = 0, 1, \dots, N - 1$ , где  $N$  — число элементов. Дополняя систему уравнений (38) граничными условиями

$$\mathbf{p}_0^1 = L_0 \tau \mathbf{u}_0^1 + \varphi_0, \quad \mathbf{p}_N^1 = L_N \tau \mathbf{u}_N^1 + \psi_N, \quad (39)$$

получим замкнутую относительно  $\mathbf{p}_i^1, \mathbf{u}_i^1$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) систему алгебраических уравнений рассматриваемой модели прослойки.

Коэффициенты уравнений (37), (39) зависят от  $\tau$  и значений  $\lambda$  при  $\xi^2 = 0, \pm 1$ . При заданных значениях  $\lambda$  решение системы (37), (39) может быть вычислено прогонкой. По найденному решению величина  $\lambda$  корректируется в соответствии с алгоритмом, приведенным выше. Процесс итераций заканчивается, когда  $\lambda$  при  $\xi^2 = 0, \pm 1$  в очередной итерации мало отличается от соответствующих значений  $\lambda$  в предыдущей итерации.

**7. Изгиб тонкой прослойки. Решение Л. М. Качанова.** Рассмотрим задачу о чистом изгибе тонкого ползучего слоя ( $-l \leq x \leq l, -h \leq y \leq h$ ) в случае плоской деформации (рис. 6). Для тонкого слоя длина  $2l$  значительно превосходит толщину  $2h$ , т. е.  $\delta = h/l \ll 1$ .

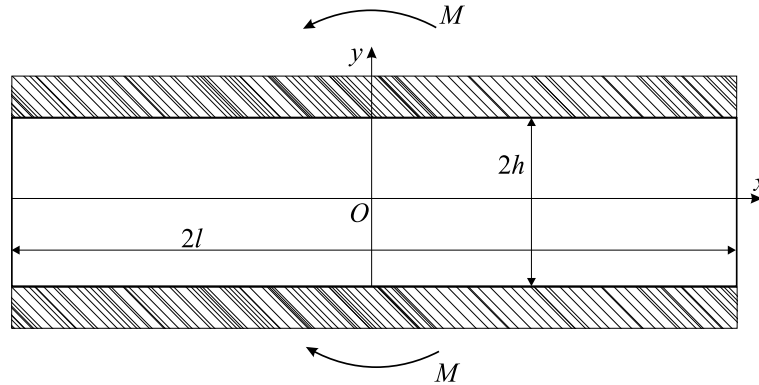


Рис. 6. Изгиб тонкого ползучего слоя

Введем безразмерные координаты  $\xi = x/l, \eta = y/l$ . Касательное напряжение  $\tau_{xy}$  является нечетной функцией  $y$ ; примем, что в условиях ползучести

$$\tau_{xy} = R(\xi)\eta/\delta, \quad (40)$$

где  $R(\xi)$  — неизвестная функция. В условиях плоской деформации компоненты напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  равны нулю, скорость течения  $w$  в направлении  $z$  также равна нулю.

Сечение  $\eta = 0$  остается плоским и неподвижным по симметрии. Вследствие недеформируемости жестких блоков сечения  $\eta = \pm\delta$  остаются плоскими, но поворачиваются. Можно поэтому принять, что в тонкой прослойке все сечения  $\eta = \text{const}$  остаются плоскими, но поворачиваются на некоторый угол. Следовательно,

$$v = v_1(\eta)\xi, \quad (41)$$

где  $v_1(\eta)$  — произвольная функция, причем  $v_1(0) = 0$ . Составляющая скорости  $u$  по оси  $x$  по условию прилипания на поверхности контакта равна нулю, т. е.

$$u|_{\eta=\pm\delta} = 0. \quad (42)$$

Граничным условиям на торцах слоя удовлетворяем в смысле Сен-Венана, т. е.

$$\int_{-\delta}^{\delta} \tau_{xy} d\eta = 0, \quad \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_x d\eta = 0. \quad (43)$$

Уравнения установившейся ползучести (27) выполняются. Из условия несжимаемости получаем

$$u = -\frac{1}{2} v_1'(\eta)\xi^2 + u_1(\eta), \quad (44)$$

где  $u_1(\eta)$  — произвольная четная функция. Из условия прилипания (42) имеем  $v_1'(\delta) = 0, u_1(\delta) = 0$ . Функции  $u_1(\eta)$  и  $v_1(\eta)$  подлежат определению.

Подставим в уравнения (27) скорости  $u, v$  согласно (41), (44) и касательные напряжения по формуле (40). Полагая

$$v_1''(\eta) = A|\eta|^{s-1}\eta, \quad u_1(\eta) + v_1(\eta) = D|\eta|^{s-1}\eta,$$

где  $A, D, s$  — произвольные постоянные, находим, что одно слагаемое в выражении интенсивности  $J_2$  содержит множитель  $\delta^2$  и мало по сравнению со вторым членом. Отбрасывая это слагаемое и сравнивая показатели степеней  $\eta$ , получаем, что  $s = 1/m$ . Тогда

$$R(\xi) = A_1|\xi_0^2 - \xi^2|^{m-1}(\xi_0^2 - \xi^2)\delta,$$

где  $\xi_0^2 = 2D/A, A_1 = BA|A|^{m-1}(2l)^{-m}$ .

Внося  $\tau_{xy}$  в уравнения равновесия, выполняя интегрирование и определяя произвольную постоянную из второго условия (43), находим

$$\sigma_x = A_1 \int_{\xi}^1 |\xi_0^2 - \xi^2|^{m-1}(\xi_0^2 - \xi^2) d\xi.$$

При чистом изгибе нормальные напряжения будут нечетными функциями от  $\xi$ . По условию непрерывности при  $\xi = 0$  напряжение  $\sigma_x = 0$ ; следовательно

$$\int_0^1 |\xi_0^2 - \xi^2|^{m-1}(\xi_0^2 - \xi^2) d\xi = 0. \tag{45}$$

Постоянная  $\xi_0^2$  определяется из уравнения (45) и имеет простой смысл: при  $\xi = \pm\xi_0$  касательное напряжение обращается в нуль. Величина  $\xi_0$  монотонно возрастает вместе с  $m$  от значения 0,5 до  $1/\sqrt{3} \approx 0,577$ .

Введем функцию

$$\Phi(\xi, m) = \int_0^{\xi} |\xi_0^2 - \xi^2|^{m-1}(\xi_0^2 - \xi^2) d\xi.$$

Очевидно, что  $\Phi(1, m) = 0, \sigma_x = -A_1\Phi(\xi, m)$ . Графики функции  $\Phi(\xi, m)$ , а следовательно и нормальных напряжений, показаны для случаев  $m = 0,5, m = 1,0$  на рис. 7. Штриховой линией показано численное решение при  $m = 1,0$ .

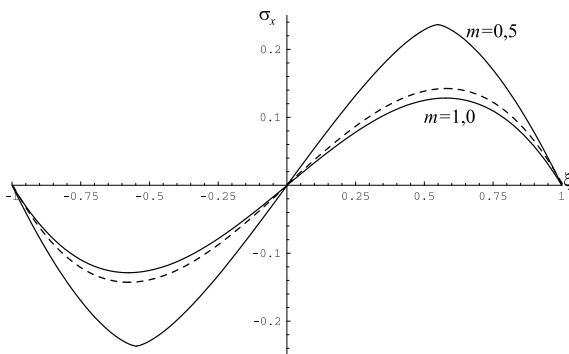


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений по длине прослойки

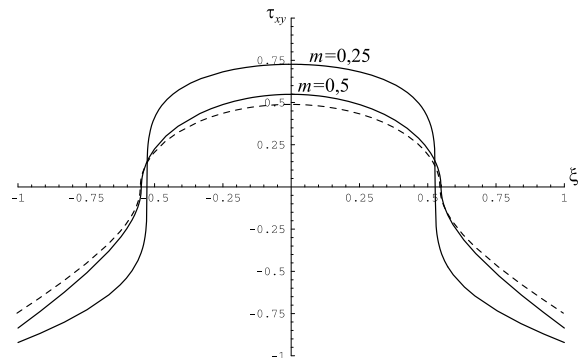


Рис. 8. Распределение касательных напряжений по длине прослойки

Из условия статической эквивалентности  $\int_0^1 \sigma_x \xi d\xi = \frac{M}{2l^2}$  находим постоянную

$$A_1 = -\frac{M}{2l^2 D(m)}, \quad D(m) = \int_0^1 \Phi(\xi, m)\xi d\xi.$$

Касательное напряжение максимально на линии контакта  $\eta = \delta$ . На рис. 8 приведены графики  $R(\xi)/A_1\delta$  для некоторых значений  $m$ . Штриховой линией показано численное решение при  $m = 0,5$ .

Касательное напряжение обращается в нуль в точках  $\xi = \pm\xi_0$ . Нормальные напряжения в этих точках достигают максимума. Таким образом, напряженное состояние при изгибе тонкой прослойки существенно отличается от напряженного состояния при “обычном” изгибе пластины. Максимальные напряжения будут не у поверхностей  $\xi = \pm 1$ , а в глубине слоя. Это объясняет наблюдавшееся появление трещин в средней части растянутой зоны сварных соединений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.
3. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Об аппроксимации уравнений упругопластического деформирования в задачах динамики // Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики. АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1989. Вып. 92. 45–53.
4. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961.
5. Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Решение плоских задач упругости на основе конечных элементов с независимой аппроксимацией смещений // Вычислительные технологии. 1997. 2, № 4. 60–76.
6. Качанов Л.М. Сдвиг и сжатие тонкого пластичного слоя // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 2. 172–173.
7. Качанов Л.М. Ползучесть тонкого слоя при сжатии и изгибе // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 4. 86–91.
8. Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Безмоментная модель упругопластического деформирования и предельного состояния тонких прослоек // ПМТФ. 1994. № 6. 122–129.
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
10. Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Волны смещений и локализация деформаций при растяжении полосы с упругопластическими прослойками // ПМТФ. 1995. № 2. 136–143.

Поступила в редакцию  
09.08.2004