

УДК 517.933:521.1

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПРОДОЛЖЕНИЯ СЕМЕЙСТВ СИММЕТРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Б. Б. Крейсман¹, Н. В. Батхина², А. Б. Батхин²

Предлагается адаптивный высокоточный алгоритм продолжения симметричных периодических решений гамильтоновых систем. В основе алгоритма лежит методика исследования структуры семейств периодических решений, предложенная Б. Б. Крейсмано. Этот алгоритм отличается высокой точностью, экономия компьютерных ресурсов, возможность распараллеливания. Он позволяет проходить ударные орбиты, оставаясь в физических координатах. Используя адаптивный алгоритм, авторы исследовали семейства ударных периодических решений второго рода плоской задачи Хилла, имеющих некоторые симметрии.

1. Описание метода. Пусть дана автономная гамильтонова система с n степенями свободы, заданная гамильтонианом $H(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда ее динамика описывается каноническими уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}\nabla H(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где \mathbf{x} — $2n$ -мерный вектор координат и импульсов, \mathbf{J} — симплектическая единица. (Везде далее для определенности будем полагать, что $n = 2$). Пусть известно некоторое решение этой системы:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t),$$

которое будем называть порождающим. Полагая, что в окрестности этого решения функция Гамильтона является достаточно регулярной, рассмотрим возмущенное движение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t).$$

Подставляя его в уравнение (1), разлагая правые части в ряд Тейлора по $\mathbf{y}(t)$ и отбрасывая члены разложения степени выше первой, получаем уравнения возмущенного движения в первом приближении:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{J} \text{Hess}(H(\mathbf{x}_0(t)))\mathbf{y}. \quad (2)$$

Это уравнение называют уравнением в вариациях Пуанкаре.

Пусть известно решение системы (1), зависящее от произвольной постоянной:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t, C),$$

а порождающему решению соответствует $C = 0$. В этом случае уравнение в вариациях (2) имеет частное решение

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}_1(t, C)}{\partial C},$$

где все частные производные вычислены в точке $C = 0$. В частности, автономная система вместе с решением $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t)$ имеет решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t + C)$, т.к. это просто сдвиг вдоль траектории. Ему соответствует решение уравнения в вариациях $\mathbf{y}_1 = \mathbf{J}\nabla H(\mathbf{x}_0(t))$.

Если система (1) имеет первый интеграл $F(\mathbf{x}) = \text{const}$, то и уравнения в вариациях также имеют первый интеграл $\langle \nabla F(\mathbf{x}_0(t)), \mathbf{y} \rangle = \text{const}$ и частное решение $\mathbf{y} = \mathbf{J}\nabla F(\mathbf{x}_0(t))$, совпадающее с решением $\mathbf{y}_1 = \mathbf{J}\nabla H(\mathbf{x}_0(t))$.

¹ Астрокосмический центр физического института им. П. Н. Лебедева РАН (АКЦ ФИАН РАН), ул. Профсоюзная 84/32, 117997, Москва; e-mail: kreisman@asc.rssi.ru

² Волжский гуманитарный институт Волгоградского госуниверситета (ВГИ ВолГУ), ул. 40 лет Победы, 11, 404118, г. Волжский, Волгоградская обл.; e-mail: batkhin@vgi.volsu.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Система уравнений в вариациях является линейной системой с переменными коэффициентами, поэтому ее решение представимо в виде $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{y}_0$, где $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0)$. Матрицант $\mathbf{Y}(t)$ для гамильтоновых систем является симплектической матрицей.

Матрица $\mathbf{M} = \mathbf{Y}(T)$, равная значению матрицанта в конце периода, называется матрицей монодромии, а ее собственные значения ρ_k — мультипликаторами системы (2). Очевидно, что

$$\mathbf{Y}(t + T) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{M}.$$

Подставим в последнее равенство значение $t = -T/2$ и получим

$$\mathbf{Y}(T/2) = \mathbf{Y}(-T/2)\mathbf{M},$$

откуда

$$\mathbf{M} = \mathbf{Y}^{-1}(-T/2)\mathbf{Y}(T/2). \tag{3}$$

Матрица монодромии вещественна, поэтому вместе с мультипликатором ρ она имеет комплексно-сопряженный мультипликатор $\bar{\rho}$. Для гамильтоновой системы наряду с мультипликатором ρ матрица монодромии имеет обратный мультипликатор $1/\rho$. Следовательно, для вещественных гамильтоновых систем мультипликаторы образуют четверки $(\rho, \bar{\rho}, 1/\rho, 1/\bar{\rho})$ или, по крайней мере, пары $(\rho, 1/\rho)$, располагающиеся либо на вещественной оси, либо на единичной окружности комплексной плоскости [1].

Конкретный вид матрицы монодромии зависит от выбора начальной точки на порождающем решении, но значения мультипликаторов и структура матрицы \mathbf{M} инвариантны относительно сдвига вдоль решения и невырожденных преобразований фазового пространства.

Для вычисления матрицы монодромии обычно приходится интегрировать на интервале времени $[0, T]$ совместно уравнения движения и уравнения в вариациях Пуанкаре для единичной матрицы начальных условий, т.е. решать численно задачу Коши для системы уравнений порядка $2n(1 + 2n)$. Однако вычисление матрицы монодромии можно существенно упростить, если гамильтониан допускает некоторые симметрии.

Не умаляя общности предположим, что гамильтониан инвариантен относительно канонической замены переменных

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1, -x_2, -x_3, x_4), \quad t \rightarrow (-t). \tag{4}$$

Для симметричной относительно оси x_1 периодической орбиты можно выбрать начальную точку $\mathbf{x}(0) = (x_1, 0, 0, x_4)$, в которой траектория ортогонально пересекает ось симметрии. Тогда будут выполнены условия

$$x_1(-t) = x_1(t), \quad x_2(-t) = -x_2(t), \quad x_3(-t) = -x_3(t), \quad x_4(-t) = x_4(t).$$

Более того, в момент времени $t = T/2$ вновь будет выполнено условие ортогональности $\mathbf{x}(T/2) = (x'_1, 0, 0, x'_4)$.

Инвариантность гамильтониана относительно преобразования (4) означает, что он является четной функцией относительно переменных x_2 и x_3 ; значит, вдоль симметричных относительно оси x_1 орбит гессианы гамильтониана в моменты времени t и $-t$ будут связаны соотношением

$$H''_{ij}(\mathbf{x}(-t)) = \begin{cases} -H''_{ij}(\mathbf{x}(t)), & \text{только один из индексов } ij \text{ принимает значение 2 или 3,} \\ H''_{ij}(\mathbf{x}(t)), & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Эти условия равносильны матричному тождеству

$$\text{Hess } H(\mathbf{x}(-t)) = \mathbf{J}\mathbf{G}\mathbf{J} \text{Hess } H(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}^{-1},$$

где матрица \mathbf{G} имеет в силу замены (4) вид

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}_1 = \text{diag}\{1, -1, -1, 1\}, \quad \mathbf{G}_1^T = \mathbf{G}_1^{-1} = \mathbf{G}_1.$$

Это означает, что для системы (2) выполнено условие t -инвариантности [1], а матрицанты $\mathbf{Y}(-t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ для таких систем связаны уравнением

$$\mathbf{Y}(-t) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}(t)\mathbf{G}; \quad \text{в частности, } \mathbf{Y}(-T/2) = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}(T/2)\mathbf{G}.$$

Поскольку матрица $\mathbf{Y}(-T/2)$ — симплектическая, то с учетом формулы (3) получаем матрицу монодромии \mathbf{M}_1 , вычисленную от точки $\mathbf{x}(0)$:

$$\mathbf{M}_1 = \tilde{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Y}^T(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Y}(T/2), \quad \tilde{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}_1 \mathbf{J}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} = \tilde{\mathbf{G}}_1^T = \tilde{\mathbf{G}}_1. \quad (5)$$

Нетрудно получить матрицу монодромии \mathbf{M}_2 , вычисленную от точки $\mathbf{x}(T/2)$:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{Y}(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Y}^T(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_1. \quad (6)$$

Аналогичными рассуждениями могут быть получены формулы для вычисления матрицы монодромии в случае инвариантности гамильтониана относительно канонического преобразования

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (-x_1, x_2, x_3, -x_4), \quad t \rightarrow (-t) \quad (7)$$

для симметричных относительно оси x_2 орбит:

$$\mathbf{M}_1 = \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Y}_1^T(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Y}_1(T/2), \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{Y}_1(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Y}_1^T(T/2) \tilde{\mathbf{G}}_2. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{G}_2 = \text{diag}\{-1, 1, 1, -1\}$, $\tilde{\mathbf{G}}_2 = \mathbf{G}_2 \mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{G}}_2^{-1} = \tilde{\mathbf{G}}_2^T = \tilde{\mathbf{G}}_2$.

Вычисление матрицы монодромии по формулам (8, 9) предпочтительнее по следующим соображениям. Во-первых, интегрирование системы (2) на половине периода требует меньших вычислительных затрат и дает более точные результаты. Во-вторых, для продолжения некоторых симметричных периодических решений требуется информация о структуре матрицы монодромии как в точке $\mathbf{x}(0)$, так и в точке $\mathbf{x}(T/2)$.

Наконец, если гамильтониан обладает двумя симметриями, например относительно осей x_1 и x_2 , то для вычисления матрицы монодромии достаточно знать матрицант системы (2) на четверти периода $\mathbf{Y}(T/4)$. Действительно, пусть начальная точка дважды симметричной орбиты расположена на оси x_1 , т.е. имеет координаты $\mathbf{x}(0) = (x_1, 0, 0, x_4)$; тогда координаты точки соответствующей четверти периода есть $\mathbf{x}(T/4) = (0, x_2, x_3, 0)$. Обозначим через $\mathbf{Y}_1(T/4)$ матрицант системы (2), соответствующий начальной точке $\mathbf{x}(0)$, а через $\mathbf{Y}_2(T/4)$ — матрицант, соответствующий начальной точке $\mathbf{x}(T/4)$. Согласно свойству матрицанта имеем $\mathbf{Y}_1(T/2) = \mathbf{Y}_2(T/4) \mathbf{Y}_1(T/4)$. С другой стороны, в силу свойства t -инвариантности уравнения в вариациях относительно преобразования (10) имеют вид

$$\mathbf{Y}_2(-T/4) = \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{Y}_2(T/4) \mathbf{G}_2 \Rightarrow \mathbf{Y}_2(T/4) = \mathbf{G}_2 \mathbf{Y}_2(-T/4) \mathbf{G}_2^{-1}.$$

Используя тот факт, что $\mathbf{Y}_2(-T/4) = \mathbf{Y}_1^{-1}(T/4) = -\mathbf{J} \mathbf{Y}_1^T(T/4) \mathbf{J}$, получаем для $\mathbf{Y}_1(T/2)$ выражение

$$\mathbf{Y}_1(T/2) = \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Y}_1^T(T/4) \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Y}_1(T/4).$$

Применяя t -инвариантность системы (2) относительно преобразования (4), в итоге получим формулы для матриц монодромии \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 :

$$\mathbf{M}_1 = \left[\tilde{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Y}_1^T(T/4) \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Y}_1(T/4) \right]^2 \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_2 = \left[\mathbf{Y}_1(T/4) \tilde{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Y}_1^T(T/4) \tilde{\mathbf{G}}_2 \right]^2$$

Пусть известно некоторое порождающее решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t)$ системы (1) и пусть оно является периодическим с периодом T , $\mathbf{x}_0(T) = \mathbf{x}_0(0)$. Для нахождения близкого к нему периодического решения $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t)$ с периодом $T + dT$ надо решить систему уравнений

$$\mathbf{x}_0(T + dT) + \mathbf{y}(T + dT) = \mathbf{x}_0(0) + \mathbf{y}(0).$$

Для малых \mathbf{y} , dT имеем необходимое условие

$$\mathbf{y}(T) + dT \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{x}_0(0)) = 0.$$

Уравнения в вариациях имеют решение $\mathbf{y}_1 = \mathbf{J}\nabla H(\mathbf{x}_0(t))$ и первый интеграл $\langle \nabla H(\mathbf{x}_0(t)), \mathbf{y} \rangle = \text{const}$. Выполним замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ с симплектической и одновременно ортогональной матрицей перехода \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} H_3 - H_4 & H_1 & H_2 \\ H_4 & H_3 & H_2 & -H_1 \\ -H_1 - H_2 & H_3 & -H_4 \\ -H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \end{pmatrix},$$

где H_1, H_2, H_3, H_4 — компоненты нормированного вектора-градиента функции Гамильтона в начальный момент времени $t = 0$. Все рассматриваемые ниже матрицы — симплектические, если не оговорено противное.

Переменным \mathbf{z} соответствует матрица монодромии \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}.$$

В новой системе координат ортами являются векторы $\mathbf{a}_i, i = \overline{1,4}$, совпадающие с соответствующими столбцами матрицы \mathbf{A} . Орт \mathbf{a}_1 дает касательную к решению $\mathbf{x}_0(t)$, а орт \mathbf{a}_3 ортогонален линиям уровня функции Гамильтона. Поэтому матрица \mathbf{N} имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $P(\rho)$ матрицы \mathbf{N} есть $P(\rho) = (\rho-1)^2(\rho^2 - 2s\rho + 1)$, где $s = (n_{22} + n_{44})/2$. Число s определяет устойчивость решения в линейном приближении. Если $|s| < 1$, то решение орбитально устойчиво в первом приближении, а при $|s| > 1$ движение неустойчиво. Рассмотрим случай $|s| \leq 1$.

Из симплектичности матрицы \mathbf{N} следуют равенства

$$\begin{aligned} n_{22}n_{44} - n_{24}n_{42} &= 1, & n_{42}n_{23} - n_{22}n_{43} &= n_{12}, \\ n_{44}n_{23} - n_{24}n_{43} &= n_{14}, & n_{22}n_{14} - n_{24}n_{12} &= n_{23}, \\ n_{42}n_{14} - n_{44}n_{12} &= n_{43}, \end{aligned}$$

причем независимыми являются только три равенства из пяти. В этой системе координат уравнения относительно \mathbf{z}, dT принимают форму

$$\mathbf{N}_1 \mathbf{z} + v dT \mathbf{a}_1 = 0, \tag{11}$$

где v — модуль начальной скорости, $v = |\mathbf{J}\nabla H(\mathbf{x}_0(0))|$, а матрица \mathbf{N}_1 имеет вид

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} - 1 & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} - 1 \end{pmatrix}.$$

Система всегда имеет частное решение, соответствующее сдвигу по исходному периодическому решению $\mathbf{x}_0(t)$ на произвольную величину c_1 :

$$z_1 = c_1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad dT = 0.$$

Общее решение системы представимо в виде [2]

$$\mathbf{z} = c_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{z}', \quad dT = -(n_{12}z'_2 + n_{13}z'_3 + n_{14}z'_4)/v,$$

где вектор \mathbf{z}' ортогонален вектору \mathbf{a}_1 .

Поскольку мы исследуем только продолжение семейства периодических решений, то достаточно ограничиться случаем, когда $\text{rang } \mathbf{N}_1 = 3$, т.е. минор d_5 матрицы \mathbf{N}_1 отличен от нуля; следовательно, среди миноров d_2, d_3, d_4 есть ненулевые. Здесь

$$d_2 = n_{23} - n_{14}, \quad d_3 = 2 - n_{22} - n_{44}, \quad d_4 = n_{43} + n_{12}, \quad d_5 = -(n_{12}d_2 + n_{13}d_3 + n_{14}d_4). \tag{12}$$

В этом случае общее решение системы (11) принимает вид

$$z_1 = c_1, \quad z_2 = d_2 c_2, \quad z_3 = d_3 c_2, \quad z_4 = d_4 c_2, \quad dT = d_5 c_2 / v,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Вектор

$$\mathbf{b} = d_2 \mathbf{a}_2 + d_3 \mathbf{a}_3 + d_4 \mathbf{a}_4 \quad (13)$$

дает в фазовом пространстве направление касательной к единственному семейству периодических решений, проходящих через решение $\mathbf{x}_0(t)$ и имеющих период, близкий к T .

Для симметричных периодических решений формула (13) упрощается. В зависимости от типа симметрии матрица монодромии \mathbf{M} вычисляется по одной из формул (5), (8), (10). Непосредственной проверкой можно убедиться, что ее элементы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} m_{33} &= m_{11}, & m_{44} &= m_{22}, & m_{43} &= -m_{12}, \\ m_{23} &= -m_{14}, & m_{34} &= -m_{21}, & m_{41} &= -m_{32}. \end{aligned}$$

Матрица перехода к локальному базису \mathbf{A} будет иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -H_4 & H_1 & 0 \\ H_4 & 0 & 0 & -H_1 \\ -H_1 & 0 & 0 & -H_4 \\ 0 & H_1 & H_4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} H_3 & 0 & 0 & H_2 \\ 0 & H_3 & H_2 & 0 \\ 0 & -H_2 & H_3 & 0 \\ -H_2 & 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix}$$

в случае симметрии относительно оси x_1 или в случае симметрии относительно оси x_2 , соответственно.

Эти соотношения приводят к упрощению матрицы \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & -n_{14} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}$$

и миноров матрицы \mathbf{N}_1 :

$$d_2 = -2n_{14}, \quad d_3 = 2(1 - n_{22}), \quad d_4 = 0, \quad d_5 = -(n_{12}d_2 + n_{13}d_3).$$

Тогда вектор \mathbf{b} запишется в виде вектора \mathbf{b}_1 или \mathbf{b}_2 , где

$$\mathbf{b}_1 = d_2 \begin{pmatrix} -H_4 \\ 0 \\ 0 \\ H_1 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \\ -H_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ H_3 \\ -H_2 \\ 0 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 0 \\ H_2 \\ H_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Данная формула показывает, что вектор \mathbf{b}_1 имеет нулевые проекции на оси x_2 и x_3 , а вектор \mathbf{b}_2 — на оси x_1 и x_4 соответственно; значит, если хотя бы один из миноров d_2, d_3 отличен от нуля, то продолжение симметричного относительно оси x_1 или x_2 решения дает симметричное периодическое решение.

Для симметричных периодических решений стандартное условие периодичности вида $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T)$ может быть заменено в зависимости от типа симметрии одним из следующих условий.

1. В случае орбит, симметричных относительно оси x_1 с начальным условием $x_2(0) = x_3(0) = 0$, имеем $x_2(T/2) = x_3(T/2) = 0$.
2. В случае орбит, симметричных относительно оси x_2 с начальным условием $x_1(0) = x_4(0) = 0$, имеем $x_1(T/2) = x_4(T/2) = 0$.
3. В случае орбит, симметричных относительно осей x_1 и x_2 с начальным условием $x_2(0) = x_3(0) = 0$, имеем $x_1(T/4) = x_4(T/4) = 0$.
4. В случае орбит, симметричных относительно осей x_1 и x_2 с начальным условием $x_1(0) = x_4(0) = 0$, имеем $x_2(T/4) = x_3(T/4) = 0$.

Эти условия означают, что периодическая орбита ортогонально пересекает соответствующую координатную ось.

Таким образом, симметричное периодическое решение однозначно определяется трехмерным вектором $\mathbf{X} = (x_1(0), x_4(0), T)$ в случаях 1 и 3 или $\mathbf{X} = (x_2(0), x_3(0), T)$ в случаях 2 и 4.

Введем в рассмотрение векторную функцию $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^3$. Первые два компонента вектора \mathbf{F} берутся из соответствующих условий периодичности. Тогда задача поиска и продолжения симметричного периодического решения сводится к задаче поиска и продолжения стационарных точек $\mathbf{X}^{(k)}$ уравнения $\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) = \mathbf{0}$, для каждой из которых нам известен вектор $\tilde{\mathbf{X}}^{(k)}$, задающий направление продолжения семейства в этой точке. Вектор $\tilde{\mathbf{X}}^{(k)}$ состоит из соответствующих компонентов вектора \mathbf{b} и $dT = d_5/v$.

Наиболее простым и эффективным методом продолжения, по-видимому, является метод продолжения по длине дуги, который позволяет проходить точки поворота на ветви $\mathbf{X}(s)$. Пусть известно некоторое периодическое решение $\mathbf{X}^{(0)} = (x_i(0), x_j(0), T)$ и нормированный вектор $\tilde{\mathbf{X}}^{(0)}$ — касательный к ветви продолжения семейства. Тогда последующее периодическое решение этого семейства $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}$ может быть найдено из решения системы

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{X}^{(1)}) = 0, \\ F_2(\mathbf{X}^{(1)}) = 0, \\ \langle \mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}, \tilde{\mathbf{X}}^{(0)} \rangle = \Delta s. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь Δs — шаг вдоль ветви, который может выбираться априорно и может корректироваться в зависимости от скорости сходимости итераций.

Иллюстрация метода показана на рис. 1 для случая, когда $\dim \mathbf{X} = 2$.

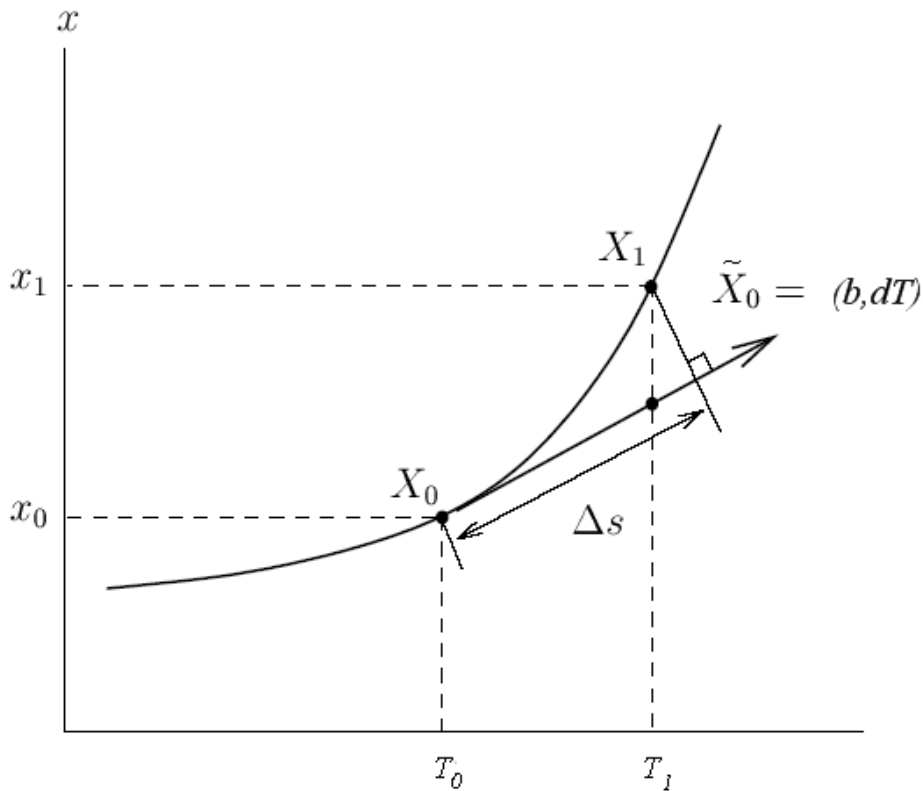


Рис. 1. Графическая интерпретация метода

Система (14) может быть решена с использованием ньютоновых итераций, а ее якобиан легко может быть построен с использованием значений матрицанты системы (2) и правых частей канонических уравнений (1), вычисленных во второй ортогональной точке, а также с помощью вектора $\tilde{\mathbf{X}}^{(0)}$. Приведем вид

якобиана системы (14) для случая симметрии 4:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \left(\mathbf{X}^{(1)} \right) = \begin{pmatrix} Y_{21}(T/2) & Y_{24}(T/2) & H_4'(T/2) \\ Y_{31}(T/2) & Y_{34}(T/2) & -H_1'(T/2) \\ \tilde{X}_1^{(0)} & \tilde{X}_2^{(0)} & \tilde{X}_3^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Для других случаев якобиан строится аналогично. Можно показать, что в регулярной точке семейства якобиан (15) невырожден.

2. Описание алгоритма. Пусть известно некоторое периодическое решение, обладающее, по крайней мере, одной из симметрий (4) или (8). Тогда существуют две точки, в которых орбита ортогональна координатной оси. В случае одной симметрии эти точки лежат на одной координатной оси, а в случае двух симметрий — на разных. Обозначим эти точки \mathcal{A} и \mathcal{B} соответственно. Продолжение семейства возможно как из первой, так и из второй точки.

Для работы алгоритма необходимо задать ряд априорных величин:

- абсолютная и/или относительная погрешность интегратора системы (2);
- Δs — начальная величина шага смещения вдоль семейства;
- абсолютная и/или относительная погрешность определения периодического решения;
- N_{\max} — максимальное число ньютоновых итераций;
- условия выхода из алгоритма.

Алгоритм представляет собой предикторно-корректорную схему продолжения семейства периодического решения. Предикторная часть состоит в вычислении матрицы монодромии по одной из формул (6), (9) или (12) и в определении вектора поправок $\tilde{\mathbf{X}}$ к начальным условиям. Корректорная часть реализует решение системы (14) с помощью ньютоновых итераций. Условиями окончания работы алгоритма продолжения могут служить либо выход начальных условий, определяющих периодическое решение, и индекса устойчивости за априорно заданные границы, либо получение заданного числа точек семейства. Аварийный выход из алгоритма продолжения происходит при превышении заданного числа итераций N_{\max} либо при сходимости к периодическому решению с другими начальными условиями.

Более устойчивым показал себя вариант алгоритма с адаптивным выбором шага смещения ΔS . Априорный выбор шага обычно затруднителен; более того, его величина существенно зависит от устойчивости решения, которая может меняться в большом диапазоне вдоль семейства. Изменение Δs может производиться следующим образом. Определим три дополнительных параметра: Δs_{\min} — минимальный шаг, Δs_{\max} — максимальный шаг, α — “агрессивность” смены шага. Пусть Δs_i — величина шага для i -й точки семейства, N_i — число итераций, выполненных для уточнения i -й точки. Возможны следующие случаи:

- 1) $N_i < N_{\max}$: шаг меняется по формуле

$$\Delta s_{i+1} = \begin{cases} \Delta s_i \left[1 + \alpha \left(\frac{N_{\max} - N_i}{N_{\max} - 1} \right)^2 \right], & \text{при } \Delta s_{i+1} < \Delta s_{\max}, \\ \Delta s_{\max}, & \text{при } \Delta s_{i+1} > \Delta s_{\max}; \end{cases}$$

- 2) $N_i \geq N_{\max}$: шаг делится пополам и повторяется попытка;
- 3) $\Delta s_i < \Delta s_{\min}$: происходит аварийное завершение алгоритма.

Если необходимо получение эквидистантных точек семейства периодических решений, то параметр α полагается равным нулю.

Во многих задачах небесной механики продолжение семейств периодических решений приводит к орбитам соударения, т.е. к орбитам, проходящим сколь угодно близко к одному из тяготеющих центров. Численное исследование таких траекторий в исходных переменных становится практически невозможным. Стандартный способ заключается в регуляризации уравнений движения. Однако лишь небольшое число небесно-механических задач допускает глобальную регуляризацию, поэтому чаще всего приходится пользоваться локальной регуляризацией. Для гамильтонианов с двумя степенями свободы и с особенностями вида $1/r$ наиболее простой является регуляризация Леви-Чивита

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 - Q_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} Q_1 - Q_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{dt}{d\tau} = 4(Q_1^2 + Q_2^2).$$

Здесь $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = Q_1^2 + Q_2^2$, (Q_1, Q_2, P_1, P_2) , τ — регуляризованные переменные и время.

Интегрирование уравнений движения (1) с применением локальной регуляризации приводит к некоторым техническим сложностям, но существенно повышает как точность численных результатов, так и скорость расчетов, поскольку регуляризация приводит и к стабилизации уравнений движения. Вокруг каждой из особенностей \mathbf{a}_i гамильтониана определяем окружность некоторого априорного радиуса R_{safe} . Если в процессе интегрирования точка орбиты \mathbf{r}_i попадает в окрестность особенности \mathbf{a}_i , то осуществляется переход в локально регулярные координаты и интегрирование продолжается в новых координатах, пока не будет покинута “опасная” область.

Метод продолжения семейства симметричных периодических решений требует вычисления матрицы монодромии путем интегрирования уравнения в вариациях (2). Для орбит соударения удобно заменить уравнение в вариациях его дискретным аналогом. Для этого зададим вариацию начального условия периодического решения в виде набора одномерных сеток с k узлами вдоль каждой из координатных осей. Поскольку вариация изохронная, то каждый из $4k$ узлов сетки задает начальное условие задачи Коши для уравнения (1). Решая эти задачи на интервале, соответствующем типу симметрии ($T/2$ — для однократно симметричных, $T/4$ — для двукратно симметричных орбит), и применяя соответствующую разностную схему, получим значения элементов матрицанта $\mathbf{Y}(t)$ и, следовательно, матрицу монодромии \mathbf{M} . Заметим, что такой способ вычисления может быть легко распараллелен на $4k$ независимых процессов, что существенно повышает скорость счета без изменения процедуры интегрирования системы уравнений [3].

Если в процессе продолжения семейства одна из точек ортогонального пересечения оси орбитой попадает в окрестность особой точки гамильтониана, то даже регуляризация не позволяет корректно определить матрицу монодромии. Была опробована адаптивная схема, позволяющая выбирать такое условие периодичности, чтобы и начальная и конечная точки находились вне окрестности особой точки. Продемонстрируем идею на следующем примере. Пусть периодическое решение обладает симметрией (4), т.е. в качестве начальной точки \mathcal{A} может быть выбрана точка с координатами $(x_1^{\mathcal{A}}, 0, 0, x_4^{\mathcal{A}})$. Пусть для этого условия выполнено $|x_1^{\mathcal{A}}| > R_{\text{safe}}$. В силу условия симметрии через интервал $T/2$ в точке \mathcal{B} орбита будет иметь координаты $(x_1^{\mathcal{B}}, 0, 0, x_4^{\mathcal{B}})$. Если $|x_1^{\mathcal{B}}| < R_{\text{safe}}$, то при определении элементов матрицы \mathbf{M} возможны большие погрешности, которые не позволят корректно продолжить семейство. Заменяв условие периодичности на полупериоде $T/2$ условием $x_2^{\mathcal{B}}(T) = x_3^{\mathcal{B}}(T) = 0$ на периоде, обеспечим определение элементов матрицы \mathbf{M} , а значит, и параметров продолжения семейства с необходимой точностью. При этом почти вдвое увеличиваются вычислительные затраты. Если по мере продолжения семейства точка, соответствующая половине периода, покидает окрестность особенности, то можно вернуться к более экономной схеме, основанной на условии периодичности на половине периода. Покажем некоторые результаты применения данного алгоритма.

3. Продолжение периодических решений задачи Хилла. Рассмотрим применение описанного выше алгоритма для продолжения семейств симметричных периодических решений плоской задачи Хилла, являющейся предельным случаем ограниченной задачи трех тел. Интерес к этой задаче объясняется рядом причин. Во-первых, занимая в некотором роде “промежуточное” положение между интегрируемой кеплеровой задачей и неинтегрируемой ограниченной задачей трех тел, гамильтониан задачи Хилла обладает лишь одной особенностью, как и гамильтониан первой задачи, но при этом задача Хилла является неинтегрируемой, как вторая задача. Такой подход позволяет рассматривать задачу Хилла как возмущение кеплеровой задачи, а ограниченную задачу трех тел как возмущение задачи Хилла. Во-вторых, гамильтониан задачи Хилла допускает два преобразования (4) и (7), а значит, существуют периодические решения как с одной, так и с двумя симметриями относительно осей x_1 и x_2 . Будем обозначать симметрию относительно x_1 символом Σ_1 , а симметрию относительно x_2 — Σ_2 .

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — вектор канонически сопряженных координат и импульсов; тогда гамильтониан задачи Хилла имеет вид

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (x_3^2 + x_4^2) + x_2 x_3 - x_1 x_4 - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Задача Хилла обладает единственным первым интегралом $H(\mathbf{x}) = -2C$, где C — постоянная Якоби, равная

$$C = 3x_1^2 + \frac{2}{r} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2.$$

Основными семействами периодических орбит задачи Хилла являются семейства a, c, f, g , описанные в статье [4]. Будем называть их семействами периодических решений первого рода.

Первые два семейства a и c происходят от либрационных орбит, являются взаимносимметричными относительно оси x_2 и обладают симметрией Σ_1 . Их можно также рассматривать как продолжение удар-

ных кеплеровых орбит. Эти семейства неустойчивы при всех значениях постоянной $C \in (-\infty; 3^{4/3})$, а значит, не могут быть порождающими решениями для семейств периодических решений второго рода.

Семейства f и g представляют собой, соответственно, обратнооборотные и прямооборотные спутниковые орбиты, которые можно рассматривать как продолжение, соответственно, обратных и прямых круговых орбит кеплеровой задачи. Орбиты этих семейств дважды симметричны. Семейство g устойчиво лишь при значениях постоянной $C > 4,999$, а его индекс устойчивости имеет минимум $s_{\min} \approx 0,827 < \cos(2\pi/11)$. Следовательно, семейство g не может быть порождающим для периодических орбит с числом оборотов меньших 11. Семейство f устойчиво при всех значениях постоянной C , а индекс устойчивости $s \rightarrow 1$ при $C \rightarrow \pm\infty$ и имеет минимум $s_{\min} \approx -0,691$. Следовательно, семейство f играет роль порождающего для периодических решений второго рода. Среди периодических решений второго рода, порожденных f , особую роль согласно [5] играют орбиты, которые, пройдя соударение и став прямооборотными, разрушают инвариантные торы вокруг семейства g и формируют зоны динамического хаоса. Некоторые из этих семейств были замечены еще М. Нёпон в [4] и описаны в работе авторов [6].

Рассмотрим эволюцию одного из таких семейств — семейства дважды симметричных периодических решений второго рода, которое порождается семейством f с соизмеримостью $1 : 9$.

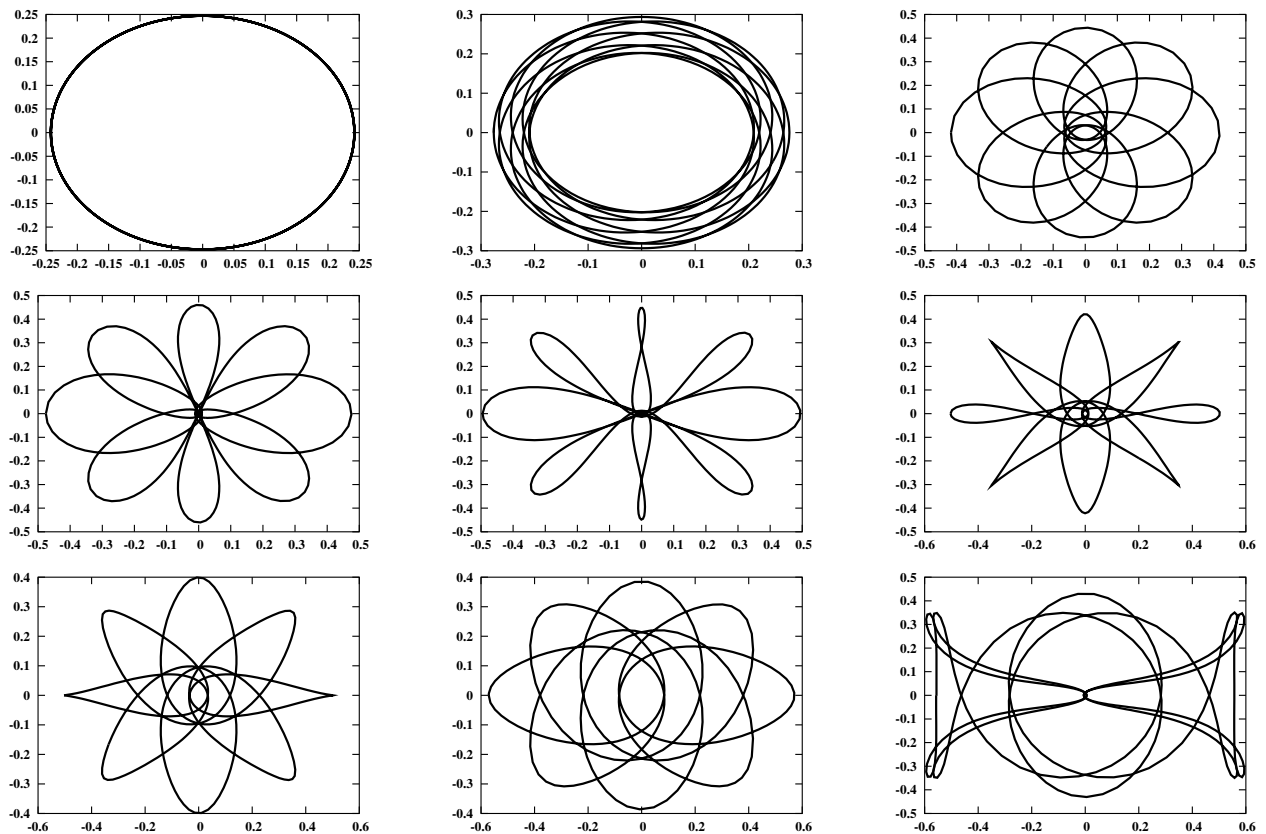


Рис. 2. Семейство дважды симметричных периодических орбит второго рода, порожденных семейством f

При $C \approx 3,1551473$ индекс устойчивости орбиты f становится равным $\cos(2\pi/9)$ и от нее ответвляется пара дважды симметричных девятиоборотных периодических решений. Орбита f в момент ответвления показана на кадре 1 рис. 2, а неустойчивое решение при $C \approx 3,1726323$ — на кадре два. При дальнейшем увеличении C орбита приближается к ударной (кадр 3) и, наконец, дважды при $C \approx 4,1598531$ (кадр 4) и $C \approx 4,4561743$ (кадр 5) проходит через особую точку — начало координат. Окрестность особой точки для этих орбит показана на соответствующих кадрах рис. 3. После этого орбита меняет свои топологические свойства и становится прямой семиоборотной (кадр 6). Семейство достигает максимума по $C_{\max} \approx 4,7362746$ и меняет устойчивость (кадр 7). Вплоть до $C \approx 4,3562484$ орбита устойчива, а ее индекс устойчивости последовательно убывает от 1 до -1 , а затем возрастает до 1 (кадр 8). При этом семейство испытывает бифуркацию потери симметрии, т.е. от него ответвляется пара однократно симметричных

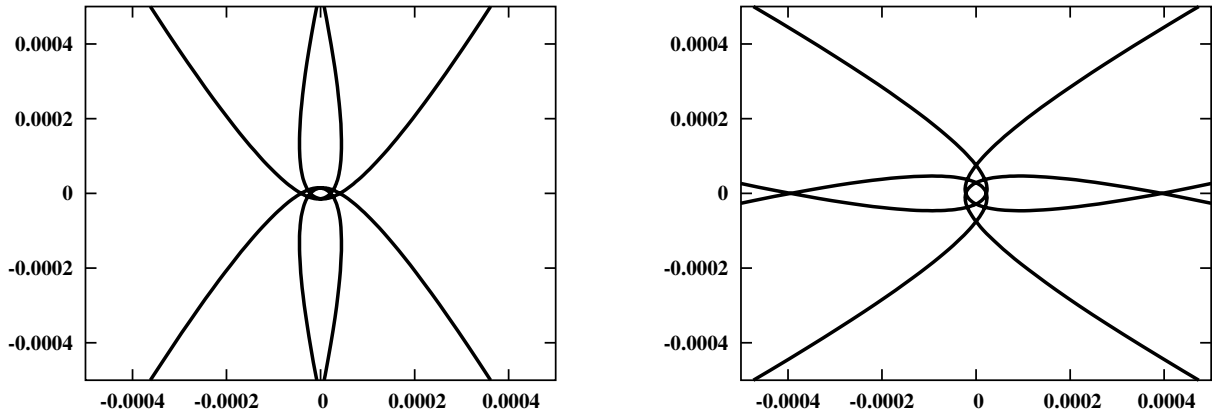


Рис. 3. Окрестность начала координат для орбит, близких к ударным

семиоборотных орбит. Дальнейшее продолжение семейства приводит к сильно неустойчивым решениям, которые стремятся к ударным либрационным орбитам. На кадре 9 рис. 2 показана такая орбита при $C \approx 3,9602859$ с индексом устойчивости $s \approx 1,082 \cdot 10^{10}$.

Поскольку индекс устойчивости двойко симметричного семейства проходит через 1, то от него отщепляется пара несимметричных орбит. В данном случае это орбиты с единственной симметрией Σ_2 . Эволюция этого семейства приведена на рис. 4. При $C \approx 4,33892$ данное семейство испытывает бифуркацию потери симметрии и порождает пару несимметричных решений.

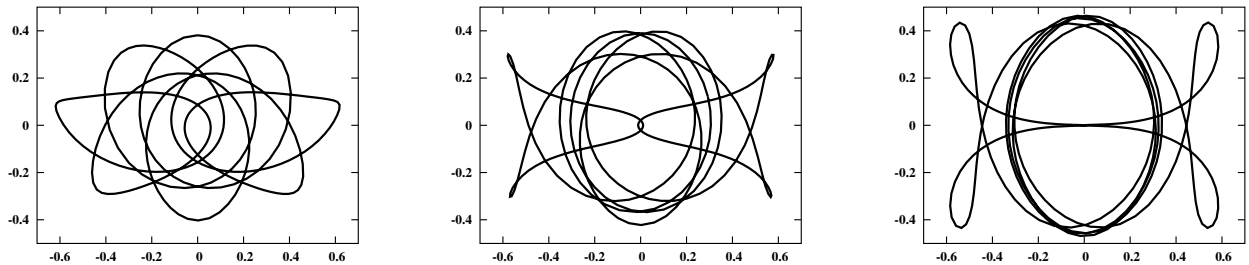


Рис. 4. Семейство симметричных относительно OY семиоборотных орбит

4. Сравнение с другими методами. Исследования периодических решений проводились нами первоначально с помощью отображения Пуанкаре, которое позволяет вместо периодической орбиты системы (1) рассматривать неподвижную точку отображения, построенного следующим образом.

Пусть некоторая динамическая система задана автономным гамильтонианом

$$H(\mathbf{x}, \alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

В качестве “плоскости сечения” выберем подмногообразие $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, полученное путем пересечения гиперплоскости $\gamma : \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = n_0\}$ с многообразием $H(\mathbf{x}, \alpha) = 0$ для фиксированного значения параметра α :

$$\Gamma = H^{-1}(\alpha) \cap \gamma.$$

Таким образом, $\dim \Gamma = n - 2$; точки этого многообразия будем описывать $n - 2$ -мерным вектором \mathbf{z} .

Фазовый поток $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенный гамильтонианом (16), корректно индуцирует отображение Пуанкаре $P : \Gamma \rightarrow \Gamma$ при условии, что векторное поле гамильтониана H трансверсально в каждой точке из Γ . Обозначим через $g_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображение вложения. Выберем $\mathbf{z} \in \Gamma$; тогда через $\tau(\mathbf{z})$ будем обозначать наименьшее время, необходимое для возвращения фазовой траектории $\Phi_t(g_\Gamma(\mathbf{z}))$ на плоскость сечения при $p_y < 0$. Тем самым, отображение P задается формулой

$$P(\mathbf{z}) = g_\Gamma^{-1}(\Phi_{\tau(\mathbf{z})}(g_\Gamma(\mathbf{z}))).$$

Определение отображения Пуанкаре гарантирует, что его предельные множества соответствуют предельным множествам исходного потока. При этом, однако, не существует точки отображения, соответствующей положению равновесия системы (1).

Для исследования неподвижных точек отображения был модифицирован алгоритм DERPАР [7] продолжения стационарной точки отображения первого возвращения.

Неподвижная точка k -й итерации отображения \mathbf{z}^*

$$P^k(\mathbf{z}^*, \alpha) = \mathbf{z}^*$$

может быть интерпретирована как стационарная точка системы

$$P^k(\mathbf{z}^*, \alpha) - \mathbf{z}^* = 0.$$

Алгоритм DERPАР основан на продолжении по длине дуги бифуркационной диаграммы. Для его реализации необходимо для каждого вектора начальных условий интегрировать исходную систему (1) и систему уравнений в вариациях (2), т.е. систему уравнений 16-го порядка. Однако для прохождения точек поворота и точек ветвления требуется вычисление частных производных отображения второго порядка по параметру и координатам. Поэтому порядок системы уравнений, которую нужно проинтегрировать, увеличивается до 40.

Отметим, что этот алгоритм обладает рядом преимуществ. Использование отображения последования снижает размерность, а отсутствие периода T решения как параметра избавляет от необходимости накладывать на систему дополнительные условия. При этом алгоритм дает возможность анализировать ветвления бифуркационных диаграмм в терминах дифференциальных свойств отображения.

Тем не менее, при исследовании периодических решений с помощью модифицированного алгоритма DERPАР мы столкнулись с существенными проблемами. Во-первых, неглобальность сечения Пуанкаре и наличие петель периодических орбит приводит либо к нарушению условия трансверсальности, либо к скачкообразному изменению порядка итерации. Во-вторых, вследствие отсутствия для конкретных гамильтоновых систем аналитического способа задания отображения Пуанкаре, приходится и точки отображения, и производные первого и второго порядков строить численно, что приводит к существенным затратам компьютерного времени и ресурсов. К тому же эффективность продолжения этим алгоритмом существенно зависит от структуры матрицы производных отображения $P(\mathbf{z})$. Это затрудняет продолжение семейств периодических решений второго рода (по Пуанкаре) через точку взаимодействия с порождающим семейством, так как в этих точках матрица производных отображения $P(\mathbf{z})$ плохо обусловлена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
2. Крейсман Б.Б. Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел. Препринт ФИАН им. П.Н. Лебедева. № 30. М., 2003.
3. *Batkhina N.V., Batkhin A.B.* High-precision parallel algorithms of numerical integration of celestial mechanics problems // IAA Transactions. 2002. N 8. 22–23.
4. *Hénon M.* Numerical stability of the restricted problem. Hill's case: periodic orbits and their stability /// *Astron. & Astrophys.* 1969. N 1. 223–238.
5. Симо К., Стучи Т. Центральные устойчивые/неустойчивые многообразия и разрушение КАМ-торов в плоской задаче Хилла. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 90–141.
6. Сумароков С.И., Батхина Н.В., Батхин А.Б. Бифуркации периодических решений в модели Хилла. Вестник ВолГУ. Сер. 1. Матем. Физика. 1997. Вып. 2. 49–57.
7. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.

Поступила в редакцию
03.03.2004