УДК 519.2:541.1

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ УСЛОВИЯХ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ НЕКОРРЕКТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В. А. Морозов[1]

Рассмотрены проблемы устойчивого решения достаточно широкого класса некорректных вариационных задач (задач обобщенной минимизации). Указаны условия, гарантирующие сходимость обобщенных методов регуляризации, невязки и квазирешений в исходном пространстве, а также усиленную сходимость при некоторых дополнительных условиях на функционалы. Выводы работы существенно обобщают ряд результатов, полученных ранее для линейных и нелинейных уравнений с неограниченными операторами. Исследовано влияние ошибок в задании как исходного, так и стабилизирующего функционалов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

1. Постановка задачи. Пусть H — гильбертово пространство (в п. 8 показано, как освободиться от этого условия), на части которого $D \subseteq H$ задан вещественный функционал $\varphi(u)$. Предположим, что множество $D^* = \left\{u \in D: \ \varphi(u) = \varphi^* = \inf\limits_{u \in D} \varphi(u) > -\infty\right\} \neq \emptyset$ и на D^* определен некоторый оператор F, такой, что $FD^* = \widehat{D}^* \subseteq D^*$. В частности, оператор F может переводить все множество D^* в одну точку: $\widehat{D}^* = \{\widehat{u}\}$. Оператор F будем называть *фильтрационным*.

Основная задача (*обобщенная задача минимизации*), рассматриваемая далее, заключается в следующем. Пусть задана пара $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{F})$, которая является в некотором смысле приближением к паре (φ, F), а степень точности приближения характеризуется вектором $\delta = (\delta_0, \delta_1)$. Требуется построить (необязательно однозначный) алгоритм $\widetilde{R}\colon (\widetilde{\varphi}, \widetilde{F}) \xrightarrow{\widetilde{R}} \widetilde{D} \subset H$ таким образом, чтобы множество $\widetilde{D}$ *аппроксимировало* множество $\widehat{D}^*$ в смысле приводимого ниже определения.

Определение 1. Будем говорить, что множество $\widetilde{D}$ *β_H-аппроксимирует* множество $\widehat{D}^*$, если

$$\lim_{|\delta| \to 0} \beta_H(\widetilde{D}, \widehat{D}^*) = 0, \quad |\delta| = (\delta_0^2 + \delta_1^2)^{1/2},$$

а $\beta_H(\widetilde{D}, \widehat{D}^*)$ — так называемое *полуотклонение* [1] множеств $\widetilde{D}$ и $\widehat{D}^*$ в пространстве H, определяемое согласно формуле $\beta_H(\widetilde{D}, \widehat{D}^*) = \sup\limits_{u \in \widetilde{D}} \rho_H(u, \widehat{D}^*)$.

Определение 2. Если алгоритм $\widetilde{R}$ позволяет указать при любом векторе δ множества $\widetilde{D}$, β_H-аппроксимирующие множество $\widehat{D}^*$, то он называется *β_H-устойчивым* (*регуляризующим*) алгоритмом решения основной задачи [11].

Выбор фильтрационного оператора F может быть обусловлен самыми различными причинами. Обычно он определяется совокупностью априорных знаний относительно искомых решений *исходной* вариационной задачи для функционала $\varphi(u)$, $u \in D$. Так, если известно, что множество $D^* \cap N$ непусто, где N — некоторое *заданное* множество пространства H, то действие оператора F может заключаться в выборе общих точек множеств D^* и N. Более удобен, однако, следующий достаточно общий и получивший широкое распространение [11, 28] способ построения фильтрационного оператора. Этого способа мы и будем придерживаться в дальнейшем.

Пусть на множестве D определен еще один *целевой* функционал $g(u)$, $u \in D$, такой, что

$$g^* = \inf_{u \in D^*} g(u) > -\infty.$$

Рассматривается задача определения множества $\widehat{D}^* = \left\{\widehat{u} \in D^*: \ g(\widehat{u}) = g^*\right\}$. Если множество $\widehat{D}^*$ непусто, то действие оператора F заключается в построении этого множества, которое мы будем называть *множеством g-минимальных решений* исходной вариационной задачи.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Целесообразность постановки задачи в указанном виде заключается в возможности *более точного* математического описания реальных физических ситуаций. Так, например, если элемент $\widehat{u} \in H$, минимизирующий функционал $\varphi(u)$, $u \in D$, характеризует состояние некоторого проектируемого объекта, то условие выбора g-минимальных решений может соответствовать *принципу минимальной сложности* его структуры. Далее, если в распоряжении вычислителя уже есть некоторая модель $\overline{u}$ описываемого явления, то задавая функционал $g(u)$ в виде $g(u) = g^*(u - \overline{u}) \geqslant 0$, $g^*(0) = 0$, можно условие выбора g-минимальных решений трактовать в смысле *принципа минимума отклонений* от этой модели ("идя вперед — оглядывайся назад!"). В частности, элемент $\overline{u}$ может быть получен и в результате *непосредственных* (прямых) измерений параметра u. Описанная ситуация довольно часто реализуется в задачах, имеющих статистическую природу. Условие g-минимальности можно трактовать для этого класса задач как условие выбора *наиболее вероятного* вектора, характеризующего "состояние природы", если известно его *априорное распределение*, т.е. реализуется схема, описанная в работах [14, 15].

Нетрудно видеть, что понятие g-минимального решения задачи (1) обобщает известные понятия нормального решения [2], псевдорешения [3], главного решения [4].

2. Вспомогательные определения и утверждения.

Определение 3. Вещественный функционал $p(u)$, $u \in Q \subseteq H$, $Q \neq \emptyset$, называется (*слабо*) *замкнутым*, если для всякой последовательности $u_n \in Q$, такой, что $u_n \overset{(сл)}{\longrightarrow} u_0 \in H$, $p(u_n) \to p^* = \inf p(u) > -\infty$, $n \to \infty$, следует, что $u_0 \in Q^* = \{u \in Q: \ p(u) = p^*\}$.

Это определение встречается в [5]. Легко видеть, что если функционал $p(u)$ слабо замкнут, то он и замкнут; обратное, вообще говоря, неверно. Однако справедлива

Теорема 1. *Если функционал $p(u)$, $u \in Q$, выпуклый, то для слабой замкнутости необходима и достаточна его замкнутость.*

Доказательство теоремы 1 вполне аналогично доказательству эквивалентности слабой полунепрерывности снизу выпуклых функционалов их полунепрерывности снизу, приведенному, например, в [6].

С определением 3 тесно связано

Определение 4. Функционал $p(u)$, $u \in Q$, называется (*слабо*) *полузамкнутым снизу* [31], если для всякой последовательности $u_n \in Q$, такой, что $u_n \overset{(сл)}{\longrightarrow} u_0 \in H$, $p(u_n) \to p \neq \pm\infty$, $n \to \infty$, следует, что $u_0 \in Q$ и $p(u_0) \leqslant p$.

Заметим, что в случае, когда множество Q (*слабо*) *замкнуто*, условие (слабой) полузамкнутости снизу *эквивалентно* известному условию (*слабой*) *полунепрерывности снизу* функционала $p(u)$, $u \in Q$. При этом справедлива аналогичная вышеприведенной

Теорема 1$'$. *Если функционал $p(u)$, $u \in Q$, выпуклый, то для слабой полузамкнутости снизу необходима и достаточна его полузамкнутость снизу.*

Заметим также, что всякий (слабо) полузамкнутый снизу функционал является (слабо) замкнутым.

Достаточно широкий класс полузамкнутых снизу функционалов составляют функционалы типа

$$p(u) \equiv ||Au - \overline{f}\,||_F^2, \quad u \in D_A \subseteq H, \tag{1}$$

где $A: H \to F$ — линейный замкнутый оператор, действующий в гильбертово пространство F, $\overline{f}$ — элемент из F, D_A — область определения A.

Отметим, что в рассматриваемом случае функционал $p(u)$, $u \in Q$, является также слабо полузамкнутым снизу в силу теоремы 1$'$. Если в (1) оператор нелинейный, то для слабой полузамкнутости снизу $p(u)$, $u \in D_A$, в этом случае достаточна слабая замкнутость оператора A [7].

Дальше важную роль играет

Определение 5. Функционал $p(u)$, $u \in Q \subseteq H$, назовем *A-выпуклым*, если выполнены условия:

1) Q — выпуклое множество;

2) существует линейный оператор $A: H \to F$ с областью определения $D_A \supseteq Q$, такой, что

$$\mu\big(||Au - Av||_F\big) \leqslant \frac{1}{2}\,p(u) + \frac{1}{2}\,p(v) - p\left(\frac{u+v}{2}\right) \quad \forall u,\, v \in Q,$$

где $\mu(\tau) \geqslant 0$, $\mu(0) = 0$ — непрерывная в нуле строго возрастающая функция при $\tau \geqslant 0$.

Легко видеть, что если A — оператор аннулирования, то мы имеем дело с выпуклым функционалом; если уравнение $Au = 0$ имеет лишь тривиальное решение $n = 0$, то — со строго выпуклым функционалом, а если к тому же оператор A^{-1} ограничен, то — с равномерно выпуклым функционалом [8]. Таким образом, понятие A-выпуклости естественно обобщает ряд известных понятий. Нетрудно видеть, что функционал (1) при линейном операторе A является A-выпуклым.

3. Основные предпосылки. Существование g-минимальных решений. Далее наряду с $\varphi(u)$ и $g(u)$, $u \in D$, будут рассматриваться приближающие их функционалы $\widetilde{\varphi}(u)$ и $\widetilde{g}(u)$, $u \in D$.

Выделим ряд условий:

I) $\varphi(u)$ слабо замкнут, $g(u)$ слабо полузамкнут снизу;

I$'$) $\varphi(u)$, $g(u)$ и их приближения $\widetilde{\varphi}(u)$, $\widetilde{g}(u)$ слабо полузамкнуты снизу;

II) если последовательность $u_n \in D$, $n \to \infty$, такова, что

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(u_n) = \varphi^*, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}}\, g(u_n) \leqslant g^*, \tag{2}$$

то $\{u_n\}$ слабо компактна в H, а если, кроме того,

$$\lim_{n \to \infty} g(u_n) = g^*, \tag{2$'$}$$

то $\{u_n\}$ компактна в H;

II$'$) множества вида $D_C = \{u \in D : \ \varphi(u) \leqslant C, \ g(u) \leqslant C\}$ при любом конечном C слабо компактны, а любая последовательность $\{u_n\}$, удовлетворяющая (2), (2$'$), компактна в H;

III) существуют постоянные k_0, k_1, $k_3 \geqslant 0$, $k_0 + k_1 > 0$, такие, что функционал $F(u) = k_0\varphi(u) + k_1 g(u) + k_3 \geqslant 0$, $u \in D$, и выполнены условия аппроксимации

$$\bigl|\widetilde{\varphi}(u) - \varphi(u)\bigr| \leqslant \delta_0 F(u), \quad \bigl|\widetilde{g}(u) - g(u)\bigr| \leqslant \delta_1 F(u), \tag{3}$$

где δ_0, δ_1 — некоторые малые величины; считается, что $g(u)$, $\widetilde{g}(u) \geqslant 0$, $u \in D$;

IY$'$) функционал $\varphi(u)$ — A-выпуклый, функционал $g(u)$ — L-выпуклый с функциями $\mu_0(\tau)$ и $\mu_1(\tau)$ соответственно, причем существуют постоянные $k_0' \geqslant 0$, $k_1' \geqslant 0$, $k_0' + k_1' > 0$, такие, что функционал

$$F_1(u) = k_0'\mu_0\bigl(||Au||_F\bigr) + k_1'\mu_1\bigl(||Lu||_G\bigr) \geqslant \gamma^2 \nu\bigl(||u||_H\bigr), \quad u \in D, \tag{4}$$

где $\nu(\tau)$ — функция того же типа, что и $\mu(\tau)$; пространства F и G, как и H, гильбертовы, а операторы A и L предполагаются замкнутыми.

Далее условия I, II, III предполагаются выполненными *всегда*, а условия I$'$, II$'$, IY$'$ привлекаются по мере необходимости. Заметим, что выполнение условий I$'$, II$'$ влечет выполнение условий I, II.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 2. *Множество g-минимальных решений $\widehat{D}^*$ непусто.*

Действительно, множество D^* непусто по предположению. Пусть $u_n \in D^*$ — минимизирующая последовательность для функционала $g(u) : g^* \leqslant g(u_n) \leqslant g^* + \rho_n$, $\rho_n > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = 0$. Поскольку $\varphi(u_n) = \varphi^*$, то в силу (2) последовательность $\{u_n\}$ слабо компактна. Без ограничения общности будем считать, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} u_0 \in H$. В силу условия I получаем: $u_0 \in D^*$, $g(u_0) \leqslant g^*$. Отсюда следует утверждение:

Теорема 2$'$. *Если выполнено также условие* IY$'$, *то g-минимальное решение определяется однозначно*: $\widehat{D}^* = \{\widehat{u}\}$.

Действительно, пусть $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ — два g-минимальных решения. Тогда в силу (4) имеем

$$\begin{aligned}
\nu\bigl(||\widehat{u}_1 - \widehat{u}_2||_H\bigr) &\leqslant \frac{1}{\gamma^2} F_1(\widehat{u}_1 - \widehat{u}_2) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\gamma^2} k_0' \left[\frac{1}{2}\varphi(\widehat{u}_1) + \frac{1}{2}\varphi(\widehat{u}_2) - \varphi\Bigl(\frac{\widehat{u}_1 + \widehat{u}_2}{2}\Bigr)\right] + \frac{1}{\gamma^2} k_1' \left[\frac{1}{2} g(\widehat{u}_1) + \frac{1}{2} g(\widehat{u}_2) - g\Bigl(\frac{\widehat{u}_1 + \widehat{u}_2}{2}\Bigr)\right] \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\gamma^2} k_0' \left[\varphi^* - \varphi\Bigl(\frac{\widehat{u}_1 + \widehat{u}_2}{2}\Bigr)\right] + \frac{1}{\gamma^2} k_1' \left[g^* - g\Bigl(\frac{\widehat{u}_1 + \widehat{u}_2}{2}\Bigr)\right] \leqslant 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\widehat{u}_1 = \widehat{u}_2$. Теорема доказана.

Укажем достаточные условия, при которых выполнены условия I (I$'$), II (II$'$), III, (IY$'$), если функционалы $\varphi(u)$ и $g(u)$ имеют вид

$$\varphi(u) \equiv ||Au - \overline{f}\,||_F^2, \quad g(u) \equiv ||Lu - \overline{g}\,||_G^2, \quad u \in D = D_A \cap D_L, \tag{5}$$

и $A : H \to F$, $L : H \to G$ суть линейные замкнутые операторы, действующие в пространствах Гильберта, а D_A и D_L — области определения операторов A и L. Элемент $\overline{g} \in G$ считается заданным, а вместо $\overline{f} \in F$

заданы $f_\delta \in F : ||\overline{f} - f_\delta||_F \leqslant \delta \to 0$. Допускается, что $\varphi^* > 0$ и существует по крайней мере один элемент $\overline{u} \in D$, такой, что $||A\overline{u} - \overline{f}\,||_F^2 = \varphi^*$.

Если A — произвольный и $L = E$ — тождественный операторы, то задача отыскания g-минимальных решений совпадает с задачей отыскания псевдорешения [29] уравнения $Au = \overline{f}$. Случай $A = E$ и L — произвольный оператор соответствует задаче вычисления значений оператора L [9]; в эту же схему вкладывается задача восстановления [27] при специальном выборе оператора L. Общий случай соответствует задаче вычисления значений (неограниченного) оператора L на псевдорешениях операторного уравнения $Au = \overline{f}$ [10].

Далее считается, что операторы A и L таковы, что определяемая ими *суммарная* квадратичная форма $F_1(u) = k_0'||Au||_F^2 + k_1'||Lu||_G^2$, $u \in D$, положительно определена при некоторых k_0', $k_1' \geqslant 0$, $k_0' + k_1' > 0$:

$$F_1(u) \geqslant \gamma^2||u||_H^2, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad u \in D. \tag{6}$$

Относительно операторов A_h и L_τ, являющихся линейными приближениями к A и L, предположим, что

$$||A_h u - Au||_F^2 \leqslant hF_1(u), \quad ||L_\tau u - Lu||_G \leqslant \tau F_1(u), \quad h, \tau \to 0. \tag{7}$$

Условия (7) выполнены, в частности, если $\tau = 0$, а

$$||A_h u - Au||_F^2 \leqslant h||Lu||_G^2 \tag{7$'$}$$

для $u \in D_L \subset D_A$, т.е. на "гладких" элементах.

Условие I выполняется в силу линейности и замкнутости операторов A и L. Далее проверим выполнение условия II. Пусть (2) выполнено, т.е. $u_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\lim_{n\to\infty} ||Au_n - \overline{f}\,||_F^2 = \varphi^*, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, ||Lu_n - \overline{g}\,||_G^2 \leqslant g^*.$$

Тогда последовательности $\{Au_n\}$, $\{Lu_n\}$ ограничены, а последовательность $\{u_n\}$ ограничена в силу (6).

Следовательно, последовательности $\{Au_n\}$, $\{Lu_n\}$, $\{u_n\}$ слабо компактны. Без ограничения общности будем считать, что они слабо сходятся: $Au_n \xrightarrow{\text{сл}} \widehat{f} \in F$, $Lu_n \xrightarrow{\text{сл}} \widehat{g} \in G$, $u_n \xrightarrow{\text{сл}} u_0 \in H$. В силу слабой замкнутости операторов A и L имеем: $u_0 \in D = D_A \cap D_L$ и $Au_0 = \widehat{f}$, $\widehat{g} = Lu_0$.

Поскольку $||Au_0 - \overline{f}\,||_F^2 = \varphi^*$, т.е. $u_0 \in D^*$, и $||Lu_0 - \overline{g}\,||_G^2 \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, ||Lu_n - g^*||_G^2 \leqslant g^*$, то $u_0 \in \widehat{D}^*$ и, следовательно, $||Lu_0 - \overline{g}\,||_G^2 = \lim\limits_{n\to\infty} ||Lu_n - \overline{g}\,||_G^2$. Вспоминая, что $Lu_n \xrightarrow{\text{сл}} Lu_0$, отсюда получаем $Lu_n \to Lu_0$, $n \to \infty$. Так как, кроме того, $Au_n \to Au_0$, то в силу (5) приходим к неравенству

$$||u_n - u_0||_H^2 \leqslant \frac{1}{\gamma^2} F_1(u_n - u_0) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

т.е. последовательность $\{u_n\}$ также сходится. Таким образом, выполнение условия II доказано. Выполнение условий II$'$ и IY$'$ следует из (6). Выполнение условия III проверяется путем прямых аналитических выкладок, которые занимают много места и поэтому не приводятся.

Условие I$'$ выполняется, если операторы A_h и L_τ также замкнуты.

4. Сходимость метода регуляризации. Пусть выполнены условия I, II, III предыдущего пункта. Следуя [11], положим

$$\widetilde{\Phi}^\alpha[u] \equiv \widetilde{\varphi}(u) + \alpha\widetilde{g}(u), \quad u \in D, \tag{9}$$

где $\alpha > 0$ — вспомогательный параметр, называемый *параметром регуляризации*.

Лемма I. *Пусть параметр $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, $\delta = (\delta_0, \delta_1)$ удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\delta_0\to 0} \frac{\delta_0}{\alpha} = \lim_{\delta_1\to 0} \alpha\delta_1 = 0. \tag{10}$$

Тогда при достаточно малых $\underline{\delta}^0$, $\underline{\delta}^1 > 0$ функционал $\widetilde{\Phi}^\alpha[u]$ ограничен снизу для всех $\delta_0, \delta_1 : 0 < \delta_0 < \underline{\delta}^0$, $0 < \delta_1 < \underline{\delta}^1$, т.е. $\widetilde{\Phi}_*^\alpha = \inf\limits_{u\in D} \widetilde{\Phi}^\alpha[u] > -\infty$.

Доказательство леммы 1 легко следует из (10) и условия III.

Определим множества $\widetilde{D}_n^\alpha = \{u \in D : \ \widetilde{\Phi}_*^\alpha \leqslant \widetilde{\Phi}^\alpha[u] \leqslant \widetilde{\Phi}_*^\alpha + \rho_n\}$, где величины $\rho_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, заданы и могут, например, характеризовать меру точности решения регуляризованной задачи каким-либо методом минимизации. Установим необходимые нам свойства этих множеств.

Лемма 2. *Пусть параметр $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ выбран таким образом, что*

$$\lim_{|\delta|,\rho_n\to 0} \alpha = \lim_{|\delta|,\rho_n\to 0} \frac{\delta_0}{\alpha} = \lim_{|\delta|,\rho_n\to 0} \frac{\rho_n}{\alpha} = 0.$$

Тогда, если $\widetilde{D}_n \equiv \widetilde{D}_n^\alpha$, *то* $\lim\limits_{|\delta|,\rho_n\to 0} \sup_{u\in\widetilde{D}_n} \left|\varphi(u) - \varphi^*\right| = 0$, $\overline{\lim\limits_{|\delta|,\rho_n\to 0}} \sup_{u\in\widetilde{D}_n} g(u) \leqslant g^*$.

Действительно, для любого $\widehat{u} \in \widehat{D}^*$ имеем $\widetilde{\Phi}_*^\alpha \leqslant \widetilde{\Phi}^\alpha[\widehat{u}]$. Тогда для любого $u \in \widetilde{D}_n$, используя условие III, получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(u) &\leqslant \widetilde{\varphi}(\widehat{u}) + \alpha\widetilde{g}(\widehat{u}) + \rho_n \leqslant \varphi(\widehat{u}) + \delta_0 F(\widehat{u}) + \alpha\big[g(\widehat{u}) + \delta_1 F(\widehat{u})\big] + \rho_n = \\ &= \varphi^* + \alpha g^* + (\delta_0 + \alpha\delta_1)F(\widehat{u}) + \rho_n;\end{aligned} \tag{11}$$

следовательно,

$$-\delta_0 F(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) - \varphi(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) - \varphi^* \leqslant \alpha g^* + \rho_n + (\delta_0 + \alpha\delta_1)F(\widehat{u}), \quad u \in \widetilde{D}_n. \tag{12}$$

Далее, аналогично предыдущему, приходим к оценке

$$\begin{aligned}\alpha g(u) &\leqslant \alpha\big(\widetilde{g}(u) + \delta_1 F(u)\big) = \widetilde{\Phi}^\alpha[u] - \widetilde{\varphi}(u) + \alpha\delta_1 F(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(\widehat{u}) - \widetilde{\varphi}(u) + \alpha\widetilde{g}(\widehat{u}) + \rho_n = \\ &= \widetilde{\varphi}(\widehat{u}) - \varphi(\widehat{u}) + \varphi(\widehat{u}) - \widetilde{\varphi}(u) + \alpha\delta_1 F(u) + \alpha\widetilde{g}(\widehat{u}) + \rho_n \leqslant \delta_0 F(\widehat{u}) + \delta_0 F(u) + \alpha\delta_1 F(u) + \alpha\widetilde{g}(\widehat{u}) + \rho_n \leqslant \\ &\leqslant (\delta_0 + \alpha\delta_1)F(\widehat{u}) + (\delta_0 + \alpha\delta_1)F(u) + \alpha g^* + \rho_n,\end{aligned}$$

т.е. для любого $u \in \widetilde{D}_n$ функционал

$$g(u) \leqslant g^* + \Big(\frac{\delta_0}{\alpha} + \delta_1\Big)F(\widehat{u}) + \Big(\frac{\delta_0}{\alpha} + \delta_1\Big)F(u) + \frac{\rho_n}{\alpha}. \tag{13}$$

Кроме того,

$$\varphi(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) + \delta_0 F(u) \leqslant \varphi^* + \alpha g^* + (\delta_0 + \alpha\delta_1)F(\widehat{u}) + \delta_0 F(u) + \rho_n. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует, что в условиях леммы

$$F(u) \leqslant C = \mathrm{const}, \tag{15}$$

где C не зависит от δ, ρ_n и $u \in \widetilde{D}_n$. Используя оценку (15) и соотношения (12), (13), убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда* $\lim\limits_{|\delta|,\rho_n\to 0} \beta_H(\widetilde{D}_n, \widehat{D}^*) = 0$, *т.е. множество* $\widetilde{D}_n$ β_H*-аппроксимирует множество* g*-минимальных решений.*

Доказательство. Предположим противное: $\lim\limits_{|\delta|,\rho_n\to 0} \rho_H(\widetilde{D}_n, \widehat{D}^*) \neq 0$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ и последовательность элементов $v_k = \widetilde{u}_{n_k}^{\alpha_k}$, $\alpha_k = \alpha(\delta_0^k, \rho_{n_k})$, $v_k \in \widetilde{D}_{n_k}$, такие, что $v_k \notin O_\varepsilon^H\big[\widehat{D}^*\big]$, $k = 1, 2, \ldots$, где $O_\varepsilon^H\big[\widehat{D}^*\big] = \big\{u \in H: \ \rho_H(u, \widehat{D}^*) < \varepsilon\big\}$. Используя лемму 2, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\varphi(v_k) - \varphi^*\right| = 0$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g(v_k) \leqslant g^*$, $v_k \in D$. В силу условия II последовательность $\{v_k\}$ слабо компактна. Без ограничения общности считаем ее слабо сходящейся: $v_k \xrightarrow{сл} \widehat{u} \in H$. Тогда, т.к. функционал $\varphi(u)$, $u \in D$ по условию I слабо замкнут, заключаем, что $\widehat{u} \in D^*$, $\varphi(\widehat{u}) = \varphi^*$. С другой стороны, используя слабую полузамкнутость снизу функционала $g(u)$, получим оценку $g(\widehat{u}) \leqslant g^*$. Поскольку $\widehat{u} \in D^*$, то отсюда следует, что $\widehat{u} \in \widehat{D}^*$.

Итак, $v_k \xrightarrow{сл} \widehat{u} \in \widehat{D}^*$. Легко показать, что $\lim\limits_{k\to\infty} g(v_k) = g^*$, используя слабую полузамкнутость снизу функционала $g(u)$, $u \in D$. Следовательно, по условию II последовательность $\{v_k\}$ компактна в H. Для простоты считаем, что последовательность $\{v_k\}$ уже сходится. Тогда $v_k \to \widehat{u} \in \widehat{D}^*$ и $v_k \in O_\varepsilon^H\big[\widehat{D}^*\big]$, $k \geqslant \underline{k}$, что противоречит выбору последовательности $\{v_k\}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Если множество g-минимальных решений одноэлементно: $\widehat{D}^* = \{\widehat{u}\}$, то в условиях леммы 2 $\lim\limits_{|\delta_0|,\rho_n\to 0} ||\widetilde{u} - \widehat{u}||_H = 0$, где $\widetilde{u}_n \in \widetilde{D}_n$ — любой элемент множества $\widetilde{D}_n$.

Замечание 2. Согласно условию леммы 2 параметр $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ согласуется *только* с величиной δ_0, характеризующей близость функционалов $\varphi(u)$ и $\widetilde{\varphi}(u)$ и величиной ρ_n, характеризующей точность минимизации регуляризованного функционала $\widetilde{\Phi}^\alpha[u]$, $u \in D$. В частности, если $\delta_0 = 0$, $\rho_n \equiv 0$ (при этом предполагается, что множества $\widetilde{D}_n^\alpha \neq \emptyset$), то параметр α и величину δ_1 можно устремлять к нулю *независимо.* Отсюда следует, что точности аппроксимации функционала $\varphi(u)$ и точности решения соответствующей вариационной задачи должно быть уделено особое внимание. Применительно к частному случаю (5) можно сделать вывод о большей целесообразности постановки исходной задачи как задачи *вычисления* значений неограниченного оператора, нежели как задачи *решения* операторного уравнения.

Замечание 3. Может оказаться более удобным характеризовать сходимость приближенных решений $\widetilde{D}_n$ при соответствующем выборе параметра $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ не в терминах β_H-сходимости, а в следующем смысле.

Положим $\beta(\delta, \rho_n; v) = \sup\limits_{u\in\widetilde{D}_n} \Big\{ \inf\limits_{\widehat{u}\in\widehat{D}^*} \big|(u-\widehat{u}, v)_H\big| + \big|\varphi(u)-\varphi^*\big| + \big|g(u)-g^*\big| \Big\}$, где v — произвольный элемент из H. Тогда при выполнении условий леммы 2 имеем $\lim\limits_{|\delta|,\rho_n\to 0} \beta(\delta, \rho_n; v) = 0$ для любого $v \in H$. Это предложение доказывается так же, как и теорема 3.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* I′ и II′. *Тогда при достаточно малых* δ_0 *и* δ_1 *существует по крайней мере один элемент, минимизирующий функционал* $\widetilde{\Phi}^\alpha[u]$ *на множестве* D.

Доказательство. В силу леммы 1 можно считать, что $\widetilde{\Phi}^\alpha_* > -\infty$. Пусть $\{u_n\}$ — произвольная минимизирующая последовательность: $\widetilde{\Phi}^\alpha_* \leqslant \widetilde{\Phi}^\alpha[u_n] \leqslant \widetilde{\Phi}^\alpha_* + \rho_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, $\rho_n > 0$, $u_n \in D$. Следуя схеме доказательства леммы 2, устанавливаем (параметр регуляризации α считается фиксированным, а величины δ_0 и δ_1 при необходимости достаточно малыми), что

$$\big|\varphi(u_n)\big| \leqslant C = \text{const}, \quad 0 \leqslant g(u_n) \leqslant C = \text{const}, \tag{16}$$

где C не зависит от n.

В силу условия II′ отсюда следует слабая компактность последовательности $\{u_n\}$. Поскольку

$$\big|\widetilde{\varphi}(u_n) - \varphi(u_n)\big| \leqslant \delta_0(k_0c + k_1c + k_2), \quad \big|\widetilde{g}(u_n) - g(u_n)\big| \leqslant \delta_1(k_0c + k_1c + k_2),$$

то справедливы неравенства

$$\big|\widetilde{\varphi}(u_n)\big| \leqslant \widehat{C} = \text{const}, \quad 0 \leqslant \widetilde{g}(u_n) \leqslant \widehat{C} = \text{const}. \tag{16′}$$

Используя (16′) и слабую компактность последовательности $\{u_n\}$, выделим подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \leqslant \{u_n\}$ так, чтобы $u_{n_k} \xrightarrow{сл} \widetilde{u}^\alpha \in H$, $\widetilde{\varphi}(u_{n_k}) \to \widetilde{\varphi}$, $\widetilde{g}(u_{n_k}) \to \widetilde{g}$ при $k \to \infty$. Заметим, что $\widetilde{\varphi} + \alpha\widetilde{g} = \widetilde{\Phi}^\alpha_*$. Используя слабую полузамкнутость снизу функционалов $\widetilde{\varphi}(u)$, $\widetilde{g}(u)$ (условие I′), получаем $\widetilde{u}^\alpha \in D$, $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}_\alpha) \leqslant \widetilde{\varphi}$, $\widetilde{g}(\widetilde{u}^\alpha) \leqslant \widetilde{g}$, т.е. $\widetilde{\Phi}^\alpha[\widetilde{u}_\alpha] \leqslant \widetilde{\Phi}^\alpha_*$.

Следовательно, элемент $\widetilde{u}^\alpha$ минимизирует функционал $\widetilde{\Phi}^\alpha[u]$, $u \in D$. Теорема доказана.

Замечание. Если выполнены условия I′ и II′, то в определении множества $\widetilde{D}^\alpha_n$ можно полагать $\rho_n \equiv 0$. При этом $\widetilde{D}^\alpha \equiv \widetilde{D}^\alpha_n = \big\{u \in D : \ \widetilde{\Phi}^\alpha[u] = \widetilde{\Phi}^\alpha_*\big\} \neq \emptyset$.

5. Усиленная сходимость регуляризованных решений. Как было доказано, регуляризованные решения β_H-сходятся к множеству g-минимальных решений. Далее наряду с условиями I, II, III будем предполагать выполненным и условие IY′. Оказывается, в этом случае о сходимости регуляризованных решений можно утверждать существенно большее.

Определим на множестве $D = D_A \cap D_L$ скалярное произведение

$$(u, v)_{A,L} = (Au, Av)_F + (Lu, Lv)_G, \qquad u, v, \in D. \tag{17}$$

Легко убедиться, используя замкнутость операторов A и L, что множество D со скалярным произведением (17) образует (полное) гильбертово пространство, которое мы обозначим через $H_{A,L}$. Справедлива

Теорема 5. *При выполнении условий леммы* 2 *и условия* IY′ *имеет место соотношение*

$$\lim_{|\delta|,\rho_n\to 0} \beta_{H_{A,L}}(\widetilde{D}_n, \widehat{D}^*) = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Предполагая противное, найдем последовательность $v_k \in \widetilde{D}^{\alpha_k}_{n_k}$, $\alpha_k = \alpha(\delta^k_0, \rho_{n_k})$, и число $\varepsilon > 0$, такие, что $v_k \notin O^\varepsilon_{H_{A,L}}(\widehat{D}^*)$. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3, устанавливаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(v_k) = \varphi^*, \quad \lim_{k\to\infty} g(v_k) = g^* \tag{19}$$

(при необходимости нужно перейти к подпоследовательности). Поскольку в рассматриваемом случае множество $\widehat{D}^* = \{\widehat{u}\}$, то используя условие A-выпуклости для функционала $\varphi(u)$, получаем

$$\mu_0\big(||Av_k - A\widehat{u}||_F\big) \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi(v_k) + \frac{1}{2}\,\varphi(\widehat{u}) - \varphi\Big(\frac{\widehat{u}+v_k}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\left[\varphi(v_k) - \varphi^*\right] \to 0,$$

когда $k \to \infty$; следовательно, $Av_k \to A\widehat{u}$, $k \to \infty$.

Поступая аналогично с функционалом $g(u)$ и считая, что

$$\lim_{k\to\infty} g\Big(\frac{v_k+\widehat{u}}{2}\Big) = g^*, \tag{20}$$

устанавливаем предельное соотношение $Lv_k \to L\widehat{u}$, $k \to \infty$, что завершает доказательство теоремы.

Покажем, что (20) выполняется. Действительно,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, g\Big(\frac{v_k+\widehat{u}}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\ \overline{\lim}\, g\,(v_k) + \frac{1}{2}\, g^* = g^*. \tag{21}$$

Полагая $z_k = \dfrac{v_k+\widehat{u}}{2}$, заметим, что $z_k \xrightarrow{сл} \widehat{u} \in \widehat{D}^*$. Выберем любую последовательность $\{z_{k_l}\} \leqslant \{z_k\}$ так, чтобы $\lim\limits_{l\to\infty} g(z_{k_l}) = g_0$. Используя слабую полузамкнутость снизу функционала $g(u)$ и соотношения (21), получим $g^* = g(\widehat{u}) \leqslant g_0 \leqslant g^*$. Отсюда следует (20). Утверждение доказано.

Замечание. В частном случае, когда функционалы $\varphi(u)$, $g(u)$, $u \in D$, определены согласно (5), вместо (18) имеем $\lim\limits_{|\delta|,\rho_n\to 0} ||\widetilde{u}_n - \widehat{u}||_{A,L} = 0$, где $\widetilde{u}_n \in \widetilde{D}_n$ — любой элемент, а параметр $\alpha = \alpha(\delta_0, \rho_n)$ удовлетворяет необходимым условиям согласования.

Если операторы A_h и L_τ также замкнуты, то можно допустить $\rho_n \equiv 0$.

Аналогичный результат справедлив и тогда, когда в (5) операторы A и L *нелинейны*. При этом предполагается выполненным условие их слабой замкнутости. Используя замечание 3 к теореме 3, можно доказать, что в условиях леммы 2

$$\lim_{|\delta|,\rho_n\to 0}\ \sup_{u\in\widetilde{D}_n} \big(||Au - A\widehat{u}||_F^2 + ||Lu - L\widehat{u}||_G^2\big) = 0.$$

Случай $L = L_\tau = E$, т.е. случай задачи решения нелинейного операторного уравнения $Au = \overline{f}$, был рассмотрен в [7], а случай $A = A_h = E$, соответствующий задаче вычисления значений неограниченного нелинейного оператора, — в работе [12]. Другой способ устойчивого вычисления значений неограниченного оператора, использующий понятие *сглаживающего* оператора, рассматривался в [13].

6. Обобщенный метод невязки. Метод регуляризации является одним из эффективных способов построения β_H- или $\beta_{H_{A,L}}$-устойчивых алгоритмов решения задачи отыскания g-минимальных решений экстремальных задач. Далее *метод невязки*, идея применения которого к некорректным задачам восходит к работам [16, 17], а обоснование дано в ряде работ (см. [18–20]), обобщается на случай достаточно общих экстремальных задач.

Отметим, что для нелинейных операторных уравнений этот метод рассматривался в работах [7, 19], для общей задачи вычисления значений неограниченного оператора на решениях операторного уравнения (линейный случай) — в [21], а для задачи вычисления значений линейного многозначного оператора — в [22].

Переходим к формулировке метода. Используя первую часть условия II, получаем $\widetilde{\varphi}(\widehat{u}) \leqslant \varphi^* + \delta_0 F(\widehat{u})$, $\widehat{u} \in \widehat{D}^*$. Далее предполагаем, что известна величина $\widehat{\varphi}^*$, такая, что $\varphi^* \leqslant \widehat{\varphi}^*$ и $\widehat{\varphi}^* \to \varphi^*$. Пусть $\widetilde{N} = \big\{u \in D:\ \widetilde{\varphi}(u) \leqslant \widehat{\varphi}^* + \delta_0 F(u)\big\}$. Очевидно, что $\widetilde{N} \supseteq \widehat{D}^*$. Множество $\widetilde{N}$ можно считать множеством *формальных* решений исходной задачи. Для выделения *содержательных* решений рассмотрим задачу: найти $\widetilde{u} \in \widetilde{N}$, такие, что

$$\widetilde{g}(\widetilde{u}) = \widetilde{g}^{\,*} = \inf_{u\in\widetilde{N}} \widetilde{g}(u). \tag{22}$$

Множество решений задачи (22) обозначим через $\widetilde{D}$. Способ построения приближений к g-минимальным решениям исходной задачи на минимум функционала $\varphi(u)$, $u \in D$, в соответствии с (22) и определяет *обобщенный метод невязки.*

Как и ранее, предполагаем выполненными без оговорок условия I, II, III. Справедлива

Теорема 6. *Пусть множества* $\widetilde{D}_n = \big\{u \in \widetilde{N}:\ \widetilde{g}^{\,*} \leqslant \widetilde{g}(u) \leqslant \widetilde{g}^{\,*} + \rho_n\big\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *где* $\rho_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. *Тогда при* $|\delta| \to 0$ *и* $n \to \infty$ *выполнено* $\beta_H(\widetilde{D}_n, \widehat{D}^*) \to 0$, *а также* $\beta(\delta, \rho_n; v) \to 0$ *для любого* $v \in H$.

Доказательство. Очевидно, для любого $\widehat{u} \in \widehat{D}^*:\ \widetilde{g}^{\,*} \leqslant \widetilde{g}(\widehat{u}) \leqslant g^* + \delta_1 F(\widehat{u})$ и, следовательно, для любого $u \in \widetilde{D}_n$ имеем

$$0 \leqslant g(u) \leqslant \widetilde{g}(u) + \delta_1 F(u) \leqslant g^* + \delta_1 F(\widehat{u}) + \delta_1 F(u) + \rho_n. \tag{23}$$

Далее заметим, что

$$-\delta_0 F(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) - \varphi(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) - \varphi^* \leqslant \widehat{\varphi}^{\,*} - \varphi^* + \delta_0 F(u) \qquad (24)$$

и

$$\varphi(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) + \delta_0 F(u) \leqslant \widehat{\varphi}^{\,*} + 2\delta_0 F(u), \qquad (25)$$

причем оценки (24), (25) справедливы для любого $u \in \widetilde{D}_n$.

Из (23), (25) следует, что при достаточно малых δ_0, δ_1 значения $F(u) \leqslant C = \text{const}$, $u \in \widetilde{D}_n$, где C не зависит от δ_0, δ_1 и ρ_n, когда они достаточно малы. Тогда из (23), (24) следует, что

$$\lim_{|\delta|,\rho_n \to 0} \sup_{u \in \widetilde{D}_n} \left|\varphi(u) - \varphi^*\right| = 0, \qquad \overline{\lim_{|\delta|,\rho_n \to 0}} \sup_{u \in \widetilde{D}_n} g(u) \leqslant g^*, \qquad (26)$$

т.е. справедливы соотношения, выведенные в лемме 2. Дальше следует использовать технику доказательства теоремы 3. Теорема доказана.

Аналогично теореме 4 доказывается следующая

Теорема 7. *Если выполнены условия* I$'$, II$'$ и III, *то множество решений* $\widetilde{D}$ *задачи* (22) *не пусто и в теореме* 6 *можно полагать* $\rho_n \equiv 0$.

Доказательство этой теоремы следует схеме доказательства теоремы 4.

Как и в п. 5, можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *При выполнении условия* IY$'$ *имеет место усиленная сходимость, а именно*:

$$\lim_{|\delta|,\rho_n \to 0} \beta_{H_{A,L}}(\widetilde{D}_n, \widehat{D}^*) = 0.$$

Заметим, что здесь множество $\widehat{D}^* = \{\widehat{u}\}$, т.е. это множество состоит из единственного элемента. В случае, когда $\widetilde{g}(u) \equiv g(u) = ||u||_H^2$ и $\delta_0 = 0$, обобщенный метод невязки рассматривался также в работе [26].

7. Обобщенный метод квазирешений. Легко видеть, что для всякого $\widehat{u} \in \widehat{D}^*$ имеем

$$\widetilde{g}(\widehat{u}) \leqslant g^* + \delta_1 F(\widehat{u}).$$

Далее будем предполагать, что известна величина $\widehat{g}^{\,*}$, такая, что $\widehat{g}^{\,*} \geqslant g^*$ и $\lim\limits_{|\delta| \to 0} \widehat{g}^{\,*} = g^*$. Определим множества $\widetilde{K} = \left\{u \in D : \ \widetilde{g}(u) \leqslant \widehat{g}^{\,*} + \delta_1 F(u)\right\}$. Очевидно, что $\widetilde{K} \supseteq \widehat{D}^*$ по условию.

Следуя методу, разработанному В.К. Ивановым в ряде работ, из которых отметим только [23], рассмотрим задачу: найти $\widetilde{u} \in \widetilde{K}$, такие, что

$$\inf_{u \in \widetilde{K}} \widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{u}). \qquad (27)$$

Множество решений этой задачи, если оно не пусто, снова обозначим через $\widetilde{D}$. Тогда действие приближенного фильтрационного оператора $\widetilde{F}$ можно записать так: $\widetilde{F}(\widetilde{K}) = \widetilde{D}$, т.е. как выбор из некоторого априорно заданного множества элементов, являющихся формальными решениями исходной задачи.

Мы будем предполагать, как обычно, что выполняются условия I, II, III и, кроме того, что

$$\widetilde{\varphi}^{\,*} = \inf_{u \in \widetilde{K}} \widetilde{\varphi}(u) > -\infty.$$

Справедлива

Теорема 9. *Пусть* $\widetilde{D}_n = \left\{u \in \widetilde{K} : \ \widetilde{\varphi}^{\,*} \leqslant \widetilde{\varphi}(u) \leqslant \widetilde{\varphi}^{\,*} + \rho_n\right\}$, *где* $\rho_n > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = 0$. *Тогда при* $|\delta| \to 0$, $n \to \infty$ *имеем* $\beta_H(\widetilde{D}_n, \widehat{D}^*) \to 0$. *Кроме того,* $\beta(\delta, \rho_n; v) \to 0$ *для любого элемента* $v \in H$.

Доказательство. Очевидно, для любого $\widehat{u} \in \widehat{D}^*$

$$\widetilde{\varphi}^{\,*} \leqslant \widetilde{\varphi}(\widehat{u}) \leqslant \varphi^* + \delta_0 F(\widehat{u});$$

следовательно, для любого $u \in \widetilde{D}_n$ получим

$$-\delta_0 F(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) - \varphi(u) \leqslant \widetilde{\varphi}^{\,*} - \varphi^* \leqslant \delta_0 F(\widehat{u}) + \rho_n,$$

$$\varphi(u) \leqslant \widetilde{\varphi}(u) + \delta_0 F(u) \leqslant \widetilde{\varphi}^{\,*} + \rho_n + \delta_0 F(u) \leqslant \varphi^* + \delta_0\big(F(\widehat{u}) + F(u)\big) + \rho_n$$

и

$$0 \leqslant g(u) \leqslant \widetilde{g}(u) + \delta_1 F(u) \leqslant \widehat{g}^{\,*} + 2\delta_1 F(u) = g^* + (\widehat{g}^{\,*} - g^*) + 2\delta_1 F(u).$$

Из этих неравенств снова приходим к соотношениям, выведенным в лемме 2. Далее необходимо повторить основные моменты доказательства теоремы 3. Теорема доказана.

Если предположить выполненным условие IY$'$, то аналогично предыдущему можно доказать усиленную сходимость обобщенного метода квазирешений.

8. Заключительные замечания. Когда функционалы $\varphi(u)$, $g(u)$, $u \in D$, задаются в виде (5), а операторы A и L линейны и $h = \tau = 0$, методы регуляризации, невязки и квазирешений были изучены в [21]. Там же указаны условия единственности приближенных решений и даны оценки погрешностей методов в случае, когда операторы A и L заданы точно. Полученные здесь результаты в случае (5) можно усилить, отказавшись от гильбертовости пространств H, F и G. В самом деле, при доказательстве теорем сходимости существенную роль играло условие II. Его выполнение зависит как от свойств операторов A и L, так и от топологических свойств пространств H, F и G. Если считать, как и раньше, операторы A и L линейными и замкнутыми и удовлетворяющими условию (6), то условие II выполняется, например, тогда, когда H рефлексивно, F банахово, а G — типа Ефимова–Стечкина [24, 25].

Учитывая это замечание, можно получить некоторые результаты, вытекающие из работ [12, 22].

Если пространства H, F и G лишь рефлексивны, то можно показать, что имеет место *слабая β-сходимость* приближенных решений в следующем смысле: для любых $v^* \in H^*$, $f^* \in F^*$, $g^* \in G^*$ имеем

$$\lim_{|\delta|,\rho_n \to 0} \sup_{u \in \widetilde{D}_n} \inf_{\widehat{u} \in \widehat{D}^*} \Big\{ \big|v^*(u - \widehat{u})\big| + \big|f^*(Au - A\widehat{u})\big| + \big|g^*(Lu - L\widehat{u})\big| \Big\} = 0.$$

Заметим, что в (5) значения $A\widehat{u}$ и $L\widehat{u}$ определены *однозначно* даже в нелинейном случае, если пространства F и G удовлетворяют так называемому E-свойству [22].

Теоремы сходимости 3, 6, 9 остаются справедливыми и тогда, когда $\varphi(u)$ и $g(u)$ не имеют вида (5), а пространство H считается полным метрическим пространством. Под “слабой” сходимостью тогда можно понимать сходимость в любой топологии, которая не сильнее топологии, определяемой метрикой пространства.

Заметим, что условия I, II, III выполняются и при основных предположениях работ [30 − 32]. При этом слабая топология и топология исходного пространства отождествляются. Отметим также работы [33 − 37].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барбашин Е.А.* К теории обобщенных динамических систем // Ученые записки МГУ. Математика. 1949. **2**, вып. 135. 110–134.
2. *Тихонов А.Н.* О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Докл. АН СССР. 1965. **163**, № 3. 591–594.
3. *Морозов В.А.* О псевдорешениях // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1969. **9**, № 6. 1387–1391.
4. *Морозов В.А.* О регуляризации некоторых классов экстремальных задач // Вычислит. методы и программирование. Вып. XII. М.: Изд-во МГУ, 1969. 24–37.
5. *Бакушинский А.Б.* Регуляризующие алгоритмы для решения некорректных экстремальных задач // Методы управления большими системами. **1**. Иркутск, 1970. 223–235.
6. *Морозов В.А.* Методы решения неустойчивых задач. М.: ВЦ МГУ, 1967.
7. *Морозов В.А.* О решении методом регуляризации некорректно поставленных задач с нелинейными неограниченными операторами // Дифф. уравнения. 1970. **YI**, № 8. 1453–1458.
8. *Поляк Б.Т.* Теоремы существования и сходимости минимизирующих последовательностей для задачи на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН. СССР. 1966. **166**, № 2. 287–290.
9. *Морозов В.А.* Об одном устойчивом методе вычисления значений неограниченных операторов // Докл. АН СССР. 1969. **185**, № 2. 267–270.
10. *Морозов В.А., Кирсанова Н.Н.* Об одном обобщении метода регуляризации // Вычислит. методы и программирование. Вып. XIY. М.: Изд-во МГУ, 1970. 17–23.
11. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. **160**, № 6. 1089–1094.
12. *Васин В.В.* Некорректные задачи в B-пространствах и их приближенное решение вариационными методами // Автореферат кандидатской диссертации. Свердловск, 1970.
13. *Морозов В.А.* Об устойчивости задачи определения параметров // Вычислительные методы и программирование. Вып. XIY. М.: Изд-во МГУ, 1970. 63–66.

14. *Турчин В.Ф.* Решение уравнения Фредгольма I-го рода в статистическом ансамбле гладких функций // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1967. **7**, № 6. 931–937.
15. *Турчин В.Ф., Нозик В.З.* Статистическая регуляризация решения некорректных задач // Физика атмосферы и океана. 1969. **Y**, № 1. 29–37.
16. *Канторович Л.В.* О новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. матем. журнал. 1962. **III**, № 5. 701–709.
17. *Phillips D.* A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind // J. Assoc. Comput. Machinery. 1962. **9**, N 1. 84–97.
18. *Морозов В.А.* О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации // Докл. АН СССР. 1967. **175**, № 6. 1225–1228.
19. *Иванов В.К.* О приближенном решении операторных уравнений первого рода // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1966. **6**, № 6. 1089–1093.
20. *Морозов В.А.* О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1968. **8**, № 2. 295–309.
21. *Морозов В.А.* Об оценках погрешности решения некорректно поставленных задач с линейными неограниченными операторами // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1970. **10**, № 5. 1081–1091.
22. *Иванов В.К.* Линейные неустойчивые задачи с многозначными операторами // Сиб. матем. журнал. 1970. **XI**, № 5. 1009–1016.
23. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Матем. сб. 1963. **61**, вып. 2. 211–223.
24. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1961. **140**, № 3. 522–524.
25. *Singer J.* Some remarks on approximative compactness // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1964. **9**, N 2. 167–177.
26. *Шолохович В.Ф.* Неустойчивые экстремальные задачи и геометрические свойства единичной сферы в пространстве Банаха // Изв. ВУЗов. Математика. 1970 (аннотация статьи).
27. *Морозов В.А.* О восстановлении функций методом регуляризации // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1967. **7**, № 4. 874–881.
28. *Тихонов А.Н.* О методах регуляризации задач оптимального управления // Докл. АН СССР. 1965. **162**, № 4. 763–765.
29. *Морозов В.А.* О псевдорешениях // Ж. вычислит. матем. и матем. физики. 1969. **9**, № 6. 1387–1391.
30. *Тихонов А.Н.* О нелинейных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1965. **161**, № 5. 1023–1026.
31. *Лисковец О.А.* Регуляризация некорректных задач и связь с методом квазирешений // Дифф. уравнения. 1969. **Y**, № 10. 1836–1844.
32. *Лисковец О.А.* Регуляризация уравнений с замкнутым оператором // Дифф. уравнения. 1970. **YI**, № 7. 1273–1278.
33. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
34. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
35. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
36. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
37. *Морозов В.А., Гребенников А.И.* Методы решения некорректно поставленных задач. Алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1993.
38. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
39. *Морозов В.А.* Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: Изд-во МГУ, 1987.

Поступила в редакцию
19.11.2003