УДК 519.213

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Захаров[1]

В статье формулируется и доказывается теорема устойчивости решения обратного стохастического дифференциального уравнения (ОСДУ). Этот результат необходим для обоснования сходимости приближенного метода решения ОСДУ. Работа выполнена при поддержке Франко–Русского Центра по прикладной математике и информатике им. А.М. Ляпунова (проект № 02–01).

1. Введение. Теория обратных стохастических дифференциальных уравнений (ОСДУ) представляет собой сравнительно молодую область математики, которая начала развиваться в девяностых годах. ОСДУ в общем случае введены в 1990 г. в [6]. Теория ОСДУ имеет множество различных применений (например, задачи ценообразования и хеджирования опционов [7] и решение задач стохастических дифференциальных игр [3]). Обзор применений теории ОСДУ для решения проблем финансовой математики приведен, в частности, в [4]. Линейные ОСДУ возникают естественным образом при формулировании аналога принципа максимума Понтрягина для задач управления стохастическими дифференциальными уравнениями [11].

Решением ОСДУ, рассматриваемого на отрезке времени $[0,T]$, является пара адаптированных процессов Y, Z, принимающих значения в пространствах R^d и $\mathrm{R}^{n\times d}$ соответственно, и удовлетворяющих уравнению

$$dY_t = f(Y_t, Z_t)\,dt + Z_t\,dW_t, \quad Y_T = \xi, \tag{1}$$

где стохастический дифференциал понимается в смысле Ито. Предполагается, что

1) на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан n-мерный винеровский процесс W_t, порождающий фильтрацию $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$;

2) случайная величина ξ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_T$ и выполнено условие $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$;

3) функция $f:\ \mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^{n\times d} \to \mathrm{R}$ удовлетворяет условиям Липшица по обоим аргументам, т.е.

$$\big|f(y,z) - f(y',z')\big| \leqslant L\big(|y-y'| + |z-z'|\big).$$

В данной работе всюду будут рассматриваться одномерные ОСДУ: $n = d = 1$.

Заметим, что если отбросить терминальное условие в (1) и задать случайный процесс Z_t и начальное условие Y_0, то (1) будет представлять собой обычное (прямое) стохастическое дифференциальное уравнение. Таким образом, для решения ОСДУ необходимо подобрать случайную величину Y_0 и случайный процесс Z_t так, чтобы решение прямого СДУ в момент времени T совпало почти наверное с граничным условием $Y_T = \xi$. Вообще говоря, не очевидно, всегда ли можно так выбрать Y_0, Z_t. Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема [6]. *В указанных выше предположениях решение уравнения* (1) *существует и единственно.*

Укажем также на важную для понимания природы ОСДУ взаимосвязь решения ОСДУ с нелинейными параболическими уравнениями второго порядка. Допустим, что терминальное условие ξ представимо в виде

$$\xi = \eta(W_T), \tag{2}$$

где η — скалярная функция числового аргумента. Тогда решение Y, Z уравнения (1) представимо в виде

$$Y_t = u(t, W_t), \quad Z_t = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=W_t}, \tag{3}$$

где функция $u(t,x)$ является решением следующего нелинейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f\left(u(t,x), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right), \quad u(T,x) = \eta(x).$$

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: azakharov@mail.ru

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что условие (2) выполнено.

В настоящее время опубликованы несколько работ, посвященных проблеме приближенного решения ОСДУ (см. [1, 2, 5]), однако все предложенные методы не могут быть признаны удовлетворительными из-за низкой скорости сходимости, связанной с тем, что в основе описанных методов лежит аналог схемы Эйлера. В отличие от теории прямых стохастических дифференциальных уравнений методы более высокого порядка точности на сегодняшний день отсутствуют.

При разработке численного метода решения ОСДУ более высокого порядка сходимости оказалось необходимым исследовать вопрос устойчивости ОСДУ. Допустим, имеются два близких в некотором смысле терминальных условия $Y_T^1 = \xi^1$ и $Y_T^2 = \xi^2$. Что тогда можно сказать о близости двух соответствующих решений ОСДУ и что конкретно надо потребовать от ξ^1 и ξ^2? Этому вопросу посвящена данная работа.

Описание численного алгоритма решения ОСДУ, предлагаемого автором и опирающегося на приводимый в данной работе результат, опубликовано в [8].

2. Теорема устойчивости решения ОСДУ. Рассмотрим непрерывную всюду дважды дифференцируемую по переменной x функцию $v(t,x)$, определенную на области $[0,T]\times(-\infty,\infty)$. Под *приближением решения ОСДУ* будем понимать пару случайных процессов V, G, определенных следующими соотношениями:

$$V_t = v(t, W_t), \quad G_t = \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=W_t}.$$

Соответствующей этому приближению *стохастической невязкой* ψ будем называть случайный процесс

$$\psi_t = V_T - V_t - \int\limits_t^T f(V_t, G_t)\,dt - \int\limits_t^T G_t\,dW_t.$$

Стохастическая невязка почти всюду равна нулю только для точного решения ОСДУ.

Ниже будет показано, что процесс ψ единственным образом разложим в виде

$$\psi_t = g(t, W_t) + \int\limits_t^T M(t, W_t)\,dW_t, \tag{4}$$

где $g(T,x) \equiv 0$ $\forall x$. Пользуясь единственностью разложения (4), определим понятие нормы для процесса стохастической невязки:

$$||\psi|| = \max\Big(\max_{t,x}\big|g(t,x)\big|, \max_{t,x}\big|M(t,x)\big|\Big). \tag{5}$$

Для доказательства основного результата нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *На интервале времени $[0,T]$ рассмотрим процесс η_t с траекториями конечной вариации: $\eta_t = \int\limits_t^T a(\tau, W_\tau)\,d\tau$. Рассмотрим разложение процесса*

$$\eta_t = h(t, W_t) + \int\limits_t^T M(\tau, W_\tau)\,dW_\tau \tag{6}$$

с $h(T,\cdot) \equiv 0$ и $M(t,x) = \dfrac{\partial h(t,x)}{\partial x}$. Таким образом, процесс η есть процесс с траекториями конечной вариации. Допустим, что непрерывная функция $a(t,x)$ ограничена: $\big|a(t,x)\big| < k_1(t)$. Тогда процесс η представим в виде (6) и

$$\big|h(t,x)\big| \leqslant \int\limits_t^T k_1(\tau)\,d\tau \quad \forall x, \qquad \big|M(t,x)\big| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_t^T \frac{k_1(\tau)}{\sqrt{\tau - t}}\,d\tau \quad \forall x. \tag{7}$$

Если, кроме того, функция $a(t,x)$ всюду дифференцируема по второму аргументу и выполнено усло-

вие $\left|\dfrac{\partial a(t,x)}{\partial x}\right| < k_2(t)\ \forall x$, *то верна оценка:*

$$\big|M(t,x)\big| \leqslant \int\limits_t^T k_2(\tau)\,d\tau \quad \forall x. \tag{8}$$

Доказательство. В самом деле, по формуле Ито [5] функция $h(t,x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial x^2} = -a(t,x). \tag{9}$$

Пусть

$$M(t,x) = \frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\,. \tag{10}$$

Представим функцию $h(t,x)$ с помощью фундаментального решения уравнения (9):

$$h(t,x) = -\int\limits_t^T \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}}\,\exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{2(\tau-t)}\Big)a(\tau,y)\,dy\Big]\,d\tau.$$

Отсюда сразу получается первое неравенство в (7):

$$\big|h(t,x)\big| < \int\limits_t^T k_1(\tau)\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}}\,\exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{2(\tau-t)}\Big)\,dy\Big]\,d\tau = \int\limits_t^T k_1(\tau)\,d\tau.$$

Используя (10), можно представить функцию $M(t,x)$ в виде

$$M(t,x) = -\int\limits_t^T \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}}\,\exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{2(\tau-t)}\Big)\,\frac{-(x-y)}{\tau-t}\,a(\tau,y)\,dy\Big]\,d\tau. \tag{11}$$

Оценим функцию $M(t,x)$ следующим образом:

$$\big|M(t,x)\big| \leqslant \int\limits_t^T k_1(\tau)\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}}\,\exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{2(\tau-t)}\Big)\,\frac{|x-y|}{\tau-t}\,dy\Big]\,d\tau \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_t^T \frac{k_1(\tau)}{\sqrt{\tau-t}}\,d\tau.$$

Для того чтобы получить оценку (8) для функции $M(t,x)$, проинтегрируем по частям (11):

$$M(t,x) = \int\limits_t^T \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}}\,\exp\Big(\frac{-(x-y)^2}{2(\tau-t)}\Big)\,\frac{\partial a(\tau,y)}{\partial y}\,dy\Big]\,d\tau.$$

Следовательно, $\big|M(t,x)\big| \leqslant \int\limits_t^T k_2(\tau)\,d\tau$. Доказательство леммы 1 завершено.

Лемма 2. *На множестве* $(-\infty,\infty)\times[0,T]$ *рассмотрим уравнение теплопроводности в обратном времени:*

$$u_t = -\frac{u_{xx}}{2}, \quad x\in(-\infty,\infty). \tag{12}$$

Тогда для всех x,t *выполнены неравенства*

$$\big|u(t,x)\big| \leqslant \max_y\big|u(T,y)\big|, \quad \Big|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big| \leqslant \max_y\Big|\frac{\partial u(T,y)}{\partial y}\Big|, \quad \Big|\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big| \leqslant \max_y\Big|\frac{\partial^2 u(T,y)}{\partial y^2}\Big|.$$

Первое неравенство леммы 2 может быть найдено, например, в [10]. Остальные неравенства вытекают из того, что функции $u_x(t,x)$, $u_{xx}(t,x)$ также являются решениями уравнения (12).

Теперь мы готовы сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Рассмотрим на отрезке времени* $[0,T]$ *обратное стохастическое уравнение* (1), *для которого выполнено условие* (2). *Пусть его решение* Y, Z *существует и единственно; тогда оно представимо в виде* (3). *Допустим, что выполнены следующие условия:*

— процесс стохастической невязки, соответствующий некоторому приближению решения уравнения (1), *задаваемому функцией* $v(t,x)$, *удовлетворяет ограничению* $\|\psi\| < C_1$*;*

— для приближения при всех x *выполнены следующие оценки в конечный момент времени* T*:*

$$\bigl|v(T,x)-u(T,x)\bigr| \leqslant C_2, \quad \Bigl|\frac{\partial v(T,x)}{\partial x}-\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}\Bigr| \leqslant C_3; \tag{13}$$

— функция $f(y,z)$ *дважды непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов и вторые частные и смешанная производные по аргументам* y,z *ограничены по модулю константой* K, *а первые частные производные ограничены константой* L*;*

— приближение всюду удовлетворяет условию

$$\Bigl|\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\Bigr| \leqslant C_4, \quad \Bigl|\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\Bigr| \leqslant C_4, \quad \Bigl|\frac{\partial^2\bigl(v(t,x)-u(t,x)\bigr)}{\partial x^2}\Bigr| \leqslant C_4.$$

Тогда

$$\bigl|u(t,x)-v(t,x)\bigr| \leqslant C_2 + C_1(2E-1) + \left[\left(2L\Bigl(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigr)\right)^2 E + L\right](C_2+C_3)(T-t),$$

$$\Bigl|\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Bigr| \leqslant C_3 + C_1(2E-1) + \\ + \left[3KC_3(3C_4+C_3) + \frac{2L^2}{\sqrt{\pi}}C_3 + LC_3 + 2C_2KC_4 + \left(2L\Bigl(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigr)\right)^2 E(C_2+C_3)\right](T-t),$$

где $E = \exp\left[2L\Bigl(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigr)\sqrt{T-t}\right]$.

Доказательство. Обозначив $G(t,x) = \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x}$, выпишем еще раз определение процесса ψ стохастической невязки:

$$\psi_t = v(T,W_T) - v(t,W_t) - \int_t^T f\bigl(v(\tau,W_\tau),G(\tau,W_\tau)\bigr)\,d\tau - \int_t^T G(\tau,W_\tau)\,dW_\tau .$$

Доказательство будет проводиться в три этапа. На первом этапе будет получено первое приближение так, чтобы значения первого приближения и точного решения в терминальный момент времени совпадали. При этом необходимо оценить сверху норму стохастической невязки, соответствующей новому приближению. На втором этапе строится последовательность функций $v^n(t,x)$, равномерно сходящихся к функции $u(t,x)$. На третьем этапе выводятся оценки, требуемые в теореме.

Этап 1. Построение первого приближения. Введем обозначение $\Delta(x) = u(T,x) - v(T,x)$. Учитывая (13), запишем:

$$\bigl|\Delta(x)\bigr| \leqslant C_2 \quad \forall x, \quad \Bigl|\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x}\Bigr| \leqslant C_3 \quad \forall x, \quad \Bigl|\frac{\partial^2 \Delta(x)}{\partial x^2}\Bigr| \leqslant C_4 \quad \forall x. \tag{14}$$

Пусть $w(t,x)$ — решение следующего уравнения:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}, \quad w(T,x) = \Delta(x). \tag{15}$$

Используя лемму 2 и условия (14), получим оценки

$$\bigl|w(t,x)\bigr| \leqslant C_2, \quad \Bigl|\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\Bigr| \leqslant C_3, \quad \Bigl|\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}\Bigr| \leqslant C_4. \tag{16}$$

Нулевое приближение положим следующим:

$$v^0(t,x) = v(t,x) + w(t,x), \quad G^0(t,x) = G(t,x) + \frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\,. \tag{17}$$

Таким выбором нулевого приближения достигается равенство нулевого приближения и точного решения в терминальный момент времени: $v^0(T,x) = u(T,x)\ \forall x$. Заметим, что стохастическая невязка изменится:

$$\psi_t^0 = \psi_t + \int_t^T \big(f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau, G_\tau)\big)\, d\tau. \tag{18}$$

В силу (16), (17) и липшицевости функции f выполнено неравенство

$$\big|f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau, G_\tau)\big| \leqslant L(C_2 + C_3).$$

По лемме 1 интеграл в (18) представим в виде

$$\int_t^T \big(f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau, G_\tau)\big)\, d\tau = h^0(t, W_t) + \int_t^T M^0(\tau, W_\tau)\, dW_\tau, \tag{19}$$

где

$$\big|h^0(t, W_t)\big| \leqslant L(C_2 + C_3)(T - t), \quad \big|M^0(t, W_t)\big| \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, L(C_2 + C_3)\sqrt{T - t}. \tag{20}$$

Однако для доказательства теоремы второе неравенство оказывается слишком слабым. Распишем интеграл в (18) следующим образом:

$$\int_t^T \big(f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau, G_\tau)\big)\, d\tau = \int_t^T \big(f(v_\tau^0, G_\tau) - f(v_\tau, G_\tau)\big)\, d\tau + \int_t^T \big(f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau^0, G_\tau)\big)\, d\tau.$$

Нетрудно показать, что выражение, стоящее в первом интеграле в правой части, удовлетворяет условиям Липшица по x с константой липшицевости $(LC_3 + 2C_2KC_4)$. Поэтому, используя лемму 1, запишем

$$\int_t^T f(v_\tau^0, G_\tau) - f(v_\tau, G_\tau)\, d\tau = h^v(t, W_t) + \int_t^T M^v(\tau, W_\tau)\, dW_\tau \tag{21}$$

с ограничением

$$\big|M^v(t, W_t)\big| \leqslant (LC_3 + 2C_2KC_4)(T - t). \tag{22}$$

Кроме того, подынтегральное выражение во втором интеграле представимо в виде

$$f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau^0, G_\tau) = l(\tau, x)\big(G_\tau^0 - G(\tau, x)\big), \tag{23}$$

где функция $l(\tau, x)$ удовлетворяет условиям

$$\big|l(t, x)\big| \leqslant L, \quad \big|l(t, x) - l(t, y)\big| \leqslant K(3C_4 + C_3)|x - y|. \tag{24}$$

Второй интеграл представим в таком же виде:

$$\int_t^T f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau^0, G_\tau)\, d\tau = h^G(t, w_t) + \int_t^T M^G(\tau, W_\tau)\, dW_\tau. \tag{25}$$

Величины h^G, M^G будут оценены ниже.

Первое приближение положим следующим:

$$v^1(t, x) = v^0(t, x) + h^0(t, x), \quad G^1(t, x) = G^0(t, x) + M^0(t, x). \tag{26}$$

Очевидно, что $h^0(T, x) \equiv 0$; поэтому $v^0(T, x) = v^1(T, x)\ \forall x$. Учитывая (18), (19), преобразуем новую стохастическую невязку:

$$\begin{aligned}\psi_t^1 &= \psi_t^0 + (v_t^0 - v_t^1) + \int_t^T \big(f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau^1, G_\tau^1)\big)\, d\tau + \int_t^T (G_t^0 - G_t^1)\, dW_t = \\ &= \psi_t + \int_t^T \big(f(v_\tau^0, G_\tau^0) - f(v_\tau^1, G_\tau^1)\big)\, d\tau.\end{aligned} \tag{27}$$

Оценка изменения аппроксимации. Оценим выражения

$$\left|v^1(t,x)-v(t,x)\right|,\quad \left|G^1(t,x)-G(t,x)\right|.$$

Учитывая (16), (17), (20), (26), получим оценку

$$\left|v(t,x)-v^1(t,x)\right| \leqslant \left|v(t,x)-v^0(t,x)\right| + \left|v^0(t,x)-v^1(t,x)\right| \leqslant C_2 + L(C_2+C_3)(T-t).$$

Сложнее дело обстоит с оценкой для выражения $|G^1(t,x)-G(t,x)|$. Учитывая (17), (26), (21), (25), имеем

$$G^1(t,x)-G(t,x) = w_x(t,x) + M^v(t,x) + M^G(t,x). \tag{28}$$

Напомним, что подынтегральное выражение в (25) представимо в виде

$$f(v^0_\tau, G^0_\tau) - f(v^0_\tau, G_\tau) = l(t,x)\big(G^0(t,x)-G(t,x)\big),$$

где функция $l(t,x)$ удовлетворяет условиям (24).

Обозначим через $p(t,x,y)$ плотность нормального распределения:

$$p(t,x,y) = \frac{\exp\big(-(x-y)^2/(2t)\big)}{\sqrt{2\pi t}}\,.$$

Тогда, учитывая (25), (23) и действуя как при доказательстве леммы 1 при выводе представления (11), получим

$$M^G(t,x) = \int\limits_t^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\tau-t,x,y)\,\frac{x-y}{\tau-t}\,l(\tau,y)\,\frac{\partial w(\tau,y)}{\partial y}\,dy\,d\tau.$$

Поскольку $w(t,x)$ — решение уравнения (15), последнее равенство можно переписать в виде

$$M^G(t,x) = \int\limits_t^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\tau-t,x,y)\,\frac{x-y}{\tau-t}\,l(\tau,y) \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(T-\tau,y,z)\,\frac{\partial\Delta(z)}{\partial z}\,dz\,dy\,d\tau.$$

Проинтегрировав по y, запишем

$$M^G(t,x) = \int\limits_t^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t,\tau,x,z)\,\frac{\partial\Delta(z)}{\partial t}\,dz\,dt,$$

где

$$q(t,\tau,x,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\tau-t,x,y)\,\frac{x-y}{\tau-t}\,l(\tau,x)p(T-\tau,y,z)\,dy.$$

Обозначим $\quad r(t,x,z) = \int\limits_t^T q(t,\tau,x,z)\,d\tau$. Учитывая (23), (24), можно показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|p(T-t,x,z)+r(t,x,z)\right|dz \leqslant 1 + \left(3K(3C_4+C_3) + \frac{4L^2}{\sqrt{\pi}}\,\right)(T-t). \tag{29}$$

Теперь оценим величину $w_x(t,x)+M^G(t,x)$; представим ее в виде

$$w_x(t,x)+M^G(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(p(t,x,z)+r(t,x,z)\big)\,\frac{\partial\Delta(z)}{\partial z}\,dz.$$

Вспоминая (29), (14), получим

$$\left|w_x(t,x)+M^G(t,x)\right| \leqslant C_3\left(1+\left(3K(3C_4+C_3)+\frac{2L^2}{\sqrt{\pi}}\,\right)(T-t)\right).$$

Окончательно из (28), (22) имеем

$$\left|G^1(t,x)-G(t,x)\right| \leqslant C_3+\Big(3KC_3(3C_4+C_3)+\frac{4L^2}{\sqrt{\pi}}C_3+LC_3+2C_2KC_4\Big)(T-t).$$

Оценка невязки ψ^1_t. Для того чтобы получить необходимые оценки, достаточно учесть липшицевость функции f, вспомнить формулы (26), (27), (20) и применить лемму 1:

$$\left|h^1(t,x)\right| \leqslant C_1+\frac{2}{3}\Big(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)L^2(C_2+C_3)(T-t)^{3/2},$$
$$\left|M^1(t,x)\right| \leqslant C_1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)L^2(C_2+C_3)(T-t).$$

Итак, объединяя все вышесказанное, находим, что первое приближение обладает следующими свойствами:

— для изменения приращения известно, что

$$\begin{aligned}\left|v^1(t,x)-v(t,x)\right| &\leqslant C_2+L(C_2+C_3)(T-t),\\ \left|G^1(t,x)-G(t,x)\right| &\leqslant C_3+\Big(3KC_3(3C_4+C_3)+\frac{4L^2}{\sqrt{\pi}}C_3+LC_3+2C_2KC_4\Big)(T-t);\end{aligned} \tag{30}$$

— для соответствующей стохастической невязки верна оценка

$$\begin{aligned}\left|h^1(t,x)\right| &\leqslant C_1+2\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)L^2(C_2+C_3)(T-t)^{3/2},\\ \left|M^1(t,x)\right| &\leqslant C_1+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)L^2(C_2+C_3)(T-t);\end{aligned} \tag{31}$$

— $u(T,x)\equiv v^1(T,x)$, т.е. в терминальный момент времени аппроксимация точно совпадает с заданным решением.

Этап 2. Построение последовательности приближений решения ОСДУ. Представим стохастическую невязку ψ^1_t в виде

$$\psi^1_t = h^1(t,W_t)+\int_t^T M^1(t,W_t)\,dW_t, \tag{32}$$

для которого верны оценки (31). Следующее приближение положим таким:

$$v^2(t,x)=v^1(t,x)+h^1(t,x), \quad G^2(t,x)=G^1(t,x)+M^1(t,x). \tag{33}$$

Учитывая (32), (33), преобразуем соответствующую стохастическую невязку:

$$\psi^2_t=\psi^1_t+(v^1_t-v^2_t)+\int_t^T\big(f(v^1_\tau,G^1_\tau)-f(v^2_\tau,G^2_\tau)\big)\,d\tau+\int_t^T(G^1_t-G^2_t)\,dW_t=\int_t^T\big(f(v^1_\tau,G^1_\tau)-f(v^2_\tau,G^2_\tau)\big)\,d\tau.$$

Учитывая липшицевость функции f и (31), имеем

$$\begin{aligned}\left|f(v^1_t,G^1_t)-f(v^2_t,G^2_t)\right| &\leqslant 2LC_1+L\Big(\left|h^0(t,W_t)\right|+\left|M^0(t,W_t)\right|\Big)\leqslant\\ &\leqslant 2LC_1+2\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)^2L^3(C_2+C_3)(T-t);\end{aligned}$$

по лемме 1 новая стохастическая невязка представима в виде

$$\psi^2=h^2(t,W_t)+\int_t^T M^2(\tau,W_\tau)\,dW_\tau,$$

где

$$\left|h^2(t,W_t)\right| < 2LC_1(T-t) + \frac{2}{4}2\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)^2 L^3(C_2+C_3)(T-t)^2,$$

$$\left|M^2(t,W_t)\right| < 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2LC_1\sqrt{T-t} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)^2 L^3(C_2+C_3)(T-t)^{3/2}.$$

Будем продолжать итерации подобно тому, как это сделано в (33):

$$v^n(t,x) = v^{n-1}(t,x) + h^{n-1}(t,x), \quad G^n(t,x) = G^{n-1}(t,x) + M^{n-1}(t,x). \tag{34}$$

Для всех итераций имеет место следующее представление стохастической невязки:

$$\psi^n = h^n(t,W_t) + \int\limits_t^T M^n(\tau,W_\tau)\,dW_\tau.$$

При этом для $n \geqslant 2$ выполнены оценки

$$\begin{aligned}\left|h^n(t,W_t)\right| &\leqslant 2\sqrt{T}\,(2L)^{n-1}C_1\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{n-2}(T-t)^{(n-1)/2}/(n-1)! +\\ &+ \sqrt{T}\,(2L)^{n+1}(C_2+C_3)\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{n}(T-t)^{(n+1)/2}/(n+1)!\,,\\ \left|M^n(t,W_t)\right| &\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2L)^{n-1}C_1\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{n-2}(T-t)^{(n-1)/2}/(n-1)! +\\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2L)^{n+1}(C_2+C_3)\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{n}(T-t)^{(n+1)/2}/(n+1)!\,.\end{aligned} \tag{35}$$

Последние оценки нетрудно доказать с помощью математической индукции. В самом деле, для $n=2$ утверждение очевидно верно. На n-ом шаге известно, что подынтегральное выражение ограничено следующим образом:

$$\begin{aligned}\left|f(v_t^n,G_t^n) - f(v_t^{n+1},G_t^{n+1})\right| &\leqslant L2(2L)^{n-1}C_1\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{n-1}(T-t)^{(n-1)/2}/(n-1)! +\\ &+ L(2L)^{n+1}(C_2+C_3)\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{n+1}(T-t)^{(n+1)/2}/(n+1)!\end{aligned}$$

После применения леммы 1 получаем требуемые неравенства (35) для $(n+1)$-й итерации.

Этап 3. Завершение доказательства. Поскольку ряды из величин, стоящих справа в (35), сходятся, то функции $v^i(t,x)$, $G^i(t,x)$ сойдутся равномерно к некоторой паре $v^*(t,x)$, $G^*(t,x)$ (т.е. функции v^i сойдутся равномерно к v^*, а G^i сойдутся равномерно к G^*). По определению стохастической невязки последовательность процессов стохастических невязок ψ^i, соответствующих последовательности приближений v^i, G^i, сойдется в смысле нормы (5) к стохастической невязке ψ^* предельного приближения. Но поскольку $\|\psi^i\| \to 0$, то $\psi^* \equiv 0$, и пара v_t^*, G_t^* определяет точное решение (1) с заданными терминальными условиями. В силу единственности имеем $v(t,x) \equiv u(t,x)$.

Оценим теперь разности $\left|v(t,x) - v^*(t,x)\right|$ и $\left|G(t,x) - G^*(t,x)\right|$. В силу формул (35), (34) имеем

$$\left|v^1(0,x) - v^*(0,x)\right| \leqslant S_1^v + S_2^v, \quad \left|G^1(t,x) - G^*(t,x)\right| \leqslant S_1^G + S_2^G, \tag{36}$$

где $S_1^v = C_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\sqrt{T}(2L)^k C_1\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{k-1}(T-t)^{k/2}/k!\,,$

$$S_2^v = 2\sqrt{T}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)L^2(C_2+C_3)(T-t) + \sum_{k=3}^{\infty}\sqrt{T}(2L)^k(C_2+C_3)\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{k-1}(T-t)^{k/2}/k!\,,$$

$$S_1^G = C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2L)^k C_1\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{k-1}(T-t)^{k/2}/k!\,,$$

$$S_2^G = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sqrt{T}\Big)L^2(C_2+C_3)(T-t) + \sum_{k=3}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2L)^k(C_2+C_3)\Big(\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)^{k-1}(T-t)^{k/2}/k!\,.$$

Введем следующее обозначение:

$$E = \exp\left[2L\left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\sqrt{T-t}\right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} &S_1^v \leqslant C_1(2E-1), \quad S_2^v \leqslant \left(2L\left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right)^2 E(C_2+C_3)(T-t), \\ &S_1^G \leqslant C_1(2E-1), \quad S_2^G \leqslant \left(2L\left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right)^2 E(C_2+C_3)(T-t). \end{aligned} \tag{37}$$

Учитывая (36), (37), приходим к неравенствам

$$\left|v^1(0,x) - v^*(0,x)\right| \leqslant C_1(2E-1) + \left(2L\left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right)^2 E(C_2+C_3)(T-t),$$

$$\left|G^1(t,x) - G^*(t,x)\right| \leqslant C_1(2E-1) + \left(2L\left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right)^2 E(C_2+C_3)(T-t).$$

Вспоминая (30), получим утверждение, требуемое в теореме:

$$\begin{aligned} \left|v^*(t,x) - v(t,x)\right| &\leqslant C_2 + C_1(2E-1) + \left[\left(2L\left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right)^2 E + L\right](C_2+C_3)(T-t), \\ \left|G^*(t,x) - G(t,x)\right| &\leqslant C_3 + C_1(2E-1) + \left[3KC_3(3C_4+C_3) + \frac{4L^2}{\sqrt{\pi}}C_3 + LC_3 + 2C_2KC_4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(2L\left(\sqrt{T} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right)^2 E(C_2+C_3)\right](T-t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. Н. Смирнову за постановку задачи и обсуждение результатов и академику РАН А. Б. Куржанскому за внимание к работе и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Briand Ph., Delyon B., Memin J.* Donsker-type theorem for BSDEs // Electronic Communications in Probability. 2001. **6**. 1–14.
2. *Chevance D.* Discretization of Pardoux-Peng's backward stochastic differential equations // Applied Stochastics and Optimization. Proc. of ICIAM 95. Angewandte Mathematik und Mechanik. 1996. **3**. 323–326.
3. *Hamadene S., Lepeltier J.P.* Zero-sum stochastic differential games and backward equations // System and Control Letters. 1995. **24**. 259–263.
4. *El Karoui N., Quenez M.C.* Nonlinear pricing theory and backward stochastic differential equations // Financial Mathematics, Lecture Notes in Math. 1997. **1656**. 191–246.
5. *Ma J., Protter P., Martin J., Torres S.* Numerical method for backward stochastic differential equations // Annals of Applied Probability. 2002. **12**, N 1. 302–316.
6. *Pardoux E., Peng S.G.* Adapted solution of a backward stochastic differential equation // System and Control Letters. 1990. **14**. 55–61.
7. *Rouge R., El Karoui N.* Pricing via utility maximization and entropy // Mathematical Finance. 2000. **10**, N 2. 259–276.
8. *Захаров А.В.* Об одном методе приближенного решения обратного стохастического дифференциального уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 2. 336–347.
9. *Захаров А.В.* Теорема устойчивости решения обратного стохастического дифференциального уравнения // Принято к публикации в журнале Доклады РАН.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
11. *Аркин В.И., Саксонов М.Т.* Необходимые условия оптимальности в задачах управления стохастическими дифференциальными уравнениями // Докл. РАН. 1979. **244**, № 1. 11–15.

Поступила в редакцию
06.10.2003