

УДК 519.213, 519.62

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Захаров<sup>1</sup>

В работе описывается построение нового численного метода решения обратного стохастического дифференциального уравнения (ОСДУ). Доказательство сходимости метода основывается на использовании доказанной автором теоремы устойчивости решения ОСДУ. Работа выполнена при поддержке Франко–Русского Центра по прикладной математике и информатике им. А. М. Ляпунова (проект № 02–01).

**1. Введение.** В работе [8] исследуется вопрос устойчивости обратного стохастического дифференциального уравнения (далее ОСДУ)

$$dY_t = f(Y_t, Z_t) dt + Z_t dW_t, \quad Y_T = \xi. \quad (1)$$

В данной работе результаты из [8] применены для разработки нового численного метода решения ОСДУ и приведены доказательства результатов, содержащихся в [9].

Теория численного решения прямых СДУ исследована достаточно хорошо (см., например, [4]). В настоящее время существует несколько работ, посвященных проблеме приближенного решения ОСДУ [2, 3, 6], однако все предложенные методы не могут быть признаны удовлетворительными из-за низкой скорости сходимости, связанной с тем, что в основе описанных методов лежит аналог схемы Эйлера. В отличие от теории прямых стохастических дифференциальных уравнений, методы решения ОСДУ более высокого порядка точности на сегодняшний день отсутствуют.

В работах [3, 6] предложены численные методы для решения уравнения вида

$$Y_t = \xi - \int_t^T f(s, Y_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad Y_T = \xi,$$

где  $W_t$  — винеровский процесс, а второй интеграл понимается в смысле Ито.

Кратко опишем предлагаемые в этих работах схемы. Рассмотрим дискретизацию времени  $t_j = \frac{j}{n}T$ ,  $j = 0, \dots, n$ , и введем следующие обозначения. Пусть  $M_j$  — процесс случайного блуждания, выходящий из нуля, приращения которого независимы и с вероятностью  $\frac{1}{2}$  принимают значения  $\frac{T}{\sqrt{n}}$  и  $-\frac{T}{\sqrt{n}}$ . Пара случайных переменных  $\bar{Y}_j, \bar{Z}_j$  является аппроксимацией  $Y_{t_j}, Z_{t_j}$  значения решения в момент времени  $t_j$ . Пусть, кроме того,  $\bar{\mathcal{F}}_j$  — фильтрация, порожденная набором случайных величин  $(\Delta M_1, \dots, \Delta M_j)$ .

В этих обозначениях схема, построенная в работе [6], может быть записана в виде

$$\bar{Y}_j = \xi(M) - \frac{T}{n} \sum_{j=i}^{n-1} f(t_j, \bar{Y}_j) - \sum_{j=i}^{n-1} \bar{Z}_j \Delta M_{j+1}.$$

То же самое можно записать и в рекуррентном виде:  $\bar{Y}_j = \mathbf{E} \left\{ \bar{Y}_{j+1} - \frac{T}{n} f(t_j, \bar{Y}_j) \mid \bar{\mathcal{F}}_j \right\}$ .

Нетрудно видеть, что на каждой итерации в каждом узле пространственной сетки приходится решать нелинейное уравнение относительно  $\bar{Y}_i$ . Для этой цели авторами предлагается применять метод сжимающих отображений, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: azakharov@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

$\frac{LT}{n} < 1$ . В качестве приемлемого приближения используется вторая итерация этого метода. Тогда численный метод принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{Y}_n &= \xi(M_{\leq n}); \quad Z_n = 0, \\ X_j &= \mathbf{E}\{\bar{Y}_{j+1} | \bar{\mathcal{F}}_j\}, \\ Y_j &= X_j - \frac{T}{n} f(t_j, X_j), \\ Z_j &= \mathbf{E}\left\{ \left( \bar{Y}_{j+1} - \frac{T}{n} f(t_j, \bar{Y}_j) - \bar{Y}_j \right) (\Delta M_{j+1})^{-1} | \bar{\mathcal{F}}_j \right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Слабая сходимость в топологии Скорохода [11] случайных процессов с кусочно-постоянными траекториями, порожденных аппроксимацией  $\left( \bar{Y}_j, \sum_{i=1}^j \bar{Z}_i \Delta M_{i+1} \right)$ , к решению  $(Y, Z)$  ОСДУ показана в предположениях липшицевости функции  $f(\cdot, \cdot)$  и липшицевости терминального условия  $\xi$  в том смысле, что почти всюду выполнено равенство  $|\xi(\omega) - \xi(\omega')| \leq \kappa \sup_{t \in [0, T]} |\omega(t) - \omega'(t)|$ , где  $\omega$  — траектория винеровского процесса,  $\kappa$  — константа.

Заметим, что численный метод допускает терминальное условие  $\xi$ , зависящее существенным образом от всей траектории винеровского процесса  $W_t$ , а не только от  $W_T$ . Однако в этом случае необходимо в каждый момент времени вычислять  $\bar{Y}_j$  в  $2^j$  точках (для каждой траектории случайного процесса  $M$  до момента времени  $j$ ) даже в одномерном случае, что делает алгоритм практически нереализуемым из-за вычислительной сложности. Но если применять алгоритм для решения ОСДУ с терминальным условием  $\xi = \eta(W_T)$ , то можно вычислять аппроксимацию решения  $\bar{Y}_j$  только для всех значений  $M_j$ , а не для всех его траекторий  $M_{\leq j}$ , что делает алгоритм значительно менее трудоемким.

В [3] условие  $\xi = \eta(W_T)$  предполагается выполненным изначально. В этой работе показано, что для полученной после проведения дискретизации времени аппроксимации

$$\hat{Y}_n = \eta(W_n), \quad \hat{Y}_j = \mathbf{E}[\hat{Y}_{j+1} - hf(t_{j+1}, \hat{Y}_{j+1}) | \mathcal{F}_j] \tag{3}$$

при некоторых технических предположениях имеют место оценки  $|\hat{Y}_0 - Y_0| \leq \frac{KT}{n}$ , где  $K$  — некоторая константа.

Чтобы избежать роста количества состояний  $W_{t_j}$  при увеличении  $j$  (и, соответственно, уменьшить вычислительную сложность алгоритма), в отличие от [6] автором предлагается использовать в качестве пространственной сетки случайную выборку. Однако такое сокращение вычислительной сложности ведет и к невысокой скорости сходимости алгоритма: для пространственной сетки из  $N$  элементов погрешность метода ведет себя как

$$\|\bar{Y}_0 - Y_0\| \leq C \left( \frac{T}{n} + \frac{n}{N} \right).$$

Заметим, что  $\bar{Y}_0$  — случайная величина, поскольку метод использует в качестве пространственной дискретизации случайную выборку некоторого распределения. Таким образом, чтобы увеличить точность в  $k$  раз, необходимо увеличить количество узлов временной сетки в  $k$  раз и количество точек множества в  $k^2$  раз, т.е. совершить в  $k^3$  раз больше вычислительной работы. Такую скорость сходимости, конечно, нельзя признать удовлетворительной, и введение в качестве сетки случайной выборки вряд ли дает выигрыш с вычислительной точки зрения по сравнению с численным методом, разработанным в [3].

Однако оба рассмотренных метода разработаны только для функции  $f(\cdot)$ , не зависящей от процесса  $Z$ . Случаю, когда  $f(\cdot)$  зависит от процесса  $Z$ , посвящена работа [2]. Здесь аппроксимация уравнения в дискретном времени записывается в виде

$$\bar{Y}_j = \bar{Y}_{j+1} - \frac{T}{n} f(\bar{Y}_j, \bar{Z}_j) - \bar{Z}_j \Delta M_{j+1},$$

где  $M$  — процесс случайного блуждания, умноженный на  $\sqrt{\frac{T}{n}}$ .

В каждый момент времени сначала вычисляется значение аппроксимации процесса  $Z$ :

$$\bar{Z}_j = \left( \frac{T}{n} \right)^{-1} \mathbf{E}(\bar{Y}_{j+1} \Delta M_{j+1}).$$

Аппроксимацию  $\bar{Y}_j$  для  $j = n-1, n-2, \dots, 1, 0$  можно найти, например, тем же способом, как это делалось в [6].

Для этого метода показана сходимость аппроксимации к решению в следующем смысле:

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \sup_t |\bar{Y}_t - Y_t|^2 + \int_0^T |\bar{Z}_t - Z_t|^2 dt \right| \leq \epsilon \right\} \rightarrow 1 \quad \text{для всех } \epsilon > 0./$$

В [7] проблема численного решения несколько более общего класса прямых-обратных СДУ сводится к задаче решения нелинейного параболического уравнения.

В данной работе автором предлагается метод приближенного решения ОСДУ, основанный на введенном автором понятии стохастической невязки. Перейдем к его изложению.

## 2. Метод численного решения однородного ОСДУ.

**2.1. Построение аппроксимации решения.** Рассмотрим однородное ОСДУ, т.е. случай, когда в уравнении (1) функция  $f(y, z) \equiv 0$ :

$$dY_t = Z_t dW_t, \quad Y_T = \eta(W_T). \quad (4)$$

Построим аппроксимацию решения уравнения (4) и исследуем ее свойства.

Для некоторого натурального  $N$  рассмотрим сетку  $d_0 < d_1 < \dots < d_{N-1} < d_N$ . Предположим, что функция  $\eta(x)$  на отрезке  $[d_0, d_N]$  представима в виде четырежды непрерывно дифференцируемого сплайна пятого порядка с узлами  $d_0, \dots, d_N$ , т.е. для всех  $x \in [d_k, d_{k+1}]$  верно

$$\eta(x) = a_0^k + b_0^k(x - d_i) + c_0^k(x - d_i)^2 + d_0^k(x - d_i)^3 + e_0^k(x - d_i)^4 + g_0^k(x - d_i)^5. \quad (5)$$

Если это не так, то при условиях достаточной гладкости  $\eta(x)$  ее можно аппроксимировать сплайном пятого порядка без потери точности метода.

Рассмотрим на множестве  $[d_0, d_T] \times [0, T]$  следующую функцию двух переменных:

$$w(t, x) = \eta(x) + \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} \frac{T-t}{2} + \frac{\partial^4 \eta(x)}{\partial x^4} \frac{(T-t)^2}{8}. \quad (6)$$

Она может быть интерпретирована как разложение Тейлора по времени точного решения (1) в функциональном пространстве. Очевидно, функция  $w(t, x)$  представима на каждом интервале  $x \in [d_k, d_{k+1}]$  в виде

$$w(t, x) = \sum_{i=0}^2 (a_i^k + b_i^k(x - d_i) + c_i^k(x - d_i)^2 + d_i^k(x - d_i)^3 + e_i^k(x - d_i)^4 + g_i^k(x - d_i)^5)(T-t)^i, \quad (7)$$

где коэффициенты  $a_0^k, \dots, g_0^k$  те же самые, что и в (5), а остальные коэффициенты определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1^k &= c_0^k, & b_1^k &= 3d_0^k, & c_1^k &= 6e_0^k, & d_1^k &= 10g_0^k, & e_1^k &= g_1^k = 0, \\ a_2^k &= 3e_0^k, & b_2^k &= 15g_0^k, & c_2^k &= d_2^k = e_2^k = g_2^k = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для успешного построения численного метода необходимо, чтобы алгоритм позволял сделать несколько итераций по времени. В данном случае функция  $w(t, x)$  хоть и представима в кусочно-полиномиальном виде (5), не обязательно будет всюду четырежды непрерывно дифференцируемой по переменной  $x$  при  $t = 0$ , что препятствует проведению последующей итерации аналогичным образом. Таким образом, для построения аппроксимации решения необходимо модифицировать функцию  $w(t, x)$  так, чтобы она стала четырежды непрерывно дифференцируемой при  $t = 0$  по переменной  $x$ , но при этом оставалась бы сплайном пятого порядка с теми же узлами. Кроме того, модификация должна в некотором смысле быть минимальной, поскольку это позволяет построить высокоэффективный метод.

Обозначим через  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , скачки пятой производной терминального условия  $\eta(x)$  в узлах  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ :

$$r_i = \frac{\partial^5 \eta(x+0)}{\partial x^5} - \frac{\partial^5 \eta(x-0)}{\partial x^5}.$$

Тогда из (6) вытекает, что у функции  $w(t, x)$  при дифференцировании по переменной  $x$  появляются разрывы производных следующих порядков:

— скачок  $p_i$  третьей производной функции  $w(0, x)$  в точке  $d_i$ :

$$p_i = \frac{r_i T}{2}, \quad i = 1, \dots, N - 1; \tag{9}$$

— скачок  $q_i$  первой производной функции  $w(0, x)$  в точке  $d_i$ :

$$q_i = \frac{r_i T^2}{8}, \quad i = 1, \dots, N - 1. \tag{10}$$

Очевидно, что нулевая, вторая и четвертая производные функции  $w(t, x)$  по переменной  $x$  всюду непрерывны. Из (9), (10) нетрудно видеть, что для скачков третьей и пятой производной выполнено соотношение

$$q_i = \frac{T p_i}{4}. \tag{11}$$

Пусть  $d_1 - d_0 = d_2 - d_1 = \dots = d_N - d_{N-1} = \Delta$ . Введем обозначение

$$k = \frac{1.5T}{\Delta^2}. \tag{12}$$

Рассмотрим определенную на отрезке  $[0, 2\Delta]$  функцию

$$g(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5, & \text{для } x \in [0, \Delta], \\ \alpha(2\Delta - x) + \beta(2\Delta - x)^3 + \gamma(2\Delta - x)^5, & \text{для } x \in [\Delta, 2\Delta], \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\alpha = \Delta^2 k \frac{5 - 10k}{6}, \quad \beta = \frac{5 - 10k}{6}, \quad \gamma = -\frac{1}{2\Delta^2}. \tag{14}$$

Определим набор функций  $g_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, N - 2$ , с помощью которых будет построена аппроксимация решения уравнения (4):

$$g_i(x) = \begin{cases} g(x - i\Delta), & \text{для } x \in [i\Delta, (i + 2)\Delta], \\ 0, & \text{для } x \notin [i\Delta, (i + 2)\Delta]. \end{cases}$$

Тогда каждая непрерывная функция  $g_i(x)$  имеет следующие скачки производных порядка, не выше четвертого:

- в точке  $d_i$  — скачки первой производной  $s_1^l = \Delta^2 k \frac{5 - 10k}{6}$  и третьей производной  $s_3^l = 5 - 10k$ ;
- в точке  $d_{i+1}$  — скачки первой производной  $s_1^c = \Delta^2 k \frac{50 + 20k}{6}$  и третьей производной  $s_3^c = 50 + 20k$ ;
- в точке  $d_{i+2}$  — скачки первой производной  $s_1^r = \Delta^2 k \frac{5 - 10k}{6}$  и третьей производной  $s_3^r = 5 - 10k$ .

Выбором коэффициентов (14) мы добились того, что соотношение (11) между скачками первой и третьей производной по переменной  $x$  функции  $w(0, x)$  выполнено и для всех функций  $g_i(x)$  во всех узлах сетки  $d_0, \dots, d_N$ .

Аппроксимацию  $v(x)$  решения уравнения (4) в момент времени  $t = 0$  будем строить в виде

$$v(x) = w(0, x) + \sum_{i=0}^{N-2} \gamma_i g_i(x). \tag{15}$$

Очевидно, что при любом выборе коэффициентов  $\gamma_i$  выражение, стоящее в правой части равенства, будет непрерывным по переменной  $x$ , а вторая и четвертая его производные также будут непрерывны. Более того, если выбрать коэффициенты  $\gamma_i$  так, что третья производная этого выражения будет всюду непрерывна на  $[d_0, d_N]$ , то то же можно будет гарантировать и для его первой производной.

Рассмотрим матрицу  $A$ , у которой элемент  $A(i, j)$ ,  $i, j = 1, \dots, N - 1$ , соответствует скачку третьей производной функции  $g_{i-1}(x)$  в точке  $d_j$ . Используя (14), получим

$$A = \begin{bmatrix} 50 + 20k & 5 - 10k & 0 & \dots & 0 \\ 5 - 10k & 50 + 20k & 5 - 10k & \dots & 0 \\ 0 & 5 - 10k & 50 + 20k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 5 - 10k & 50 + 20k \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Трехдиагональная матрица  $A$  обладает свойством диагонального доминирования; следовательно, она обратима и положительно определена.

Чтобы гарантировать четырежды непрерывную дифференцируемость аппроксимации  $v(x)$  в узлах  $d_1, \dots, d_{N-1}$ , коэффициенты  $\gamma_i$  в (15) определим из следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N-1} A(i, j) \gamma_{i-1} = -p_j \quad \text{для } j = 1, \dots, N-1. \quad (17)$$

Таким образом, аппроксимация  $v(x)$ , определенная равенствами (15), (17), является четырежды непрерывно дифференцируемой на всем интервале  $(d_0, d_N)$  функцией.

Отметим, что порядок аппроксимации метода определяется порядком малости слагаемого  $\sum_{i=0}^{N-2} \gamma_i g_i(x)$  в формуле (15). Поскольку для любого  $x$  найдется не более двух функций  $g_i(x) \neq 0$ , то можно записать оценку

$$\left| \sum_{i=0}^{N-2} \gamma_i g_i(x) \right| \leq 2 \max_x |g(x)| \max |\gamma_i|.$$

Исследование скорости сходимости метода зависит от поведения коэффициента  $k$ , определенного в (12), при измельчении пространственной и временной сеток.

Допустим, что коэффициент  $k$  остается ограниченным при  $T, \Delta \rightarrow 0$ . Поскольку при измельчении шага пространственной сетки вектор разрывов пятой производной ведет себя таким образом, что  $\max_i |r_i| = O(\Delta)$ , то верна асимптотика  $\max |\gamma_i| = O(T\Delta)$ ,  $\max_x |g(x)| = O(\Delta^3)$ . Значит, при выполнении одной итерации по времени погрешность численного метода имеет порядок малости  $T\Delta^4$ .

Для случая, когда отношение  $\frac{T}{\Delta}$  остается ограниченным, имеем

$$\max |\gamma_i| = O(T\Delta), \quad \max_x |g(x)| = O(\Delta).$$

Таким образом, при совершении одной итерации по времени погрешность численного метода имеет порядок малости  $T\Delta^2$ .

**2.2. Доказательство устойчивости численного метода.** Для изучения вопроса устойчивости необходимо исследовать поведение вектора  $r$  разрывов пятой производной аппроксимации при переходе от  $\eta(x)$  к  $v(x)$ . В самом деле, добавка  $\sum_{i=0}^{N-2} \gamma_i g_i(x)$ , являющаяся погрешностью численного метода, растет пропорционально вектору  $r$  разрывов пятой производной; поэтому если  $\|r\|$  не увеличивается при совершении одной итерации по времени, то метод является устойчивым.

Рассмотрим матрицу  $B$ , у которой элемент  $B(i, j)$ ,  $i, j = 1, \dots, N-1$ , соответствует скачку пятой производной функции  $g_{i-1}(x)$  в точке  $d_j$ :

$$B = \begin{bmatrix} 120/\Delta^2 & -120/(2\Delta^2) & 0 & \dots & 0 \\ -120/(2\Delta^2) & 120/\Delta^2 & -120/(2\Delta^2) & \dots & 0 \\ 0 & -120/(2\Delta^2) & 120/\Delta^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -120/(2\Delta^2) & 120/\Delta^2 \end{bmatrix}.$$

Эта трехдиагональная матрица тоже удовлетворяет условию диагонального преобладания.

При переходе от  $\eta(x)$  к функции  $v(x)$  вектор  $r$  скачков пятой производной в узлах  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , трансформируется с учетом (9), (15), (17) следующим образом:  $\bar{r} = r - \frac{T}{2} BA^{-1}r$ . Рассмотрим матрицу  $C = \frac{TBA^{-1}}{2}$ . Поскольку матрица  $A$  положительно определена, а матрица  $B$  неотрицательно определена, то матрица  $C$  также будет неотрицательно определена. Для завершения доказательства необходимо показать, что норма матрицы  $C$  не превосходит 2.

Представим матрицу  $A$  в виде суммы положительно определенной матрицы  $A_1$ , состоящей из всех слагаемых элементов  $A$ , содержащих множитель  $k$ , и матрицы  $A_2$ , слагаемые которой не содержат множителя  $k$ . Тогда

$$\left\| \frac{TBA^{-1}}{2} \right\| = \left\| \frac{T((A_1 + A_2)B^{-1})^{-1}}{2} \right\| < \left\| \frac{T(A_1B^{-1})^{-1}}{2} \right\| = 2,$$

что доказывает устойчивость численного метода.

**2.3. Граничные условия.** При выполнении нескольких итераций по времени, описанных формулами (6), (15), (17), для достижения высокой скорости сходимости численного метода необходимо аппроксимировать краевые условия с достаточно высокой степенью точности. Для этой цели мы будем использовать сплайны второго порядка. Таким образом, будем считать, что для промежутка времени, соответствующего одной итерации численного метода по времени, краевое условие представимо в виде

$$l(t) = \eta(d_0) + \alpha_1(T - t) + \alpha_2(T - t)^2, \quad r(t) = \eta(d_N) + \beta_1(T - t) + \beta_2(T - t)^2, \quad (18)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — соответствующие коэффициенты сплайнов, аппроксимирующих левое и правое краевые условия.

Функция  $w(t, x)$ , определенная в (6), удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} w(t, d_0) &= \eta(d_0) + \left. \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} \right|_{x=d_0} \frac{T-t}{2} + \left. \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} \right|_{x=d_0} \frac{(T-t)^2}{8}, \\ w(t, d_N) &= \eta(d_N) + \left. \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} \right|_{x=d_N} \frac{T-t}{2} + \left. \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} \right|_{x=d_N} \frac{(T-t)^2}{8}. \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемое  $\sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i g_i(x)$  на граничные условия не влияет, поскольку  $g_i(d_0) = g_i(d_N) = 0$  для всех  $i$ .

Введем функции  $f_1^l(x), f_2^l(x)$ , с помощью которых будем строить решение с требуемыми граничными условиями, обладающие следующими свойствами:

- корректирующие функции являются сплайнами пятого порядка;
- функция  $f_1^l(x)$  является аппроксимацией решения в начальный момент времени  $u(0, x)$  задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} &= 0, \\ u(T, x) &\equiv 0, \quad x \in [0, a], \\ u(t, a) &\equiv 0, \quad t \in [0, T], \\ u(t, 0) &= T - t, \end{aligned} \quad (19)$$

а функция  $f_2^l(x)$  является аппроксимацией решения в начальный момент времени задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} &= 0, \\ u(T, x) &\equiv 0, \quad x \in [0, a], \\ u(t, a) &\equiv 0, \quad t \in [0, T], \\ u(t, 0) &= (T - t)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично определим функции  $f_1^r(x), f_2^r(x)$ , предназначенные для коррекции правого граничного условия.

Для того чтобы учесть краевые условия (18), предлагается добавить к аппроксимации  $v(x)$  при  $t = 0$  решения уравнения (4) слагаемые

$$\begin{aligned} v^g(x) = v(x) &+ \left( \alpha_1 + \left. \frac{\partial w(t, d_0)}{\partial t} \right|_{t=T} \right) f_1^l(x) + \left( \alpha_2 - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 w(t, d_0)}{\partial t^2} \right|_{t=T} \right) f_2^l(x) + \\ &+ \left( \beta_1 + \left. \frac{\partial w(t, d_N)}{\partial t} \right|_{t=T} \right) f_1^r(x) + \left( \beta_2 - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 w(t, d_N)}{\partial t^2} \right|_{t=T} \right) f_2^r(x) \end{aligned} \quad (21)$$

и использовать функцию  $v^g(x)$  как терминальное условие для проведения последующей итерации.

**3. Построение численного метода в общем случае.**

**3.1. Теорема устойчивости ОСДУ.** Рассмотрим снова ОСДУ в общем виде (1) и функцию  $v(t, x)$ , определенную на области  $[0, T] \times (-\infty, \infty)$ . Под *приближением решения ОСДУ* будем понимать пару случайных процессов  $V, G$ , определенных соотношениями

$$V_t = v(t, W_t), \quad G_t = \left. \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right|_{x=W_t}. \quad (22)$$

Соответствующей этому приближению *стохастической невязкой*  $\psi$  будем называть случайный процесс

$$\psi_t = v(T, W_T) - v(t, W_t) - \int_t^T f(v(t, W_t), G_t) dt - \int_t^T G_t dW_t.$$

Нетрудно показать, что процесс  $\psi$  единственным образом разложим в виде

$$\psi_t = g(t, W_t) + \int_t^T M(t, W_t) dW_t, \quad g(T, x) = 0 \quad \forall x. \quad (23)$$

Пользуясь единственностью разложения (23), определим понятие нормы для процесса стохастической невязки следующим образом:

$$\|\psi\| = \max\left(\max_{t,x} |g(t, x)|, \max_{t,x} |M(t, x)|\right).$$

Ключевым фактом, позволяющим сконструировать численный метод и обосновать его сходимость, является

**Теорема [8].** *Рассмотрим обратное стохастическое уравнение (1) на области  $[-\infty, \infty] \times [0, T]$ , для которого выполнены условия теоремы существования и единственности решения ОДУ и его решение  $Y, Z$  представимо в виде*

$$Y_t = u(t, W_t), \quad Z_t = \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=W_t}.$$

Допустим, выполнены следующие условия:

- 1) процесс стохастической невязки, соответствующий некоторому приближению решения (1), задаваемому функцией  $v(t, x)$ , удовлетворяет ограничению  $\|\psi\| < C_1$ ;
- 2) для приближения выполнены следующие оценки в конечный момент времени  $T$ :

$$|v(T, x) - u(T, x)| \leq C_2 \quad \forall x, \quad \left| \frac{\partial v(T, x)}{\partial x} - \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} \right| \leq C_3 \quad \forall x;$$

- 3) функция  $f(y, z)$  дважды непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов; вторые частные и смешанная производные по аргументам  $y, z$  ограничены по модулю константой  $K$ , а первые частные производные ограничены константой  $L$ ;
- 4) приближение всюду удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right| \leq C_4, \quad \left| \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \right| \leq C_4, \quad \left| \frac{\partial^2 (v(t, x) - u(t, x))}{\partial x^2} \right| \leq C_4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |u(t, x) - v(t, x)| &\leq C_2 + C_1(2E - 1) + \left[ \left( 2L \left( \sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right)^2 E + L \right] (C_2 + C_3)(T - t), \\ \left| \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right| &\leq C_3 + C_1(2E - 1) + \left[ 3KC_3(3C_4 + C_3) + \frac{2L^2}{\sqrt{\pi}} C_3 + \right. \\ &\quad \left. + LC_3 + 2C_2KC_4 + \left( 2L \left( \sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right)^2 E(C_2 + C_3) \right] (T - t), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{где } E = \exp \left[ 2L \left( \sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \sqrt{T - t} \right].$$

**3.2. Обоснование численного метода для случая однородного уравнения.** Рассмотрим функцию

$$v(t, x) = \eta + \frac{\partial^2 \eta(T, x)}{\partial x^2} \frac{T - t}{2} + \left( \frac{\partial^4 \eta(T, x)}{\partial x^4} / 8 + \sum_{i=0}^{N-2} \gamma_i g_i(x) \right) (T - t)^2.$$

Оба выражения, стоящие перед  $T - t$  и  $(T - t)^2$ , дважды непрерывно дифференцируемы по  $x$ . Пусть

$$r(x) = \sum_{i=0}^{N-2} \gamma_i g_i(x) = \delta_0^k + \delta_1^k(x - d_k) + \delta_2^k(x - d_k)^2 + \delta_3^k(x - d_k)^3 + \delta_4^k(x - d_k)^4 + \delta_5^k(x - d_k)^5$$

для  $x \in [d_k, d_{k+1}]$ . Таким образом, учитывая (8), функция  $v(t, x)$  при  $x \in [d_k, d_{k+1}]$  имеет вид

$$\begin{aligned} v(t, x) = & a_0^k + b_0^k(x - d_k) + c_0^k(x - d_k)^2 + d_0^k(x - d_k)^3 + e_0^k(x - d_k)^4 + g_0^k(x - d_k)^5 + \\ & + (2c_0^k + 6d_0^k(x - d_k) + 12e_0^k(x - d_k)^2 + 20g_0^k(x - d_k)^3) \frac{T - t}{2} + (3e_0^k + 15g_0^k(x - d_k) + \\ & + \delta_0^k + \delta_1^k(x - d_k) + \delta_2^k(x - d_k)^2 + \delta_3^k(x - d_k)^3 + \delta_4^k(x - d_k)^4 + \delta_5^k(x - d_k)^5)(T - t)^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим приближение решения ОСДУ, порожденное функцией  $v(t, x)$  по формулам (22). Для уравнения (4) процесс стохастической невязки примет вид

$$\psi_t = v(T, W_T) - v(t, W_t) - \int_t^T v_x(\tau, x) dW_\tau. \quad (26)$$

Из формулы Ито следуют равенства

$$\begin{aligned} b_0^k W_T &= b_0^k W_t + \int_t^T b_0^k dW_\tau, \quad c_0^k W_T^2 = c_0^k W_t^2 + \int_t^T 2c_0^k W_\tau dW_\tau + c_0^k(T - t), \\ d_0^k W_T^3 &= d_0^k W_t^3 + \int_t^T 3d_0^k W_\tau^2 dW_\tau + 3d_0^k W_t(T - t) + \int_t^T 3d_0^k(T - t) dW_\tau, \\ e_0^k W_T^4 &= e_0^k W_t^4 + \int_t^T 4e_0^k W_\tau^3 dW_\tau + 6e_0^k W_t^2(T - t) + \int_t^T 6e_0^k W_\tau(T - t) dW_\tau + 3e_0^k(T - t)^2, \\ g_0^k W_T^5 &= g_0^k W_t^5 + \int_t^T 5g_0^k W_\tau^4 dW_\tau + 10g_0^k W_t^3(T - t) + \int_t^T 10g_0^k W_\tau^2(T - t) dW_\tau + \\ &+ 15g_0^k W_t(T - t)^2 + \int_t^T 15g_0^k(T - t)^2 dW_\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (25) в (26) и раскрывая ненулевые члены в  $v(T, W_T)$  с помощью (27), стохастическую невязку  $\psi$ , соответствующую аппроксимации  $V_t, G_t$ , можно представить в виде

$$\psi_t = h(t, W_t) + \int_t^T M(\tau, W_\tau) d\tau.$$

Пусть  $\bar{x} = x - d_k$ ; тогда для  $d_k \leq x \leq d_{k+1}$  верно

$$\begin{aligned} h(t, \bar{x}) = & a_0^k + b_0^k \bar{x} + c_0^k(\bar{x}^2 + (T - t)) + d_0^k(\bar{x}^3 + 3\bar{x}(T - t)) + e_0^k(\bar{x}^4 + 6\bar{x}^2(T - t) + 3(T - t)^2) + \\ & + g_0^k(\bar{x}^5 + 10\bar{x}^3(T - t) + 15\bar{x}(T - t)^2) - v(t, \bar{x}) = -r(x)(T - t)^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} M(t, x) = & b_0^k + c_0^k 2\bar{x} + d_0^k 3(\bar{x}^2 + (T - t)) + e_0^k(4\bar{x}^3 + 6\bar{x}(T - t)) + \\ & + g_0^k(5\bar{x}^4 + 10\bar{x}^2(T - t) + 15(T - t)^2) - \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial r(x)}{\partial x}(T - t)^2. \end{aligned}$$

При применении теоремы 1 необходимо учитывать, что для однородного уравнения можно положить  $K = L = 0$ , и, следовательно,  $E = 1$ . Предположим, что сетки по пространству и времени измельчаются таким образом, что  $T = \Delta^2$ . Функции  $h(t, x)$  и  $M(t, x)$  можно оценить следующим образом:

$$|h(t, x)| = O(\Delta^3 T^2), \quad |M(t, x)| = O(\Delta^2 T^2).$$



Оценки (24) принимают вид

$$|v(0, x) - u(0, x)| < |v(T, x) - u(T, x)| + O(\Delta^2 T^2), \quad \left| \frac{\partial v(0, x)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} \right| < \left| \frac{\partial v(T, x)}{\partial x} - \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} \right| + O(\Delta^2 T^2).$$

Поскольку количество итераций по времени должно быть пропорционально  $1/T$ , то погрешность метода имеет порядок  $\Delta^2 T = \Delta^4$ .

**3.3. Конструкция алгоритма в случае неоднородного уравнения и обоснование его сходимости.** Пусть  $v(t, x)$  и  $\psi$  — аппроксимация решения уравнения (4) и соответствующий процесс стохастической невязки. На основе  $v(t, x)$  будет построена аппроксимация  $\bar{v}(t, x)$  решения уравнения (1) и установлена сходимость метода.

Пусть  $\hat{f}(x) = f\left(\eta(x), \frac{\partial \eta(x)}{\partial x}\right)$  и

$$f_Y(y, z) = \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}, \quad f_Z(y, z) = \frac{\partial f(y, z)}{\partial z}, \quad \bar{v}_t(T, x) = \frac{\partial \bar{v}(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=T}, \quad \bar{G}_t(T, x) = \frac{\partial \bar{G}(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=T}.$$

Обозначим

$$h^1(x) = \hat{f}(x),$$

$$h^2(x) = \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial x^2} + f_Y\left(\eta(x), \frac{\partial \eta(x)}{\partial x}\right) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} + \hat{f}(x) \right) + f_Z\left(\eta(x), \frac{\partial \eta(x)}{\partial x}\right) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \eta(x)}{\partial x^3} + \frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial x} \right) \right]. \quad (28)$$

Приближение решения нелинейного уравнения положим следующим:

$$\bar{v}(t, x) = v(t, x) + h^1(x)(T-t) + h^2(x)(T-t)^2, \quad \bar{G}(t, x) = \frac{\partial \bar{v}(t, x)}{\partial x}.$$

Выражение  $f(\bar{v}(t, W_t), \bar{G}(t, W_t))$  может быть представлено в форме

$$f(\bar{v}(t, W_t), \bar{G}(t, W_t)) = \hat{f}(W_t) + f_Y(\bar{v}(T, W_t), \bar{G}(T, W_t)) \bar{v}_t(T, W_t)(t-T) + f_Z(\bar{v}(T, W_t), \bar{G}(T, W_t)) \bar{G}_t(T, W_t)(t-T) + O((t-T)^2).$$

Таким образом, стохастическая невязка  $\bar{\psi}$  неоднородного ОСДУ, соответствующая приближению решения  $\bar{v}, \bar{G}$ , преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_t = & \psi_t - h^1(W_t)(T-t) - h^2(W_t) \frac{(T-t)^2}{2} - \int_t^T \left[ \hat{f}(W_\tau) + f_Y(\bar{v}(T, W_\tau), \bar{G}(T, W_\tau)) \bar{v}_t(T, W_\tau)(\tau-T) + \right. \\ & \left. + f_Z(\bar{v}(T, W_\tau), \bar{G}(T, W_\tau)) \bar{G}_t(T, W_\tau)(\tau-T) + O((\tau-T)^2) \right] d\tau - \\ & - \int_t^T \left[ \frac{\partial h^1(x)}{\partial x} \Big|_{x=W_t} (T-t) + \frac{\partial h^2(x)}{\partial x} \Big|_{x=W_t} \frac{(T-t)^2}{2} \right] dW_\tau, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\psi$  — стохастическая невязка однородного уравнения, соответствующая аппроксимации  $v(t, x)$ .

Преобразование интеграла  $\int_t^T \hat{f}(W_\tau) d\tau$ . Представим этот интеграл в виде

$$\int_t^T \hat{f}(W_\tau) d\tau = h^f(t, W_t) + \int_t^T M^f(\tau W_\tau) dW_\tau, \quad (30)$$

где

$$h^f(t, x) = \int_t^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2(\tau-t)}\right) \hat{f}(y) dy \right] d\tau, \quad M^f(t, x) = h_x^f(t, x).$$

Отсюда

$$h^f(t, x) = \int_t^T \left[ \widehat{f}(x) + \frac{\partial^2 \widehat{f}(x)}{\partial x^2} \frac{\tau - t}{2} + O((T - t)^2) \right] d\tau,$$

$$M^f(t, x) = \int_t^T \left[ \frac{\partial \widehat{f}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 \widehat{f}(x)}{\partial x^3} \frac{\tau - t}{2} + O((T - t)^2) \right] d\tau.$$

Преобразование интегралов, содержащих производные  $f_Y, f_Z$ . Верно следующее разложение:

$$f_Y(\bar{v}(T, W_\tau), \bar{G}(T, W_\tau))\bar{v}_t(T, W_\tau) =$$

$$= f_Y(\bar{v}(T, W_t), \bar{G}(T, W_t))\bar{v}_t(T, W_t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_Y(\bar{v}(T, x), \bar{G}(T, x))\bar{v}_t(T, x) \right] \Big|_{x=W_t} (W_\tau - W_t) + O(\tau - t).$$

Поскольку  $\int_t^T (W_\tau - W_t) d\tau = \int_t^T (T - \tau) dW_\tau$ , то

$$\int_t^T f_Y(\bar{v}(T, W_\tau), \bar{G}(T, W_\tau))\bar{v}_t(T, W_\tau)(\tau - T) d\tau = f_Y(\bar{v}(T, W_t), \bar{G}(T, W_t))\bar{v}_t(T, W_t) \frac{(T - t)^2}{2} +$$

$$+ \int_t^T \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_Y(\bar{v}(T, x), \bar{G}(T, x))\bar{v}_t(T, x) \right] \Big|_{x=W_t} (T - \tau)^2 dW_\tau + \int_t^T O((T - t)^2) d\tau. \tag{31}$$

Аналогично

$$\int_t^T f_Z(v(T, W_\tau), G(T, W_\tau))G_t(T, W_\tau)(\tau - T) d\tau = f_Z(v(T, W_t), G(T, W_t))G_t(T, W_t) \frac{(t - T)^2}{2} +$$

$$+ \int_t^T \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_Z(v(T, x), G(T, x))G_t(T, x) \right] \Big|_{x=W_t} (\tau - T)^2 dW_\tau + \int_t^T O((T - t)^2) d\tau. \tag{32}$$

Объединяя оценки (28), (29), (30), (31), (32), имеем  $\bar{\psi}_t = \psi_t + \int_t^T O((T - t)^2) d\tau$ . Таким образом,  $\|\psi\| =$

$O(T^{5/2})$ , что в соответствии с теоремой 1 гарантирует нам порядок сходимости  $3/2$  по переменной  $T$  численного метода. Для повышения скорости сходимости в неоднородном случае необходимо использование производных функции  $f$  более высокого порядка, чем первый.

**4. Алгоритм численного решения неоднородного ОСДУ.** Приведем описание одной итерации по времени алгоритма решения неоднородного ОСДУ, заданного на отрезке.

1. Задается равномерная пространственная сетка  $d_0 < d_0 + \Delta < \dots < d_0 + N\Delta$ . Приближение  $v(T, x)$  в терминальный момент времени аппроксимируется сплайном пятого порядка

$$\eta(x) = a_0^k + b_0^k(x - d_i) + c_0^k(x - d_i)^2 + d_0^k(x - d_i)^3 + e_0^k(x - d_i)^4 + g_0^k(x - d_i)^5.$$

Краевые условия аппроксимируются квадратичной функцией:

$$l(t) = \eta(d_0) + \alpha_1(T - t) + \alpha_2(T - t)^2, \quad r(t) = \eta(d_N) + \beta_1(T - t) + \beta_2(T - t)^2.$$

2. Используя формулы (13), (14), вычисляются коэффициенты сплайна  $g(x)$  на интервалах  $[0, \Delta]$  и  $[\Delta, 2\Delta]$ . Строятся корректирующие сплайны  $f_1^l, f_2^l, f_1^r, f_2^r$  как аппроксимации решения задач (19), (20).

3. Вычисляется вектор  $r_i$  разрывов пятой производной сплайна  $\eta(x)$  во всех внутренних узлах сетки.

Коэффициенты  $\gamma_i$  находятся как решение системы уравнений  $\sum_{i=1}^{N-1} A(i, j)\gamma_{i-1} = -r_j \frac{T}{2}$  для  $j = 1, \dots, N - 1$ ,

где трехдиагональная матрица  $A$  определена в (16).

4. Сплайн  $v(x)$  строится по формуле

$$v(x) = \eta(x) + \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} \frac{T-t}{2} + \frac{\partial^4 \eta(x)}{\partial x^4} \frac{(T-t)^2}{8} + \sum_{i=0}^{N-2} \gamma_i g(x - i\Delta).$$

Для учета граничных условий добавляются слагаемые, описанные в формуле (21).

5. На всех узлах пространственной сетки  $d_0, d_0 + \Delta, \dots, d_0 + N\Delta$  вычисляются значения функций

$$h^1(x) = \hat{f}(x),$$

$$h^2(x) = \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial x^2} + f_Y \left( \eta(x), \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} + \hat{f}(x) \right) + f_Z \left( \eta(x), \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \eta(x)}{\partial x^3} + \frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial x} \right) \right]$$

Затем строится сплайн  $k(x)$  пятого порядка, принимающий значения  $h^1(x)T + h^2(x)T^2$  на узлах пространственной сетки  $x = d_0, \dots, d_0 + N\Delta$ . Приближение решения неоднородного уравнения (1) в момент времени 0 полагается равным  $\bar{v}(x) = v^g(x) + k(x)$ .

**5. Приложение к одной задаче управления.** Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему со стохастической компонентой  $dX_t = m(t)U_t dt + dW_t$ , где  $X, U \in \mathbf{R}$  — случайные процессы,  $W_t$  — винеровский процесс и  $m(t)$  — скалярная функция. Рассмотрим проблему минимизации квадратичного функционала

$$H(s, x) = \min_U \mathbf{E} \left( rX_T^2 + \int_s^T g(t)U_t^2 dt | X_s = x \right),$$

где  $g(t)$  — положительная скалярная функция,  $r$  — положительное число. Такая постановка рассматривалась, например, в [4, 12]. Другие задачи управления, допускающие формулировку в терминах ОСДУ, рассматривались в [5, 10].

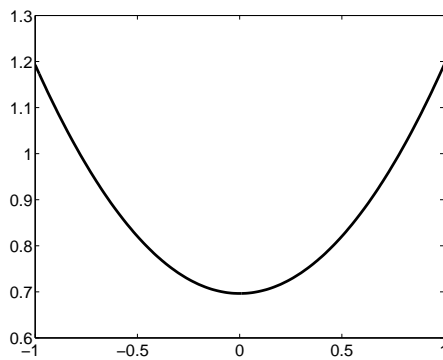


Рис. 1. Приближенное значение функции цены в зависимости от  $W_t$

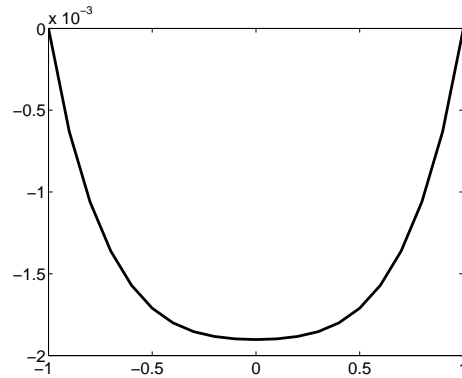


Рис. 2. Погрешность решения в зависимости от  $W_t$

Из [4, 12] известно, что случайный процесс  $Y_t = H(t, W_t)$ , являющийся оптимальным значением функционала, удовлетворяет следующему ОСДУ:

$$dY_t + \min_{u \in \mathbf{R}} (g(t)u^2 + m(t)uZ_t) dt + Z_t dW_t = 0, \quad Y_T = rW_T^2.$$

Связанное с ним параболическое уравнение есть уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \min_{u \in \mathbf{R}^d} \left( g(t)u^2 + m(t)u \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Хорошо известно [12], что функция цены  $H(s, x)$  представима в виде  $H(t, x) = S(t)x^2 + a(t)$ , где функция  $S(t)$  удовлетворяет уравнению  $dS = m(t)^2 g(t)^{-1} S(t)^2$ ,  $S(T) = r$ , и  $a(s) = \int_t^T S(\tau) d\tau$ . Задача, допускающая явное решение, была выбрана для оценки ошибки метода.

Рассмотрим задачу со значениями параметров  $m(t) \equiv 1$ ,  $g(t) \equiv 1$ ,  $T = 1$ ,  $r = 1$ . Полученное приближенное решение и его погрешность для  $t = 0$  при шаге пространственной сетки, равном 0.1 и шаге временной сетки, равном 0.025, приведены рис. 1 и 2.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. Н. Смирнову за постановку задачи и обсуждение результатов и академику РАН А. Б. Куржанскому за внимание к работе и поддержку.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bally V.* Approximation scheme for solution of BSDE, Backward Stochastic Differential Equations // Pitman Res. Notes Math. Ser. 1997. **364**. 177–191.
2. *Briand Ph., Delyon B., Memin J.* Donsker-type theorem for BSDEs // Electronic Communications in Probability. 2001. **6**. 1–14.
3. *Chevance D.* Discretization of Pardoux-Peng's backward stochastic differential equations // Applied Stochastics and Optimisation. Proceedings of ICIAM 95. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1996. **3**, Akademie Verlag. 323–326.
4. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
5. *Kurzhanskiĭ A.B.* On the solution sets for uncertain systems with phase constraints // Stochastic Optimization. Lecture Notes in Control and Information Science. **81**. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
6. *Ma J., Protter P., Martin J., Torres S.* Numerical method for backward stochastic differential equations // Annals of Applied Probability. 2002. **12**, N 1. 302–316.
7. *Ma J., Protter P., Yong J.* Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly — a four-step scheme // Probability Theory and Related Fields. 1994. **98**, N 3. 339–359.
8. *Захаров А.В.* Об устойчивости решения обратного стохастического дифференциального уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 2. 327–335.
9. *Захаров А.В.* Теорема устойчивости решения обратного стохастического дифференциального уравнения // Принято к публикации в журнале Доклады РАН.
10. *Куржанский А.Б.* О вычислении оптимального управления в системе с неполной информацией // Дифференциальные уравнения. 1965. **1**, № 3. 360–373.
11. *Скороход А.В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероят. и ее применен. 1956. **1**, вып. 3. 289–319.
12. *Флеминг У, Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.

Поступила в редакцию  
06.10.2003

---