

УДК 533.6:531.5:534.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОСМИЧЕСКОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

Г. А. Тарнавский¹, С. М. Аульченко¹, В. А. Вшивков²

Рассматриваются физико-математические и вычислительные проблемы моделирования нестационарных трехмерных задач космической газодинамики. В качестве базовой системы дифференциальных уравнений математической модели используется система газодинамических уравнений Эйлера, дополненная силовыми и энергетическими составляющими, которые моделируют отклонение уравнения состояния от идеального, процессы переноса тепла (теплопроводность, конвекцию, излучение), гравитацию (поле тяготения точечной массы и самогравитацию распределенного газового облака). Моделирование проводится на основе принципа декомпозиции полной задачи на ряд подзадач, соответствующих различным физическим процессам. Этой декомпозиции, в свою очередь, соответствует структурирование вычислительного комплекса на ряд автономных сегментов, что обеспечивает расширяемость и дополняемость пакета компьютерных программ. Приводятся некоторые результаты расчетов задач о движении ударных волн и волн разрежения в газовых средах, гравитационного коллапса неподвижных и вращающихся газовых облаков, разлета газового сгустка, моделирующих образование и взрыв протозвезд.

1. Введение. Одной из актуальных проблем астрофизики [1] является проблема образования звездных и планетарных систем из протоматерии и их дальнейшего развития. К этой проблеме непосредственно примыкают вопросы о допланетном синтезе первичного органического вещества на Земле, установления наиболее вероятных условий абиогенного синтеза органических соединений в Солнечной системе, обсуждение которых заметно оживилось в последнее время [2].

Прогресс современной вычислительной техники с использованием технологий параллельного счета на многопроцессорных ЭВМ делает возможным компьютерное моделирование реальных динамических процессов, наблюдаемых в галактиках: образование спиральных структур, шаровых скоплений, аккреционных дисков и т.п. (см. рис. 1). Сложный комплекс физико-химических, механических и даже частично философских проблем в целях оптимизации путей решения необходимо требует структурирования полной задачи на ряд подзадач — некоторых сегментов, охватывающих определенную часть проблемы. Эти сегменты, с одной стороны, должны быть достаточно автономны и иметь минимальное число связей с другими сегментами, чтобы, например, коренной пересмотр физико-химических концепций одного сегмента “не обрушил” теорию и алгоритмику решения других подзадач. С другой стороны, предмет исследования сегмента должен быть достаточно обширен, чтобы представлять не только некоторую структурную часть проблемы, не имеющую смысла вне ее, но и быть в большой мере самостоятельным, индивидуально вызывающим особый научный интерес. Таким структурным разделом большой астрофизической проблемы является сегмент “космическая газодинамика”, математическому моделированию и компьютерному решению задач которого посвящена настоящая статья.

2. Предмет и методология исследования. Раздел “космическая газодинамика” ориентирован на изучение процессов, происходящих в газовой среде, составляющей, наряду с твердофазными частицами и плазменной компонентой, протогалактические (протозвездные, протопланетные) облака. Методология исследования этих процессов (экспериментально-наблюдательные астрономические методы здесь не рассматриваются) основана на методах теоретической [3, 4], вычислительной [5, 6] аэродинамики, физической газовой динамики и термодинамики [7, 8] и опирается на возможности современной компьютерной техники.

Достаточно многочисленные работы (подробный анализ которых в данной статье представляется затруднительным) могут быть подразделены на аналитические (см., например, [9–11]) и численные исследования в пространстве чаще всего одного [12–20] измерения (существенно реже двух [21–23] или

¹ Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, г. Новосибирск; e-mail: tarnav@itam.nsc.ru, aultch@itam.nsc.ru

² Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр. Лаврентьева, 6, 630090, г. Новосибирск; e-mail: vsh@ssd.sccc.ru

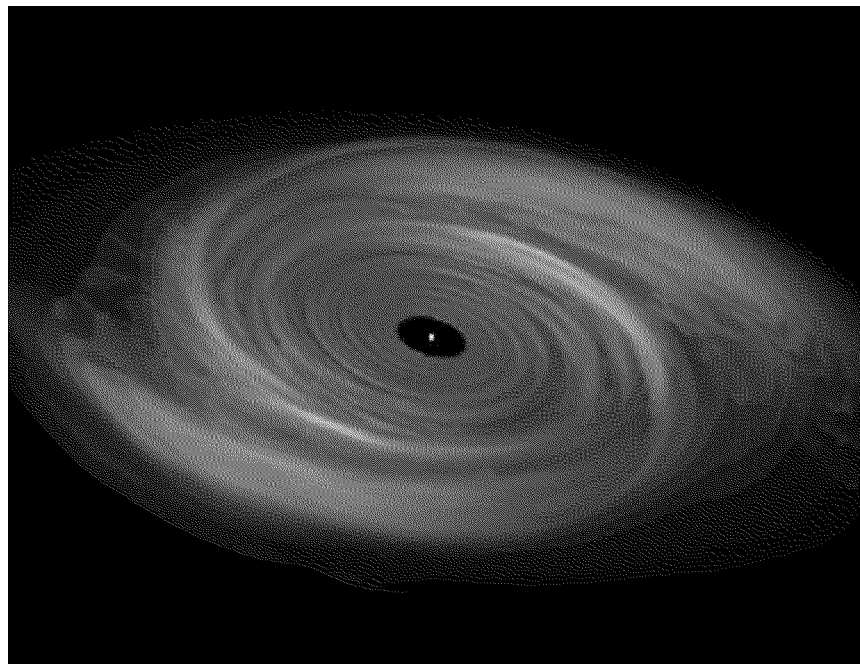


Рис. 1. Спиральная структура газопылевого облака, вращающегося вокруг центра тяготения

трех [23–26]). В [9] в рамках ньютоновской механики исследуется возможность образования однородного разлета гравитирующего газа и построен класс точных решений, учитывающих влияние градиента давления газа. В [10] рассматривается ультрарелятивистское приближение уравнений газовой динамики в специальной теории относительности, на основе которого получено точное решение задачи сильного релятивистского взрыва в среде со степенным распределением плотности. В [11] проведен вывод с точностью до членов второго порядка уравнений Эйнштейна для системы гравитационно взаимодействующих частиц с разными массами.

Работы [12–16] посвящены различным аспектам эволюции ударных волн в реагирующих средах, в том числе с инверсно-заселенными уровнями энергии, изучению их структуры и взаимодействия друг с другом с учетом излучения, в присутствии магнитных полей, устойчивости по отношению к малым возмущениям.

В [17] проанализированы стационарные решения системы уравнений Эйлера при наличии силовых воздействий гравитационного и электрического типов с сосредоточенными массой и зарядом, основное внимание при этом уделено классу солитонных решений.

В [18] рассмотрена задача о динамическом взрыве равновесия звезды, которая рассматривается как самогравитирующий газовый шар, и получены особые режимы течений газа, в частности, неоднократный сброс оболочки звезды и уход части массы в межзвездное пространство.

В [19] и [20], наоборот, рассматривается коллапс (сжатие) протозвездного облака газа в изотермическом приближении. В зависимости от начальных условий (холодные или горячие облака) исследуются различные возможные сценарии гравитационного коллапса.

В [21] в газодинамическом приближении тонкого слоя рассматриваются проблемы взаимодействия солнечного ветра с локальной межзвездной средой и проводится сравнение данных вычислительных расчетов с многочисленными экспериментальными данными, полученными космическими аппаратами, и на основе этого сравнения проводится интерпретация ряда экспериментальных данных.

В [22] в газодинамическом приближении Навье–Стокса, для сравнения дополненного методом Монте-Карло, проведено моделирование двумерных стационарных течений во внутренней атмосфере комет с ядрами типа “яблоко”, имеющими на дневной стороне большую, полностью освещенную выемку, и показана возможность образования рециркуляционных зон со сложной структурой.

При изучении сложных астрофизических явлений, например процессов перемешивания вещества в сверхновых звездах, переход к моделированию трехмерных течений сопровождается появлением новых физических эффектов, которые в задачах меньшей размерности либо отсутствуют, либо проявляются лишь незначительно. К таким процессам относятся гидродинамические неустойчивости Рэлея–Тейлора,

Кельвина–Гельмгольца, Рихтмайера–Мешкова, физические неустойчивости Джинса и т.п., исследование которых приобретает особую значимость. Так, в [23] изучаются “грибовидные” структуры неустойчивости Рихтмайера–Мешкова, возникающие при переходе ударной волны из одной газовой среды в другую (из гелия в ксенон), т.е. анализируется рефракция сильного разрыва на контактной границе. Исследование таких задач предъявляет большие требования не только к используемой вычислительной сетке, но и к качеству применяемого алгоритма. Вопросам конструирования соответствующих алгоритмов для ультрарелятивистских уравнений Эйлера посвящена работа [24].

Необходимые для обеспечения численного решения подобных задач и, далее, задач, еще более приближенных к реальным, ресурсы настолько велики, что уже требуется применение новых компьютерных технологий параллельного счета на многопроцессорных вычислительных системах. Это порождает новые проблемы физико-математической декомпозиции полной задачи для организации распараллеливания вычислительного процесса. Решению таких проблем посвящены работы [25–27], а методология и конкретные технологии параллельного проектирования изложены в монографии [28].

3. Газовая динамика. Основные уравнения и общая структура вычислительного комплекса. Физические процессы, протекающие в газовых средах, определяются фундаментальными законами сохранения массы, импульса и энергии, которые могут быть записаны в дифференциальной форме в дивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \nabla_k \mathbf{F}^k(\mathbf{U}) = \mathbf{A}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \rho E)$ — вектор консервативных переменных, представляющий плотности сохраняющихся величин (массы, импульса, энергии); \mathbf{F} — вектор их потоков; \mathbf{A} — вектор массовых сил; ∇ — дифференциальный оператор “набла”; в частности, в декартовой системе координат он имеет вид

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Система (1), эволюционная по времени t , в пространстве трех измерений (x, y, z) состоит из пяти уравнений, связывающих сохраняемую величину U_i с ее потоком через границы или источником ее производства внутри рассматриваемой локальной области.

Вообще говоря, вопрос о правомерности применения модели сплошной среды в космической газодинамике достаточно дискусионен. С одной стороны, имеют место в среднем малые значения плотности газа в межгалактических или околозвездных пространствах и, соответственно, большие длины λ свободного пробега атомов (молекул). С другой стороны, весьма велики и характерные размеры систем L . Таким образом, критерий применимости модели сплошной среды

$$\frac{\lambda}{L} \ll 1 \quad (2)$$

в среднем выполняется в большинстве исследуемых задач, описанных выше. В особенности это характерно для задач о коллапсе протозвездных облаков или, наоборот, о взрывах сверхновых, где в центральной геометрической части моделируемого процесса критерий (2) выполняется. Однако на периферии расчетной области критерий (2) может не выполняться. В этом случае имеется альтернатива: а) подвижная граница расчетной области должна отслеживать границу выполнимости (2) или б) на периферии следует применять модели разреженного газа с противоположным (2) критерием применимости с последующей сшивкой решений на некоторой внутренней границе, соответствующей $\frac{\lambda}{L} \approx 1$. Эта проблема будет дополнительно обсуждаться ниже.

Система (1) в газо- и термодинамических функциях может быть записана в векторной форме (см., например, [5, 6]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \nabla_k (\rho v_k) = B, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \nabla_k (\rho v_i v_k) + \nabla_i p = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \nabla_k v_k (\rho E + p) = - \sum_{k=1}^3 \nabla_k q_k + Q + \sum_{k=1}^3 v_k F_k, \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_g. \tag{6}$$

Здесь ρ — плотность, \mathbf{v} — вектор скорости, $E = e + \frac{v^2}{2}$ — массовая плотность полной энергии, e — внутренняя энергия, p — давление, \mathbf{F} — суммарный вектор внешних сил, \mathbf{q} — тепловой поток, Q — локальное энерговыделение, \mathbf{vF} — удельная работа внешних сил, B — удельный дефект массы. Смысл \mathbf{F}_f и \mathbf{F}_g (фотонная и гравитационная составляющие) будет пояснен ниже. Система (3)–(5) при нулевых правых частях носит название системы уравнений Эйлера и широко используется в газовой динамике и аэродинамике.

Следует сказать несколько слов о функции B . Закон сохранения массы в классической физике требует $B = 0$. Однако прогресс астрофизики и определенное изменение представлений о Вселенной делает целесообразным иметь перспективную возможность в разрабатываемом программном комплексе в будущем учитывать процессы перехода материи из одной формы (вещество) в другую (поле), например, аннигиляцию вещества или пока еще даже теоретически неясные процессы взаимодействия вещества и “темной материи” (список перспективных проблем современной физики рассмотрен в [1]).

Как уже обсуждалось выше, для эффективности математического моделирования проведена декомпозиция полной задачи на ряд подзадач, достаточно автономных по своему физическому смыслу, что дает возможность структуризации вычислительного комплекса на ряд сегментов: “газовая динамика”, “термодинамика”, “теплопередача”, “гравитация”, “метрика пространства”. Базовым из них является сегмент “газовая динамика”, представляющий алгоритмику левой части системы уравнений (3)–(6) и получающий от остальных сегментов необходимые данные в свою правую часть. Такая открытая структура комплекса позволяет расширять его функциональные возможности (например, в область моделирования газопылевых облаков с учетом взаимодействия твердых частиц с газовой средой или ее многокомпонентности).

4. Термодинамика. Система (3)–(6) замыкается термическим

$$p = p(\rho, T) \tag{7}$$

или калорическим

$$e = e(\rho, T) \tag{8}$$

уравнением состояния, где T — абсолютная термодинамическая температура. Уравнения (7), (8) не являются независимыми и могут быть получены на основе термодинамических соотношений одно из другого (см., например, [8]). Использование той или иной (или и той и иной) формы уравнения состояния в программном комплексе определяется структурой конкретного вычислительного алгоритма.

В качестве (7) могут использоваться уравнения состояния Ван-дер-Ваальса, Бертло, вириальных разложений Вукаловича–Новикова, Майера (подробнее см. [8, 29]). Все эти формы могут быть сведены к некоторому общему виду записи

$$p = Z(\rho, T) \frac{R}{\mu} \rho T, \tag{9}$$

где R — универсальная газовая постоянная ($R = 8.31 \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \text{ моль}^{-1}$), μ — молекулярный (атомарный) вес газовой среды. При $Z = 1$ уравнение (9) переходит в уравнение состояния идеального газа Клапейрона–Менделеева.

Весьма удобным для использования является уравнение состояния, связывающее давление с плотностью и внутренней энергией

$$p = p(\rho, e). \tag{10}$$

В классической аэродинамике (10) имеет вид

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \tag{11}$$

где γ — показатель адиабаты газовой среды, величина, как правило, постоянная во всей области течения газа.

При моделировании задач космической газодинамики уравнение состояния (9) может весьма сильно отклоняться от идеального вследствие различных физических процессов — возбуждения внутренних степеней свободы (вращательных, колебательных, электронных), диссипации и рекомбинации, ионизации и т.п. При структурировании программного комплекса на сегменты, моделирующие (отдельно в вычислительном смысле) различные физические процессы, удобно использовать метод эффективного показателя

адиабаты. Сущность этого метода (подробнее см. [29, 30]) заключается в использовании формы записи уравнения состояния в классическом виде (11), в котором γ является существенно переменной величиной

$$\gamma = \gamma(\rho, T). \quad (12)$$

Этот метод эффективен для моделирования нестационарных течений газа с большими перепадами p и T в расчетной области в случае равновесных или квазиравновесных процессов. (Существенно неравновесные процессы требуют дополнительных связей между программными сегментами. Этот вопрос лежит вне рамок настоящей работы.)

Кратко опишем один из способов получения эффективного показателя адиабаты. Определим его аналогично классическому

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (13)$$

Удельные теплоемкости при постоянном объеме c_v и постоянном давлении c_p соответственно равны

$$c_v = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_V, \quad (14)$$

$$c_p = c_v + \left[p + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial V} \right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad (15)$$

где удельный объем $V = (1/\rho)$.

Опуская несложные, но громоздкие выкладки, связанные с применением техники якобианов, из термодинамических соотношений можно получить конечные формулы для эффективного показателя адиабаты

$$\gamma = 1 + \frac{T\alpha^2 V_m}{c_{v,ид} k_T}, \quad (16)$$

где $c_{v,ид}$ — теплоемкость идеального газа при постоянном объеме, $V_m = V/\mu$ — молярный объем, α — коэффициент объемного расширения, k_T — коэффициент изотермической сжимаемости

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (17)$$

Уравнение адиабаты имеет вид

$$V^{\gamma-1} \exp \left(\int \alpha dT \right) = \text{const}. \quad (18)$$

В случае идеального газа из (9) при $Z = 1$ имеем хорошо известные в классической аэродинамике соотношения: $\alpha = \frac{R}{\mu T}$, $k_T = \frac{1}{p}$ для (17) и $V^{\gamma-1} T = \text{const}$ или $pV^\gamma = \text{const}$ для (18); из (16) с учетом (15)

имеем $c_p - c_v = \frac{R}{\mu}$.

Заметим, что (16) и (18) выписываются в аналитическом виде только для случая совершенного газа, у которого c_v зависит только от одного термодинамического параметра (температуры).

Подход с использованием эффективного показателя адиабаты применялся (в одномерном случае) для задачи о сильном релятивистском взрыве в среде с переменной плотностью [10]. Уравнение состояния выбиралось в виде

$$p = (\gamma_0 - 1) f \rho^{\gamma_0}, \quad (19)$$

$$\epsilon = 1 + f \rho^{\gamma_0 - 1}, \quad (20)$$

где γ_0 принималось постоянным, а функция f была связана с распределением энтропии. Приведение (19) и (20) к виду (11) дает значение в смысле (12)

$$\gamma(\epsilon) = \gamma_0 - \frac{\gamma_0 - 1}{\epsilon}. \quad (21)$$

Эффективный показатель адиабаты γ рекомендовался в классической монографии [3] для моделирования ионизирующих ударных волн с соотношением на фронте

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \frac{p_0}{\rho_0} + \alpha J \frac{R}{\mu}, \quad (22)$$

где J — потенциал ионизации атома, R и μ — см. (9), а степень ионизации α определялась по формуле Саха. Формула (22) использовалась также в [15] для расчета взаимодействия звуковых и сильных ударных волн.

В заключение кратко остановимся на возможности расширения вычислительного комплекса в область моделирования неравновесных течений. Для этого сегмент “термодинамика” должен быть дополнен уравнением Ландау–Теллера [4]

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{e_0 - e}{\tau(p, T)}, \tag{23}$$

где e_0 — равновесное значение удельной внутренней энергии, а время релаксации

$$\tau(p, T) = \frac{A}{p} \exp\left(\frac{B}{T^{1/2}}\right), \tag{24}$$

где A и B — константы, значение которых определяется конкретным физическим процессом.

5. Теплопередача. Тепловой поток \mathbf{q} в уравнении баланса энергии (5) определяется двумя физическими механизмами — теплопроводностью газа и переносом тепла излучением:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + \mathbf{q}_f. \tag{25}$$

Первый из них связан с разностью температур в слоях газа и в стационарном (квазистационарном) случае описывается законом Фурье

$$\mathbf{q}_t = -\kappa \nabla T, \tag{26}$$

в котором коэффициент теплопроводности κ , согласно кинетической теории газов, выражается соотношением

$$\kappa = \frac{1}{3} v_a \lambda_a \rho c_V, \tag{27}$$

где v_a и λ_a — средняя скорость и длина свободного пробега молекул (атомов), ρ — плотность, c_V — теплоемкость газа при постоянном объеме. Для решения конкретной задачи v_a и λ_a могут быть вычислены по значениям ρ и T при постулировании, например, максвелловского распределения молекул по скоростям (см. [7]), или значение κ в (26) может выбираться непосредственно из каких-либо термодинамических таблиц.

Вообще говоря, в нестационарном случае изменение температуры для этого физического процесса устанавливается решением дифференциального уравнения Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q_V}{\rho c_p}, \tag{28}$$

где коэффициент температуропроводности $\alpha = \kappa / \rho c_p$, а q_V — мощность теплового источника (если таковой имеется). Однако следует отметить два обстоятельства, затрудняющих использование (28) в вычислительном алгоритме решения основной системы (3)–(6). Во-первых, решение собственно нестационарного трехмерного уравнения (28) имеет свои трудности: явный алгоритм расчета (28) может приводить к вычислительным неустойчивостям, а неявный — требовать значительных затрат компьютерных ресурсов. Во-вторых, изменение температуры в полной задаче (1) определяется не только механизмом теплопроводности и решение уравнения (28) “отдельно” от других уравнений может приводить или к существенному снижению точности, или затягиванию процесса выхода на установление (при решении стационарных задач).

Эту проблему, естественно, снимает включение алгоритма решения (28) в общий алгоритм решения (5), (6), но при этом разрушается принцип сегментирования полной задачи на ряд подзадач с их максимально возможной независимостью решения, что приведет к снижению универсальности и расширяемости вычислительного комплекса.

Механизм передачи тепла излучением описывается следующими уравнениями. Тепловой поток \mathbf{q}_f определяется [3, 8, 15] решением системы

$$\nabla \mathbf{q}_f = \frac{c}{l} (U - U_0), \tag{29}$$

$$\nabla U = -\frac{3}{cl} \mathbf{q}_f, \tag{30}$$

где l — росселандов пробег (средняя длина пробега квантов излучения), c — скорость света ($3 \cdot 10^8$ м/с), $(U - U_0)$ — отклонение плотности энергии от равновесного, которое определяется по закону Стефана–Больцмана

$$U_0 = \beta T^4, \quad (31)$$

где постоянная Стефана–Больцмана $\beta = 7.56 \cdot 10^{-16}$ Дж · м⁻³К⁻⁴.

Система (29)–(31) путем специальных преобразований (рассмотрение их лежит вне рамок настоящей работы) может быть приведена к векторному уравнению Пуассона относительно \mathbf{q}_f

$$\Delta \mathbf{q}_f = \mathbf{f}(T), \quad (32)$$

решение которого требует значительных вычислительных ресурсов. В некоторых случаях при решении ряда задач достаточно ограничиться равновесным приближением (29)

$$\nabla \mathbf{q}_f = -\frac{c}{l} U_0, \quad (33)$$

позволяющим избежать решения (32).

Диффузионное приближение (29)–(31), формально справедливое для моделирования излучения при небольших градиентах U , достаточно хорошо описывает широкий спектр задач космической газодинамики.

Используя формализм классической термодинамики, можно получить [8] уравнение состояния излучающего газа (имеется в виду только фотонный газ, без атомарной составляющей)

$$p_f = U/3, \quad (34)$$

где плотность энергии излучения U , определяемая из системы (29), (30) исключением \mathbf{q}_f , — аналог удельной внутренней энергии e в (10), p_f — давление излучения.

В равновесном случае, приложив закон Стефана–Больцмана (31) к уравнению состояния (34), можно представить давление излучения в виде функции температуры

$$p_f(T) = \beta T^4/3. \quad (35)$$

В общем (34) или частном (35) виде давление p_f должно быть учтено в общей системе уравнений (3)–(6). При этом существует альтернатива: ввести полное давление

$$p_\Sigma = p + p_f \quad (36)$$

как сумму газодинамического и фотонного давлений, с использованием p_Σ в левой части (5), или ввести p_f в правую часть (5) как одну из составляющих (\mathbf{F}_f) суммарного вектора ($\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{F}_f + \dots$)

$$\mathbf{F}_f = \rho \nabla p_f. \quad (37)$$

Подчеркнем, что p_Σ нельзя использовать в левой части (6), поскольку в этом уравнении баланса энергии (а не силового воздействия на среду) влияние излучения уже учтено через вектор-функцию \mathbf{q} .

Аналогично сказанному в предыдущем пункте, более целесообразным представляется использование (37), а не (36), как сохраняющим принцип независимости решения подзадач, составляющих полную задачу.

6. Гравитация. Гравитационное воздействие на газовую среду определяется двумя физическими механизмами — внешним источником тяготения и собственной самогравитацией газа:

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i, \quad (38)$$

где Φ_e , Φ_i , Φ — соответственно гравитационные потенциалы: внешнего источника, внутренний (газовой среды), суммарный.

Внешний источник тяготения может находиться как внутри, так и вне области моделирования (в последнем случае имеет место достаточно специфично поставленная задача). Обычно исследуются задачи в приближении “точечного” источника с размером L_e , существенно меньшим характерного размера задачи:

$$L_e \ll L. \quad (39)$$

В этом случае может быть использован ньютоновский потенциал

$$\Phi_e = -G \frac{M}{r}, \tag{40}$$

где M — масса источника тяготения, r — расстояние от него до элемента газовой среды, гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{м}^3 \text{кг}^{-1} \text{сек}^{-2}$.

Гравитационный потенциал $\Phi_i(x, y, z)$ газовой среды с распределенной массой, характеризующейся функцией плотности $\rho(x, y, z)$ в декартовой или иной системе координат, определяется (см. [6, 17, 26]) из решения уравнения Пуассона

$$\Delta \Phi_i = 4\pi G(\rho + \rho_0). \tag{41}$$

Величина ρ_0 в (41) позволяет учитывать так называемую “репульсивную” [31] силу — некоторый гравитационный “фон”, частично нейтрализующий поле газовой среды. Заметим, что в большинстве случаев принимается $\rho_0 = 0$, если при моделировании какой-либо галактической системы пренебрегается влиянием как других галактических систем, так и невидимой (темной) материи, учет влияния которой (несмотря на абсолютную неясность ее природы) начинает появляться в настоящее время в некоторых работах.

Гравитационная составляющая \mathbf{F}_g вектора внешних сил \mathbf{F} в системе уравнений (4)–(6) определяется гравитационным потенциалом (38):

$$\mathbf{F}_g = -\rho \nabla \Phi = -\rho \nabla (\Phi_e + \Phi_i). \tag{42}$$

При этом в (42) могут быть учтены по (40), (41) потенциалы Φ_e и Φ_i как по отдельности, так и вместе, что определяется физическим смыслом решаемой задачи.

Работа внешних сил (гравитационное трение) $\mathbf{v} \mathbf{F}_g$ вносит лишь небольшой вклад в общий баланс энергии (6), за исключением задач с очень большими градиентами плотности и ее величиной, что может привести к образованию высокоградиентных полей тяготения.

7. Метрика пространства. Всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства–времени, соответственно чему оно определяется метрическим тензором g_{ik} . То же самое относится и к неинерциальным системам отсчета, которые эквивалентны гравитационным полям (А. Эйнштейн, Общая теория относительности, 1916). При моделировании задач космической газодинамики может быть необходим учет искривления (неевклидовости) пространства при наличии сильных внешних полей тяготения или даже самогравитации газового облака, если его масса (плотность или размер) достаточно велика. Эти эффекты могут быть узко локализованы (“черные дыры”) и, соответственно, приводить к существенно неравномерным распределениям газодинамических параметров, в особенности для высокоскоростных течений газа, характеризующихся сложными динамическими картинами ударно-волновых структур.

Уравнения Эйлера классической газодинамики (3)–(6) не могут адекватно моделировать подобные процессы, поэтому следует их математическую запись привести к форме, содержащей метрический тензор.

Напомним некоторые формулы тензорного анализа, необходимые для записи уравнений Эйлера в произвольной ортогональной системе координат риманова пространства.

Определим формы записи скалярных, векторных и тензорных величин при переходе от исходной

$$\xi^i = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \tag{43}$$

к другой системе координат

$$x^k = (x^1, x^2, \dots, x^n), \tag{44}$$

где n — размерность пространства.

Риманово пространство (44) определено, если в нем задан абсолютный ковариантный тензор второго ранга с компонентами $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ — метрический тензор

$$g_{ik} = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \tag{45}$$

и ассоциированный метрический тензор — контравариантный тензор второго ранга, компоненты g^{ik} которого определяются соотношениями

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{46}$$

Здесь и далее, если не оговаривается особо, производится суммирование по повторяющимся индексам (от 1 до n) и индекс k в производных вида $\frac{\partial a^i}{\partial x^k}$ считается нижним.

Скалярные величины, очевидно, сохраняют свой вид в любой системе координат. Одна и та же векторная величина \mathbf{A} может быть представлена как в контра-, так и в ковариантных компонентах A^i или A_i , связь между которыми определяется метрическим тензором

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k. \quad (47)$$

Компоненты дифференциального вектор-оператора ∇ преобразуются как компоненты вектора

$$\nabla_k = \frac{D}{\partial x^k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \frac{D}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \nabla_i. \quad (48)$$

Выпишем операнды ∇ для скаляра и вектора. Вектор-градиент скалярной функции имеет вид

$$(\text{grad } p)_i = \nabla_i p = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial p}{\partial x^i}. \quad (49)$$

В (49) суммирование по i отсутствует. Кроме того, для краткости записи в (49) принимается условие ортогональности системы координат

$$g_{ik} = 0, \quad \text{если } i \neq k, \quad (50)$$

поскольку использование неортогональных систем при численном моделировании требует очень больших затрат компьютерных ресурсов.

Физические компоненты вектора скорости \mathbf{v} , равные проекциям \mathbf{v} на касательные к координатным линиям, представляются выражением

$$u^i = v^i \sqrt{g_{ii}}. \quad (51)$$

Полная производная вектора \mathbf{v} по времени, выраженная через оператор ∇ , имеет вид

$$\frac{dv^k}{dt} = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \nabla_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + 2v^k v^m \Gamma_{mk}^k + (v^k)^2 \Gamma_{kk}^k + (v^m)^2 \Gamma_{mm}^k. \quad (52)$$

В (52) суммирование по индексу k отсутствует, суммирование по индексу m производится от 1 до n , за исключением значения $m = k$. Символы Кристоффеля, использованные в (52), имеют вид

$$\Gamma_{km}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^s} \right). \quad (53)$$

В ортогональной системе координат (50) символы Кристоффеля существенно упрощаются (по всем индексам суммирования нет):

$$\Gamma_{km}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^m}, \quad (54)$$

$$\Gamma_{mm}^k = -\frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{mm}}{\partial x^k}, \quad (55)$$

$$\Gamma_{kk}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^k}, \quad (56)$$

$$\Gamma_{km}^i = 0 \quad \text{при } i \neq k, i \neq m, k \neq m. \quad (57)$$

Заметим, что из (54) следует

$$\Gamma_{km}^k = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^m} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m}, \quad (58)$$

где g — определитель матрицы g_{km} :

$$g = \det(g_{km}). \quad (59)$$

С учетом (48)–(59) выражение для дивергенции любого вектора можно записать (приводятся несколько эквивалентных форм) следующим образом:

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla_k v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + v^m \Gamma_{km}^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + \frac{v^m}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (v^k \sqrt{g})}{\partial x^k}. \quad (60)$$

Используя как промежуточное обозначение $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ и применив к нему операцию div , можно, с учетом (49) и (60), получить выражение для оператора Лапласа Δ от абсолютного скаляра Φ , который используется в уравнении Пуассона (41) для расчета самогравитации:

$$\text{div grad } \Phi \equiv \nabla^2 \Phi \equiv \Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{g} \frac{\Phi}{\partial x^k} \right).$$

Уравнения Эйлера в произвольной криволинейной системе координат можно получить, заменяя соответствующие члены в (3)–(5) их формами, приведенными выше.

Уравнение неразрывности (3) приобретает вид

$$\sqrt{g} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho v^k \sqrt{g}) = 0 \tag{61}$$

для исходных компонент вектора скорости v_k или для его физических (см. (51)) компонент u_k :

$$\sqrt{g} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\rho u^k \sqrt{\frac{g}{g_{kk}}} \right) = 0. \tag{62}$$

Аналогичный, только существенно более громоздкий вид, имеют уравнения движения и баланса энергии. Удобнее всего их последовательно “расписывать” с помощью пакета “Maple”.

Здесь формулы для уравнений движения, баланса энергии и замыкающие их соотношения (уравнения состояния, излучения и гравитации) не приводятся, поскольку даже при использовании символов Кристоффеля являются весьма громоздкими, а “расписанные до конца”, где должны быть оставлены только компоненты метрического тензора, имеют совершенно необозримый вид.

Задающий свойства риманова пространства метрический тензор g_{ik} может быть найден (в принципе; в реальности его вычисление требует как специального моделирования, так и существенных вычислительных затрат) из основных уравнений общей теории относительности (уравнений гравитационного поля) — уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik}, \tag{63}$$

где c — скорость света, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ — постоянная Эйнштейна, T_{ik} — тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле), R — скалярная кривизна пространства (инвариант), а тензор Риччи R_{ik} получен путем свертывания тензора кривизны пространства R_{jilm} :

$$R = g^{ik} R_{ik}; \quad R_{ik} = g^{jm} R_{jilm}; \tag{64}$$

$$R_{ikjm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^j} \right) + g_{np} (\Gamma_{kj}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{km}^n \Gamma_{ij}^p). \tag{65}$$

Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{ij} F_k^j + \frac{1}{4} F_{jm} F^{im} g_{ik} \right). \tag{66}$$

Тензор электромагнитного поля F_{ik} определяется завихренностью четырехпотенциального поля A_i :

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad A_i = (\phi, -\mathbf{A}),$$

составленного из скалярного ϕ и векторного \mathbf{A} потенциалов, которые связаны напряженностью электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей первой парой электродинамических уравнений Максвелла

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi.$$

Отметим некоторые особенности структуры уравнений Эйнштейна. Они представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно 10 компонент метрического тензора g_{ik} для четырехмерного риманова пространства (с учетом симметричности $g_{ik} = g_{ki}$). Начальные условия для этих уравнений должны включать начальные данные как для самих

величин, так и их первых производных по времени. Из физических соображений следует (по-видимому), что имеется восемь реальных начальных условий: распределение плотности материи и трех компонент ее скорости и четырех величин, характеризующих свободное, не связанное с материей, гравитационное поле (подробнее см., например, [32]). Неясность этого вопроса существенно затрудняет создание (хотя бы экспериментальное) программных комплексов, моделирующих задачи космической газодинамики, включающих в себя сегмент решения уравнений Эйнштейна. Поэтому в настоящее время при расчетах задач космической газодинамики иногда используется только приближение пространства Минковского, поскольку в этой модели нет необходимости расчета метрического тензора, так как он сразу определен.

Псевдоевклидово пространство Минковского характеризуется метрикой (обсуждение смысла пространства Минковского как некоторого физического пространства лежит вне рамок настоящей работы)

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = g_{ik}^M dx^i dx^k, \quad (67)$$

где $i, k \in [0, 3]$, t — время, x — координаты.

Его метрический тензор равен

$$g_{ik}^M = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

В четырехмерном пространстве Минковского тензор электромагнитного поля F_{ij} выражается через компоненты трехмерных векторов напряженности электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей и имеет вид

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Использование метрического тензора g_{ik}^M в эйлеровских уравнениях неразрывности (62), движения и энергии, которые здесь не приведены из-за их существенной громоздкости, производится следующим образом.

Во-первых, следует завершить преобразование уравнений Эйлера. Из-за традиционных представлений, например, в (62) оставлена производная по времени $\frac{\partial}{\partial t}$. В общей теории относительности четырехмерное риманово пространство включает в себя время как одну из координат x^i , $i \in [0, 3]$, а именно $x_0 = ct$. Во-вторых, специфика метрики (67), (68) требует замены в уравнениях (51), (58), (60) члена \sqrt{g} на $\sqrt{-g}$, поскольку определитель (59) отрицателен.

Одним из приближенных способов учета искривления пространства является использование метрики Шварцшильда для гравитационного поля центрально-симметричного изолированного тела

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2,$$

где $r_g = 2 \frac{GM}{c^2}$ — гравитационный радиус тела массой M , а (r, ϑ, φ) — сферическая система координат с началом в центре тяготения. Эта метрика на больших расстояниях r может быть приближенно записана в виде $ds^2 = ds_0^2 - \frac{r_g}{r} (dr^2 + c^2 dt^2)$, в которой второй член представляет собой малую поправку к галилеевой метрике ds_0^2 (67). Соответствующий ей метрический тензор есть

$$g_{ik}^S = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \frac{r_g}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \frac{r_g}{r} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Заметим, что результаты аналитических и численных работ по космической газодинамике, использующих метрику (68) или (69), носят даже не модельный, а скорее оценочный характер, однако являются первым шагом в нужном направлении.

Подчеркнем, что обсуждение проблем общей теории относительности ни в коей мере не является предметом данной работы; рассматриваются только возможные способы использования разработанных теоретических аспектов этой теории (в том или ином приближении) при создании специализированного программного сегмента вычислительного комплекса, опирающегося на возможности современной компьютерной техники для моделирования задач астрофизики.

8. Вычислительный алгоритм. Основным фактором, определяющим выбор или специальное построение вычислительного алгоритма, является физическая сущность моделируемых процессов. Ожидаемое решение задачи (наличие ударно-волновых структур, большие градиенты величин, физические неустойчивости) накладывает специфические требования к свойствам численного метода (устойчивость, точность, сходимость и т.п.) и реализующего его комплекса компьютерных программ (минимизация ресурсов, анализ большого потока информации при решении нестационарных пространственных задач). При этом желательно обеспечить “равномерную точность” моделирования этапов гносеологической цепочки “реальный физический процесс — физическая модель — математическая модель — численный метод — вычислительный алгоритм — компьютерная программа — анализ полученной информации”. Совершенно бессмысленным, на наш взгляд, является применение схем повышенного порядка точности для третьего и четвертого этапов моделирования, если его первый и второй этапы являются весьма приближенными (что естественно для пионерских исследований).

Для задач газовой динамики было показано (С.К. Годунов, 1959), что наличие сильных разрывов в области течения при их “сквозном” расчете понижает порядок точности любого дискретного алгоритма до первого. Несмотря на то, что это утверждение никем не оспаривается, с поразительным упорством продолжается “повальное” конструирование вычислительных алгоритмов “повышенного” порядка точности с искусственным демпфированием и даже подавлением осциллирования решений, называемое для приличия “высокочастотными фильтрами”: TVD-, ENO-, WENO-схемы и т.п. (см., например, поток статей в *J. Comput. Phys.*). Эти алгоритмы зачастую применяются не только для получения гладких решений (обоснованность их использования для таких задач не вызывает сомнений), но и для расчетов высокоскоростных течений реального газа с ударными волнами, с тангенциальными и контактными разрывами, зачастую неустойчивыми по своей физической природе. Изучая такие течения с помощью схем “высокого порядка точности”, часто натываются на эффекты неединственности численных решений как при вариации стартовых условий, так и параметров вычислительной сетки (см., например, [33]). Более подробно вопросы неединственности, бифуркации и гистерезиса численных решений задач газовой динамики исследованы в [34].

Гораздо более эффективным, на наш взгляд, является применение надежных алгоритмов с аппроксимацией первого порядка, а повышение точности общего решения задачи, наряду с увеличением точности моделирования на первых двух этапах, на этой стадии должно достигаться существенным увеличением узлов расчетной сетки и улучшением ее топологии, использованием технологий параллельного программирования и проведения вычислений на мультипроцессорных системах. Этот тезис высказан специально в полемической форме с достаточной степенью категоричности, чтобы лучше высветить позицию авторов по данному вопросу.

Для моделирования процессов в сегменте “газовая динамика” общего вычислительного комплекса нами использовался метод С.К. Годунова [35], дополненный некоторыми деталями программной реализации [36], обеспечивающий решение нестационарных пространственных уравнений Эйлера. Выбор этого метода был связан с тремя основными обстоятельствами. Во-первых, схема сконструирована на основе физической сущности решаемой задачи — распада разрыва с образованием четко детерминированных, физически ясных вариаций решения (две ударные волны, ударная волна и волна разрежения, две волны разрежения, истечение в вакуум). Этого нельзя сказать о большинстве алгоритмов, формально аппроксимирующих непрерывные дифференциальные уравнения их дискретными аналогами безотносительно физической сущности задачи. Далее, второй этап метода автоматически обеспечивает выполнение законов сохранения (в других алгоритмах требуются специальные приемы для этого и необходим контроль за их выполнением).

Во-вторых, этот метод допускает расширение круга решаемых задач (физико-химические процессы, излучение) без кардинальной перестройки всего алгоритма, а также прозрачный и естественный интерфейс с другими сегментами программного комплекса. Кроме того, он легко распараллеливается.

В третьих, опыт применения метода Годунова большим количеством вычислителей (ни один из методов вычислительной газовой динамики не применялся так широко и успешно в течение длительного периода почти в 50 лет, как этот) свидетельствует о его высоком потенциале, в том числе о применимости для моделирования задач космической газодинамики (см., например, [37], где модификация этого

метода использовалась для решения ультрарелятивистских уравнений Эйлера).

В процессе создания программного сегмента проводилась его верификация как на простых тестах (газодинамических задачах с известными аналитическими решениями), так и с решениями из специализированного банка данных [38], в котором содержатся решения идейно простых задач, которые, однако, являются камнем преткновения для многих алгоритмов. Это задачи Римана о распаде разрыва: в начальный момент времени вся расчетная область поделена на две подобласти, в каждой из которых значения газодинамических параметров различны. В зависимости от соотношения этих параметров возникают разные физические ситуации, некоторые из них весьма трудны для многих алгоритмов при получении “точных чисел”.

Приведем один из этих тестов, характеризующийся большим перепадом давления. В области $x \in [0, 1]$ в момент времени $t = 0$ слева от плоскости раздела подобластей $x = 0.5$ значение давления $p = 1000$, справа — $p = 0.01$. Значения плотности ρ , нормальной u_x и тангенциальной u_y и u_z компонент скорости одинаковы: $\rho = 1$, $u_x = -19.6$, $u_y = u_z = 0$. На рис. 2а, 2б, 2с, 2д показаны распределения соответственно u_x , e , p , ρ вдоль оси x при $t = 0.012$. Штриховые линии — вычислительные результаты, сплошные — аналитические решения.

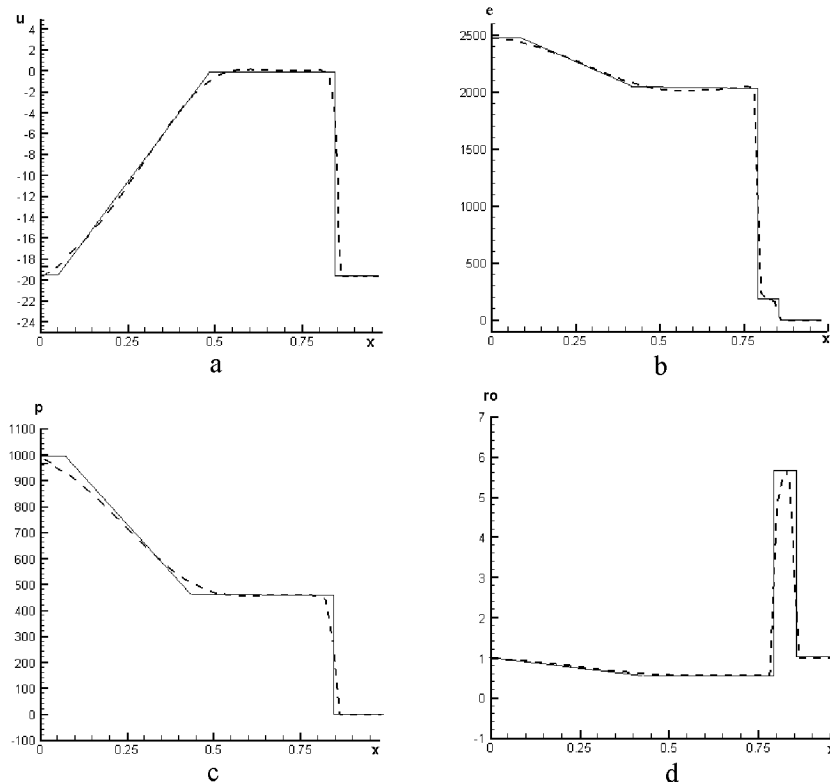


Рис. 2. Эволюция сильного разрыва $p_+/p_- = 10^5$ от позиции $x_0 = 0.5$ при $t = 0$ к моменту $t = 0.012$.

Аналитическое решение (сплошные линии) и численный расчет (штриховые линии): скорость (а), внутренняя энергия (б), давление (с) и плотность (д)

Несмотря на простоту постановки, это один из весьма трудных тестов для контроля качества численного алгоритма. Исходные распределения величин, вследствие формирования ударной волны, идущей направо, и волны разрежения, движущейся налево, и их взаимодействия с начальным полем, к этому моменту времени эволюционируют к следующим (обратим внимание только на две особенности, наиболее “тяжелые” для алгоритмов): плотность имеет узколокализованный “всплеск” высокой интенсивности $\rho_{\max} \approx 6$ (предел роста $\rho = 6$ на скачке $\frac{p_2}{p_1} = \infty$ для показателя адиабаты $\gamma = 1.4$), внутренняя энергия, помимо основного скачка, образует идущую перед ним волну — предвестник невысокой интенсивности. Тестируемый метод достаточно хорошо отслеживает эти особенности даже на использованной x -координатной сетке в 100 узлов.

9. Расчетная сетка. В качестве исходной системы (43) для (3) – (5) используется цилиндрическая система координат (ЦСК)

$$q^i = (r, \varphi, z), \quad r \in [0, r_{\max}], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [z_{\min}, z_{\max}]. \quad (70)$$

Следует сказать несколько слов о мотивации выбора (70). С одной стороны, на первый взгляд, естественно использовать для задач такого типа декартову систему координат (ДСК), не имеющую особенностей, в отличие от ЦСК, которая имеет особенность на луче $r = 0$. Или же выбрать сферическую систему координат (ССК), помещая ее центр, также являющийся сингулярной точкой, например, в центр поля тяготения, что удобно при расчетах задач о коллапсе газовых облаков или взрывах звезд.

Отметим, что использование систем координат, имеющих особенность (и она, как правило, дислоцируется внутри расчетной области), вызывает целый ряд проблем. Например, в ЦСК понятие координаты φ и, соответственно, компоненты скорости v_φ на оси $r = 0$ становится вообще неопределенным. Дифференциальная система уравнений содержит члены порядка $\frac{1}{r}$, т.е. имеет расходимость при $r = 0$, точнее, особенность типа $\frac{0}{0}$, и нет достаточной ясности, что с этим делать. Переход от непрерывной к дискретной задаче переводит эту проблему в другую плоскость — возникают вопросы о точности аппроксимации членов, содержащих множитель $\frac{1}{r}$, таких как $\frac{f}{r}$, и в особенности $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

Точность аппроксимации, ошибка которой формально записывается как $\delta \sim O(h^n)$, где n — порядок схемы, h — дискретный шаг сетки, фактически есть $\delta = kh^n$, где k — некоторый коэффициент, содержащий в себе множители, стоящие перед производными (точнее, их дискретными операндами), т.е. множитель $\frac{1}{r}$. Таким образом, несмотря на малость h , значение δ увеличивается с приближением к точке сингулярности, в ЦСК — к оси $r = 0$. При этом нарушается равномерность аппроксимации во всей расчетной области, делая, вообще говоря, дискуссионными все полученные численные результаты. Кроме того, в области сингулярности счет становится невозможным или не вполне определенным, зависящим от порядка выполнения операций (иногда — просто ошибочным) с позиций машинной арифметики. Поэтому существуют разнообразные способы обхода этих трудностей (см., например, [5, 6, 35, 39, 40]). Подчеркнем — обхода, а не устранения.

Однако, с другой стороны, многие задачи (образование Солнечной системы из газопылевого облака с небольшим отклонением наклона орбит основной массы планет от некоторой средней плоскости, дискообразные галактические системы спиралевидной структуры и т.п.) имеют геометрическую форму, близкую к цилиндрической. Соответствие форм моделируемой задачи и используемой в алгоритме координатной системы позволяет получать численные решения, более адекватные реальным физическим процессам.

В области (70) интегрирования системы уравнений (1) вводится дискретная расчетная сетка с числом узлов (N_r, N_φ, N_z) по соответствующим координатным направлениям. Эта сетка может быть как неподвижной (в общем случае — неравномерной), фиксированной от начала до конца проведения расчета, так и подвижной, адаптирующейся к получаемому решению.

Модульный принцип построения программного комплекса позволяет использовать различные типы генерации сеток, применяющихся в широком спектре задач газодинамики (см., например, [39]).

10. Шаг по времени. Выбор дискретного шага интегрирования системы дифференциальных уравнений (1) по времени представляет собой далеко не простую задачу.

Моделирование физического процесса обуславливает требование к временному шагу τ :

$$\tau < \tau_p, \quad (71)$$

где τ_p — характерное время процесса. Бесмысленно проводить расчеты без учета условия (71), поскольку в этом случае вычислительный алгоритм будет обеспечивать получение “своих собственных” решений, далеких от реальности.

Другим требованием к τ является фактор устойчивости алгоритма

$$\tau < \tau_a, \quad (72)$$

где τ_a — предельное значение шага, которое “выдерживает” алгоритм. Значение τ_a определяется множеством причин, которые здесь рассматриваться не будут (см. [5, 6, 35, 40]). Остановимся только на одном обстоятельстве. Известно, что неявные схемы допускают шаг τ_a^n , больший, чем шаг τ_a^n явных схем:

$$\tau_a^n < \tau_a^n. \quad (73)$$

Условие (73) считается одним из главных достоинств неявных схем по сравнению с явными, несмотря на их громоздкость, трудность программной реализации и, в сущности, отсутствие “физической прозрачности”. Это действительно так для большого класса задач аэродинамики, особенно для стационарных задач, решение которых производится методом установления.

Однако, если для исследуемого процесса имеет место условие

$$\tau_p < \tau_a, \quad (74)$$

а в задачах космической газодинамики, с наличием быстропротекающих процессов, даже

$$\tau_p < \tau_a^n, \quad (75)$$

то использование неявных схем для таких задач становится бессмысленным, так как отпадает их основное преимущество (73), поскольку требование (71) и условия (72)–(75) расставляют характерные времена в цепочку

$$\tau < \tau_p < \tau_a^n < \tau_a^m. \quad (76)$$

Условие (76) приводит к очень жестким ограничениям на τ и его очень малым значениям. Так, например, в [41] на графике одного из расчетов приводится номер шага по времени 36449. Это есть следствие трудностей решения сложных задач, развивающихся во времени.

Такая организация вычислительного процесса требует больших затрат машинного времени, поэтому следует более подробно остановиться на вопросе о выборе τ с позиций минимизации затрат ресурсов ЭВМ.

Рассмотрим три последовательных тезиса вычислителя. Первый: задача характеризуется быстропротекающими процессами — необходимо выбрать малое τ . Второй: интегрально процессы долго развиваются во времени, особый интерес представляет финальная картина — надо выбрать большое (относительно) τ . Третий: алгоритм допускает (и это апробировано на других, более простых задачах) определенные значения τ_a . Поскольку развитие нового вычислительного процесса неизвестно, обычно выбирают значения τ , несколько меньшие, чем апробированные. Так, при автоматизированном выборе τ по какому-либо критерию (например, [35]) уменьшают коэффициент пропорциональности в (72).

Такой эмпирический подход приводит к нескольким вариантам организации расчета. Первый: абсолютная минимизация τ — безотказный счет (нет отрицательных ρ , p , T) с большими затратами машинного времени. Второй: “оптимальный” выбор τ — компьютерный ресурс уменьшается существенно, но время от времени в некоторых сегментах расчетной области образуются отрицательные значения величин, физически только положительно определенных (ρ , p , T и др.). Переход на другой временной слой, определяемый как

$$U^{n+1} = U^n - \tau^n F^n > 0, \quad (77)$$

где U — некоторая физическая величина, F — фактор воздействия на нее (потoki через границы, массовые силы), требует уменьшения τ . Для этого расчет надо проводить заново или ограничить (77) некоторым физически осмысленным порогом, таким, как

$$\tilde{U}^{n+1} > 0. \quad (78)$$

Данный прием часто встречается в вычислительной практике. Например, в [6, 26] при расчете числа частиц при переходе (77) для (78) применялся подход “из ячейки нельзя вынести больше частиц, чем там находится”. Баланс массы при этом, естественно, соблюдался — соседние ячейки просто получали меньше частиц, чем “им полагалось”.

Однако такой прием есть нарушение однородности счета. Фактически это означает следующее: критерий (78) для (77) приводит к “пересчету” τ^n и вместо

$$\tau^n = \frac{U^n - U^{n+1}}{F^n} \quad (79)$$

реально используется

$$\tilde{\tau}^n = \frac{U^n - \tilde{U}}{F^n}, \quad (80)$$

где “пороговое” значение \tilde{U} выбирается по формулам (81) (ε — априорная константа):

$$\tilde{U} = \begin{cases} U^{n+1}, & \text{если } U^{n+1} > 0, \\ \varepsilon, & \text{если } U^{n+1} \leq 0. \end{cases} \quad (81)$$

Таким образом, “включение” пересчета (78) изменяет “течение времени” в локальной подобласти расчета. Совершенно неясно, как это скажется на результатах вычислительного процесса. Возможно — минимально, а возможно — произойдет переход на другую ветвь решения (см. ниже, п. “Начальные данные”).

Для автоматизации вычислительного комплекса, при полной неясности критериев выбора τ в целях обеспечения и эффективности, и безотказности счета, можно предложить схему типа “прогноз”.

Пусть на шаге n при значении $\tau^n = \tau_0^n$ от распределений U^n осуществляется переход к значениям U_0^{n+1} . В организации счета производится просмотр значений U_0^{n+1} во всей области, и если для него критерий (78) выполняется, то переход реализуется. В противном случае значение τ уменьшается

$$\tau_{i+1}^n = k \cdot \tau_i^n, \quad (k \text{ — эмпирический коэффициент}), \quad (82)$$

вновь производится расчет, определяются U_{i+1}^{n+1} и анализируются по (78). Снова принимается решение, проводить ли расчет вновь на слое n с еще изменившимся по (82) значением τ_{i+1}^n или окончательно перейти на $(n + 1)$ -й расчетный слой.

При таком механизме коррекции τ в процессе счета можно не только уменьшать, но и увеличивать τ , используя в (82) значения $k < 1$ или $k > 1$. Большим минусом такой вычислительной структуры является необходимость неоднократного счета на каждом шаге по времени (некоторые внутренние итерации). Заметим, однако, что процесс (82) может быть оптимизирован (метод Ньютона, секущих, деления отрезка пополам и т.п.), со сведением внутренних итераций до трех или четырех. Большим и весьма существенным плюсом этого вычислительного агрегата является значительное повышение безотказности, качества и надежности получаемых решений, расширяемость на другие классы задач без необходимости вновь отрабатывать вопросы выбора τ , а самое главное, — повышение универсальности вычислительного комплекса и легкости его использования другими исследователями, а также освобождение их от необходимости детального изучения алгоритмики и предоставление им возможности сосредоточиться на физической сущности решаемых задач.

11. Масштабирование. В качестве основных масштабов величин для записи интегрируемых уравнений в безразмерной форме выбраны характерные масса M_0 и размер L_0 , которые определяются сущностью конкретной задачи, а также гравитационная постоянная G . Масштабы остальных величин — времени t_0 , скорости V_0 , плотности ρ_0 , давления p_0 , удельной внутренней энергии e_0 , температуры T_0 , гравитационного потенциала Φ_0 — формируются из основных формул (R — газовая постоянная):

$$\begin{aligned} V_0 &= G^{1/2} M_0^{1/2} L_0^{-1/2}; & t_0 &= \frac{L_0}{V_0} = G^{-1/2} M_0^{-1/2} L_0^{3/2}; & e_0 &= \Phi_0 = V_0^2 = G M_0 L_0^{-1}; \\ \rho_0 &= \frac{\Phi_0}{4\pi G L_0^2} = \frac{1}{4\pi} M_0 L_0^{-3}; & p_0 &= \rho_0 V_0^2 = \frac{1}{4\pi} G M_0^2 L_0^{-4}; & T_0 &= \frac{p_0}{\rho_0 R} = \frac{1}{R} G M_0 L_0^{-1}. \end{aligned} \quad (83)$$

Масштабы (83) позволяют пересчитать, при необходимости, безразмерные параметры в размерные.

12. Граничные условия. Непрерывная дифференциальная задача (1) требует постановки определенных граничных условий, которым соответствуют граничные условия дискретного алгоритма. Эти граничные условия определяют во многом сущность решаемой задачи. Заметим, что способ их реализации, например порядок аппроксимации производных, также немаловажен (см., например, [40]).

В рассматриваемом классе задач космической газодинамики применялись два типа граничных условий — “свободные”, пропускающие проходящие на границу возмущения, и “отражающие” (иногда называемые “зеркальными”), не пропускающие их:

$$\mathbf{f}_G^+ = \mathbf{f}_G^-, \quad v_{nG}^+ = v_{nG}^-; \quad (84)$$

$$\mathbf{f}_G^+ = \mathbf{f}_G^-, \quad v_{nG}^+ = -v_{nG}^-. \quad (85)$$

В (84), (85) приняты следующие обозначения: G — граница расчетной области (70) $z = z_{\min}$, или $z = z_{\max}$, или $r = r_{\max}$; v_n — нормаль вектора скорости к этой границе; \mathbf{f} — все остальные (основные) искомые функции; знак “−” обозначает значение данной функции в ближайшем к границе узле расчетной области, знак “+”, соответственно, маркирует это значение в ближайшем к границе фиктивном узле вне расчетной области. Вычислительный алгоритм проводит расчет с “захватом” значений в слоях фиктивных узлов, окружающих расчетную область; этих слоев может быть один или два, в зависимости от требований конкретной дискретной схемы. Заметим, что уравнение Пуассона для вычисления гравитационного потенциала газового облака требует постановки своих граничных условий “на бесконечности”, поэтому для

его решения требуется значительное число слоев фиктивной сетки, к тому же с переменным интервалом между слоями, “разгоняющимися” от слоя к слою. Вопросы типа, что такое “дискретная бесконечность”, число слоев, интервалы их разгона, решаются только в численном эксперименте (подробнее см. [6, 26]).

Граничные условия (84) и (85) принципиально различаются между собой как в идейно-теоретическом смысле, так и в результатах численного расчета задач, даже очень близких в постановочном плане.

Условия (84) моделируют процессы, проходящие в некоторой подобласти “большого” пространства, причем все величины в этой подобласти изменяются с учетом этого обстоятельства. Контроль за соблюдением законов сохранения в расчетной области не имеет смысла, поскольку через границы происходит приток (или отток) массы, импульса, энергии. Это главный недостаток данной модели. Связанные с этим проблемы разбираются в только что вышедшей монографии [41], глава 4 которой представляет цикл работ по моделированию задач астрофизики [42, 43].

Условия (85) моделируют процессы в некотором “изолированном подпространстве”, представляющем собой некоторую “вырезанную” (или “отгороженную”) часть всего пространства, которое никак не влияет на процессы в расчетной области. Это главный недостаток данной модели, приводящий к следующему. Во-первых, через границы даже при постановке условий (85) возмущения проникают. Интенсивность этого проникновения определяется порядком аппроксимации дискретным алгоритмом непрерывной дифференциальной задачи, конкретным видом и уровнем возмущений, подходящих к границе, и это следует экспериментально проверить. Кроме того, процесс отражения возмущений от границы, как правило, носит осцилляторный характер и его высокочастотные моды могут сильно исказить численное решение, а низкочастотные — вообще его разрушить.

Таким образом, вопрос об альтернативном выборе (84), (85) не так прост, как его зачастую представляют. Разумеется, можно так ставить границу, например в области “глубокого вакуума”, и проводить расчет до подхода возмущений к этой границе; тогда постановка граничных условий будет “идеологически совершенной” и, кроме того, условия (84), (85) станут полностью эквивалентными. Однако при этом, во-первых, будут весьма нерационально использоваться компьютерные ресурсы (значительная часть расчетных узлов — в области вакуума). Этот способ априори отвергать не следует, поскольку он все-таки способен снять массу проблем, возникающих при расчете задач, близких к реальным. Во-вторых, расчет газодинамических течений как течений сплошной среды в вакууме наталкивается на камень преткновения как в идеологическом плане, так и в конкретной алгоритмической реализации.

Рассмотрим влияние вариации условий (84), (85) на численное решение одной из модельных задач. Формулировка задачи весьма проста: в начальный момент времени расчетная область (70) $z \in [-2, 2]$, $r \in [0, 4]$ заполнена покоящимся однородным газом с параметрами $\rho_0 = 1$; $p_0 = 1$. На газ действует гравитационное поле с вариацией его природы (38): самогравитация Φ_g или источник ньютоновского потенциала Φ_e в точке ($r_e = 0$, $z_e = 0$). Эффективная масса M_e , генерирующая ньютоновский потенциал $\Phi_e = -\frac{GM_e}{r}$, эквивалентна исходной массе газа $M_g = \pi r_{\max}^2 (z_{\max} - z_{\min}) \rho_0$, создающей поле самогравитации Φ_g .

На рис. 3 показаны распределения давления в газовом облаке в сечении плоскости $\varphi = \text{const}$ (состоящей из двух полуплоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$) в момент времени $t = 0.3$. Варианты расчетов: $\Phi_g \neq 0$, $\Phi_e = 0$ (рис. 3, а и б); $\Phi_g = 0$, $\Phi_e \neq 0$ (рис. 3, в и д), отражающие условия (рис. 3, а и в), свободные условия (рис. 3, б и д). Совместный анализ вариантов приводит к следующим заключениям.

Газовое облако коллапсирует с различной скоростью V_a , V_b , V_c и V_d (индексы соответствуют вариантам расчета), образуя конфигурации, весьма отличающиеся друг от друга. Главным фактором, влияющим на вид конфигурации облака, является тип гравитационного потенциала: Φ_e или Φ_g . Ньютоновский потенциал Φ_e формирует облако в форме диска (рис. 3, в, д), сплюснутого по оси z (вертикальная линия рисунка), потенциал самогравитации — облако овальной формы, наоборот, более вытянутого вдоль этой оси и приближающегося к шароиду (рис. 3, а, б). Заметим, что в другой плоскости (сечение $z = 0$) все коллапсирующие облака имеют круговую структуру (изолинии всех скалярных функций образуют окружности). Этот результат достаточно естественен и ожидаем, за исключением, конечно, числовых значений, которые до проведения расчетов предсказать аналитически невозможно (кроме варианта д, где в некотором приближении можно получить асимптотику). Данный результат имеет физическую природу: в исходном газовом облаке цилиндрической формы (это важно) происходит свободное перераспределение параметров ρ и p в соответствии с изоповерхностями гравитационного потенциала — шаровыми (неменяющимися во времени) Φ_e , и некоторыми динамически эволюционирующими специфическими формами Φ_g — вложенными друг в друга овалами, которые постепенно перестраиваются в шароиды, с наличием “центра тяготения” (находящимся вследствие исходной симметрии задачи в центре системы координат). При этом, естественно, ньютоновский потенциал формирует шароид быстрее, чем

самогравитация.

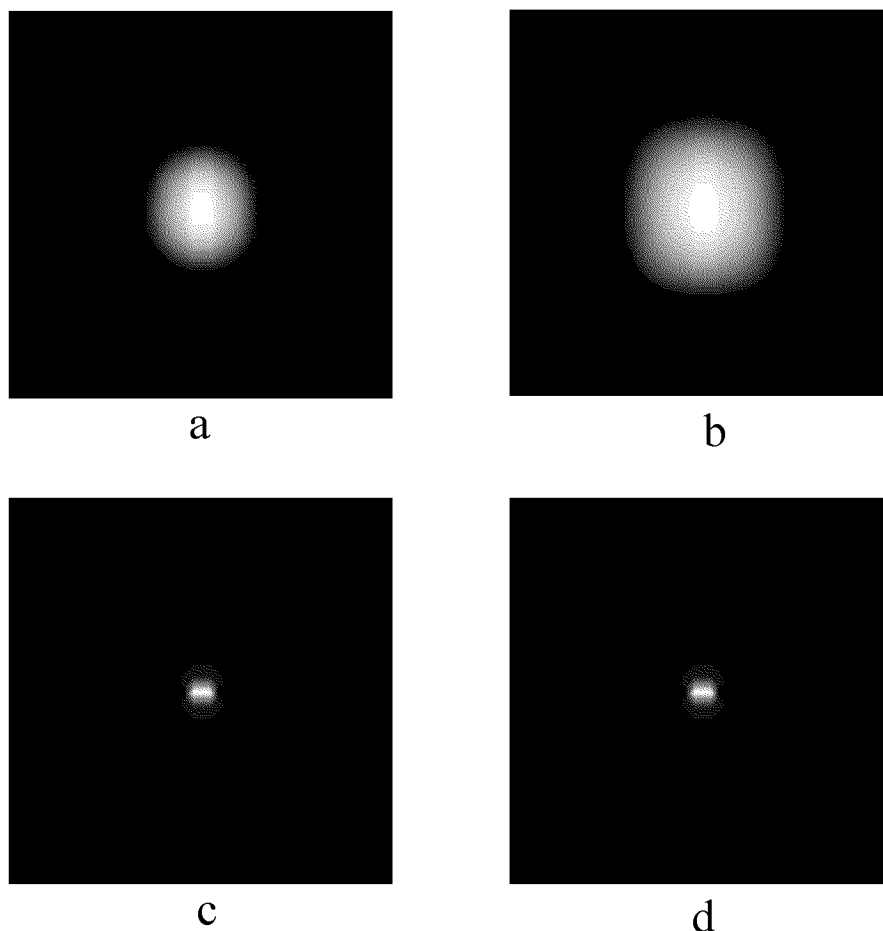


Рис. 3. Эволюция газового облака, равномерно распределенного при $t = 0$ к моменту $t = 2$ в поле самогравитации (a, b) и ньютоновского потенциала (c, d) при граничных условиях свободного протекания (a, c) и зеркального отражения (b, d)

Свободные условия (84) затрудняют формирование шароидов. Приток массы через границы определяется двумя факторами: их поверхностью и удаленностью от центра тяготения, которое опосредованно определяет локальную скорость перетекания газа в каждой точке границы. Боковая поверхность цилиндра $S_r = 2\pi r_{\max}(z_{\max} - z_{\min})$ с удалением $R_r = r_{\max}$; верхняя и нижняя поверхности цилиндра $S_z = 4\pi r_{\max}^2$ с удалением $R_z = z_{\max} = |z_{\min}|$. Соотношения между S_r , S_z , R_r и R_z , относящиеся к алгоритмике (исходному выбору расчетной области), могут существенно влиять на численные результаты моделирования, которые должны определяться только физическими процессами.

Подчеркнем еще одну особенность применения разных условий (84), (85). На первый взгляд кажется естественным априорный прогноз значений давления в центре облака $p_a < p_b$ (a и b — варианты расчета), поскольку неконтролируемый приток массы через границы должен увеличивать общую массу газа, соответственно должна увеличиваться гравитация, что должно привести к ускорению процесса коллапсирования с несколько большим увеличением давления в центре p_b , чем в процессе p_a . Однако результаты численных расчетов $p_a = 2.79$, $p_b = 1.64$ опровергают этот прогноз. Более детальный анализ процесса приводит к следующим выводам.

Приток массы через границы является фактором, замедляющим коллапсирование, если учитывать только самогравитацию. Изоповерхности гравитационного потенциала Φ “стягиваются” друг к другу более плотно в случае (85), чем в (84) именно из-за отсутствия потока массы, “приклеивающей” часть изоповерхностей к границам. Коллапс же определяется $\nabla\Phi$, увеличение которого ускоряет движение газовых струй к центру (т.е. $V_a > V_b$ при $\nabla\Phi_a > \nabla\Phi_b$), несмотря на меньшие значения собственно потенциалов Φ ($\Phi_a < \Phi_b$), поскольку Φ определяется общей массой газа M . Таким образом, несмотря на то, что к моменту окончания расчета $M_a < M_b$, имеет место $p_a > p_b$ и средний размер сжатого облака

$D_a < D_b$.

Моделирование с ньютоновским потенциалом дает иную программу коллапса. Значения гравитирующих (не газовых) масс $M_c = M_d$ не меняются, также являются фиксированными значения потенциалов $\Phi_c = \Phi_d$ и их градиентов $\nabla\Phi_c = \nabla\Phi_d$. Градиент потенциала настолько велик, что газ очень скоро “отрывается” от границ, и его приток через границу очень быстро уменьшается вследствие быстрого стремления ρ в (84) к нулю; через короткий промежуток времени условия (84), (85) становятся фактически эквивалентными. Кроме того, в физическом процессе становится менее заметной его гидродинамическая составляющая, когда сжимающему фактору гравитации противодействует внутреннее давление газа. Соответственно является малозначимым, куда этот газ стремится расшириться — в окружающую среду (приток массы) или в пустоту (нет притока массы).

Поэтому имеют место процессы коллапсирования с $V_c \rightarrow V_d$, и, соответственно, образуются практически одинаковые конфигурации газовых облаков (рис. 3, с и d) с максимальными практически равными значениями давлений в их центрах $p_c \approx p_d = 8.68$.

Таким образом, при постановке граничных условий с выбором между (84) и (85) следует ориентироваться на физическую сущность решаемой задачи.

Сделаем еще несколько замечаний по вопросам постановки граничных условий.

Свободные условия, фактически выражающие гладкость решения, могут, помимо (84), допускать и другие виды записи, т.е. аппроксимацию первых или вторых производных с тем или иным порядком точности, что в алгоритмическом дискретном смысле означает перенос во внешние (фиктивные) узлы сетки значений из одного, двух, трех и т.д. рядов внутренних узлов. Это позволяет минимизировать возмущающее действие границ в каждом конкретном случае (подробнее см. [40]).

Зеркальные граничные условия (85) детерминированы более жестко и не допускают вариаций. Детерминированы также, естественно, и “фоновые” условия $f_G^+ = f_\infty$.

Еще одним типом постановки граничных условий являются “активные” условия

$$f_G^+ = F(t, G), \quad (86)$$

где функция $F(t, G)$ означает непрерывное изменение по времени значений в каждой точке границы. Применение (86) вызывается двумя типами организации расчета.

Во-первых, необходимость провести более детальный расчет процессов в какой-либо подобласти решения, если нет возможности увеличить расчетную сетку. По результатам решения задачи во всей области на “грубой” сетке часть пространства “вырезается” и на ее границах фиксируются условия (86), уже полученные в расчете. Затем эта подобласть триангулируется более “мелкой” сеткой, иногда с весьма большим числом узлов, граничные условия переинтерполируются с сетки на сетку и запускается вычислительный алгоритм. Такой метод требует очень тщательной организации расчета для адекватности полученного фактически решения “реальному”, которое было бы получено “сразу” на мелкой сетке (при наличии такой возможности).

Во-вторых, условия (86) применяются в новых компьютерных технологиях параллельного счета, когда вся область “нарезается” на ряд подобластей — сегментов. В каждом сегменте расчет производится независимо своим индивидуальным процессором. После завершения каждого шага по времени соседние сегменты обмениваются данными, используемыми как граничные для “сшивки” решений. Подробнее об этом см. [25–28].

13. Начальные данные. Постановка начальных данных нелинейной дифференциальной задачи, несмотря на некоторую, порой даже чрезмерную недооценку этого вопроса, представляет собой весьма сложную комплексную проблему, связанную с возможностью существования неединственности решения или вообще его отсутствия. Дополнительные трудности в эту проблему вносит переход от непрерывной дифференциальной задачи и ее начальных данных (НД) к дискретному вычислительному алгоритму, где этим НД соответствуют некоторые стартовые условия (СУ). И хотя зачастую, может быть даже неосознанно, между понятиями НД и СУ ставят знак тождества, они являются существенно различными и в идейном плане, и в их конкретной реализации.

Напомним, что в области аэродинамики существует, например, задача о натекании на клин сверхзвукового потока, имеющая двойное решение. Это решение обусловлено уравнением второй степени для одного из главных параметров задачи (в [44] показано, что при учете физико-химических превращений в газе это уравнение имеет пятый порядок с соответствующими последствиями). При изучении взаимодействия ударных волн в классической газодинамике получены два разных типа их отражения друг от друга, причем диапазоны их существования перекрываются, т.е. при некоторых одних и тех же значениях параметров могут возникать как одна ударно-волновая структура, так и другая. Какая из них

возникает в натурном эксперименте? Какая — в вычислительном?

Эти примеры представляют стационарные задачи, существенно более простые, чем нестационарные, хотя и для них “нет и, по-видимому, не будут доказаны теоремы существования” [45] (авторы данной статьи разделяют эту точку зрения). Для задач космической газодинамики с их существенно более сложной физикой эти проблемы приобретают особое значение. Заметим, что переход от непрерывности к дискретности эти проблемы теоретически еще более усугубляет (для нелинейных задач нет даже строгих доказательств аппроксимируемости).

В вычислительных экспериментах неединственность получаемых решений может быть “классифицирована” по трем основным типам (подробнее см. [34]). Первый тип — неединственность “по дискретным сеткам”, самый известный тип (разные сетки — разные решения). Контроль осуществляется мельчением сетки до достижения “насыщения”, если “насыщение” наступает. При этом априори нельзя утверждать, что на мелких сетках обеспечивается более качественное решение. Второй тип — неединственность по разным алгоритмам (разные алгоритмы — разные решения). В сложных ситуациях и при отсутствии достоверных данных физического эксперимента, ненадежности перехода к физической и математической моделям в гносиологической цепочке моделирования нет возможности определить “более качественный алгоритм” (см., например [34, 46]).

Наконец, третий тип — неединственность по стартовым условиям алгоритма. Поскольку этому уделяется очень мало внимания, проанализируем данный вопрос несколько подробнее.

Рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения $x = F(x)$ методом последовательных приближений $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 1, 2, \dots, N, \dots$. Заметим, что здесь речь не идет о качестве этого метода и альтернативах ему (этот метод легко анализируем, чего нельзя сказать о методах решения нестационарных пространственных уравнений Эйлера). Возьмем простой пример — уравнение

$$x = x^2. \tag{87}$$

В классе неотрицательных значений $x \in [0, \infty)$ уравнение (87) имеет два решения:

$$X1 = 0, \tag{88}$$

$$X2 = 1. \tag{89}$$

Непрерывному уравнению (87) соответствует дискретный алгоритм

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \dots \tag{90}$$

с некоторым стартовым условием

$$x_1 = X0. \tag{91}$$

Рассмотрим влияние вариации значения $X0$ на получаемое решение. При выборе $X0 > 1$ траектория продвижения расчета по (90) приводит к неограниченному возрастанию амплитуды решения, т.е. алгоритм обеспечивает получение дискретного решения (символическая запись)

$$X_d^a = \infty. \tag{92}$$

При выборе $X0 < 1$ траектория продвижения расчета при $n \rightarrow \infty$ приведет к решению (88)

$$X_d^b = 0, \tag{93}$$

и только при $X0 = 1$ будет обеспечено получение решения (89)

$$X_d^c = 1. \tag{94}$$

Таким образом, X_d^a и X_d^b являются обычными аттракторами дискретного алгоритма (90) для непрерывной задачи (87) с бассейнами притяжения соответственно $X0^a \in (1, \infty)$, $X0^b \in [0, 1)$, а X_d^c — странным аттрактором с бассейном притяжения, вырождающимся в точку $X0^c \in [1, 1]$. Следовательно, выбор стартового условия в области допустимых значений $X0 \in [0, \infty)$ в том или ином бассейне притяжения приводит к различным траекториям продвижения расчета и к получению различных финальных значений.

Небольшая, “непринципиальная” переформулировка непрерывной задачи (87) на задачу

$$x = \sqrt{x} \tag{95}$$

(которая имеет те же решения (88), (89)) приведет к существенной реорганизации траекторий расчета, “передела” бассейнов притяжения для аттракторов. В области допустимых значений $X_0 \in [0, \infty)$ будут иметь место один обычный аттрактор $X_d^a = 1$, соответствующий решению (94), с бассейном притяжения $X_0^a \in (0, \infty)$, и один странный аттрактор $X_d^b = 0$, соответствующий решению (93), с бассейном притяжения, вырождающимся в точку $X_0^b \in [0, 0]$.

Этот простой пример показывает важность выбора начального условия алгоритма даже для элементарной задачи: алгоритм может обеспечить получение решения при использовании адекватных начальных данных или привести к “уходу” вычислительного процесса на ветвь решений, не отражающих сущность моделируемого процесса. Тем более в задачах астрофизики, с их сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений и аппроксимирующими их вычислительными алгоритмами, опирающимися на решение больших систем алгебраических уравнений, весьма важен выбор начальных приближений, адекватно отражающих физические реалии. Иначе старт вычислительного расчета и его продвижение по “своей” траектории, особенно при наличии возможных точек бифуркации, может привести к получению результатов на другой, нежели ожидаемая, ветви решения. В частности, нельзя ожидать стационарного или слабоосциллирующего периодического или аperiodического квазистационарного решения, получаемого методом установления, при неадекватном выборе начального условия (подробнее см. [47]).

Рассмотрим один из примеров численного решения в области астрофизической газодинамики. Пусть имеется гравитационный центр ньютоновского типа $\Phi = -\frac{GM}{r}$. Требуется организовать проведение расчета эволюции в этом поле вращающегося вокруг центра тяготения газового кольца с целью получения стационарной картины.

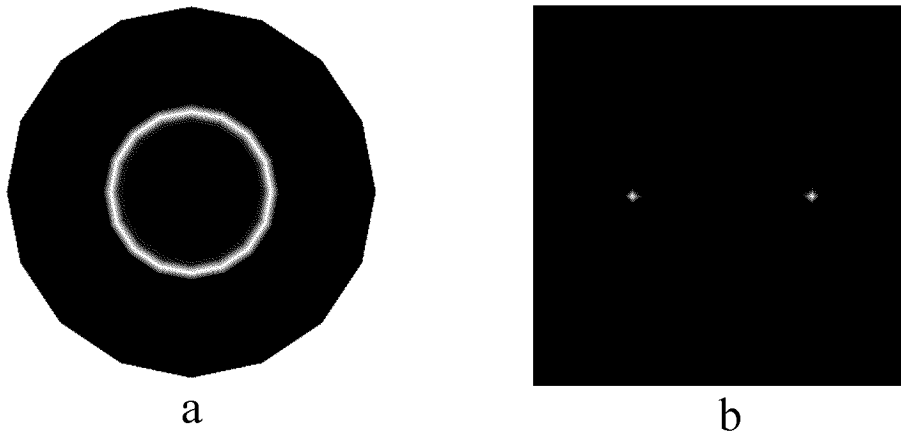


Рис. 4. Эволюция газового кольца, вращавшегося в момент $t = 0$ на стационарной орбите радиуса R_s в ньютоновском поле тяготения $\Phi = -\frac{GM}{r}$ с угловой скоростью $\omega = \omega_s$ ($\omega_s^2 R_s^3 = GM$) к моменту $t = 1.2$: экваториальное сечение $z = 0$ (а) и продольное сечение $\varphi = \text{const}$ (б)

Условие стационарности движения по орбите радиуса R_s с угловой скоростью ω_s есть, очевидно, $\omega_s^2 R_s^3 = GM$. На рис. 4, а и б показана картина (изолинии плотности газа) эволюции к моменту времени $t = 1.2$ газового кольца, находившегося при $t = 0$ на стационарной орбите $R_s = 1$ (радиус и высота расчетной области равны 2) и вращавшегося с угловой скоростью ω_s , удовлетворяющей условию стационарности. Плоскость орбиты лежит в плоскости $z = 0$ (рис. 4, а).

Толщина газового кольца (по r и z) выбрана минимально возможной при дискретизации задачи — всего один расчетный узел. На рис. 4, б показано сечение этого кольца, точнее, газового шнура, плоскостью $\varphi = \text{const}$ ($\varphi = 0 \wedge \varphi = \pi$). Длина окружности, образованной газовым шнуром, при $t = 0$ равнялась, естественно, $2\pi R_s$. Здесь специально используется термин “шнур”, а не математическое понятие объемной фигуры, например, тор (тороидальное кольцо), поскольку дискретизация задачи делает не вполне корректной всю терминологию непрерывной задачи.

Минимально возможная толщина газового шнура выбрана при моделировании этого процесса для анализа нескольких эффектов, принадлежащих как физическим реальностям, так и проявлениям специфики вычислительного алгоритма, и минимизация газовой массы и ее поперечного размера должна

выявить эти особенности наиболее отчетливо.

К физике процесса относится следующая подзадача (данной задачи). Газовое кольцо вращается в неподвижной газовой среде очень малой плотности ρ_∞ ($\rho_s/\rho_\infty \sim 10^5$), моделирующей околопланетный фон. Поле тяготения будет собирать газ из этого фона в центре (цветная картина на мониторе компьютера это хорошо передает в виде яркой точки в центре; на черно-белой картине эта точка, к сожалению теряется — видны лишь две точки сечения шнура на рис. 4, b). Возникает вопрос — как влияет процесс движения этого фона к центру на потерю момента импульса газовым шнуром и, соответственно, каков по интенсивности будет процесс “схода с орбиты” части газа и его аккрецию на гравитационный центр?

С одной стороны, из-за тонкости сечения шнура сечение σ_s захвата им части фона, двигающегося со скоростью v'_∞ из периферии к центру, также мало (помимо малости ρ_∞). Однако с течением времени эти процессы могут сказаться — переток фона через шнур $\delta_m \approx \int \rho_\infty v'_\infty \sigma_s dt$ в течение длительного времени способен “вынести” заметную часть момента импульса из кольца.

С другой стороны, имеет место и алгоритмическая составляющая этого процесса. Это явление, называемое обычно общим термином “схемная диссипация”, достаточно трудно формализовать математически. Обычные оценки $O(\tau, h_z, h_r, h_\varphi)$ фактически имеют мало общего с численными реалиями, в особенности для нелинейных задач. Оценки, полученные в вычислительных экспериментах на одномерных задачах, дающие определенную информацию (“завалы” крутизны сильных разрывов — ударных волн, размывание слабых контактных и тангенциальных разрывов, дисбалансы массы-импульса-энергии и т.п.), как правило, плохо распространяются на трехмерные нестационарные задачи.

Представленный численный эксперимент показал следующее. К моменту времени $t_s = 1.2$ (1200 шагов по времени) шнур, оставаясь на прежней стационарной орбите $R(t_s) = R_0 (= R_s)$, потерял 3 % своей массы $\rho(t_s) = 0.97\rho_0$ и 0.02 % угловой скорости. Граница разрыва между шнуром и фоном по всем газодинамическим параметрам (плотности, давлению, температуре, угловой скорости), как и при $t = 0$, очень крутая, “шириной” в один расчетный узел.

Далее было проведено моделирование этого процесса с другими начальными данными — стартовыми условиями вычислительного алгоритма. На рис. 5 представлена эволюция к моменту $t = 1.2$ газовых шнуров, находящихся при $t = 0$ на стационарной орбите, R_s , но с угловыми скоростями: а) $\omega_0 = \frac{1}{3}\omega_s$; б) $\omega_0 = 3\omega_s$. Все остальные параметры такие же, как при моделировании предыдущей задачи, показанной на рис. 4.

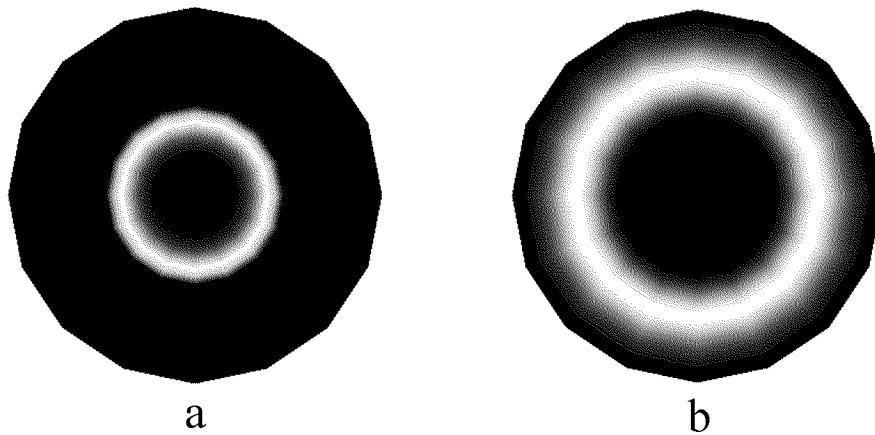


Рис. 5. Эволюция газового кольца, вращавшегося в момент $t = 0$ на стационарной орбите радиуса R_s в ньютоновском поле тяготения $\Phi = -\frac{GM}{r}$ с угловой скоростью а) $\omega = \frac{\omega_s}{3}$ и б) $\omega = 3\omega_s$ ($\omega_s^2 R_s^3 = GM$) к моменту $t = 1.2$ в экваториальном сечении $z = 0$

В случае “а” центробежная сила газового шнура недостаточна для компенсации силы притяжения. Происходит сход со стационарной орбиты. Элементы газового кольца двигаются по спиральным траекториям к центру, при этом интегрированно сохраняется форма шнура как тороидальной окружности (изолинии плотности представляются окружностями с высокой степенью точности). Шнур “размывается”: внутренний и внешний радиусы его тороидального кольца R_- и R_+ могут быть определены как

$(0.85 \mp 0.15)R_s$ соответственно, т.е. средний диаметр сечения тора $d = R_+ - R_-$ становится равным $0.3R_s$. Поперечное сечение тора приобретает эллипсоидальную форму, сжатую вдоль оси z ($\varepsilon = d_z/d_r \approx 0.4$).

Плотность на центральной оси тора уменьшается до значений $\frac{\rho(t_s)}{\rho_0} = 0.377$.

В случае “b” центробежная сила превышает силу тяготения — элементы газового кольца двигаются по спиральным траекториям от центра. При этом так же, как и в предыдущем варианте, интегрально сохраняется форма шнура как тороидальной окружности со средним радиусом $R = 1.3R_s$. Шнур “размывается” значительно сильнее — его поперечник в радиальном (к центру тяготения) направлении составляет $d = R_+ - R_- = (1.3 \pm 0.3)R_s$ при степени сплюснутости $\varepsilon = 0.25$. Плотность на центральной оси тора уменьшается до $\frac{\rho(t_s)}{\rho_0} = 0.077$.

Полученные результаты хорошо коррелируют с физическими представлениями о протекающем процессе. Однако, анализируя вопросы, поставленные в начале этого пункта о влиянии стартовых условий на финальное решение, следует понимать, что в описанных выше результатах (рис. 5) имеют место такие ветви вычислительного процесса, которые никогда не приведут к получению стационарного решения при таких начальных данных.

Физическая ясность этой простой задачи позволяет проанализировать результат априори, до проведения вычислений. Но в большинстве практически интересных задач со сложной конфигурацией (несколько центров тяготения, самогравитирующий газ и т.д.) “неудачная” постановка стартовых условий не приведет к получению желаемого результата. При этом главная проблема заключается в том, что для сложной задачи неизвестны, как правило, “удачные” начальные данные.

14. Взрыв сверхновой. В качестве демонстрации некоторых возможностей созданного комплекса вычислительных программ рассмотрим задачу о разлете вращающегося сгустка газа шарообразной формы, в центре которого находится источник гравитационного поля. Эта задача моделирует (в некотором приближении) одну из астрофизических проблем [1] — проблему взрыва сверхновых звезд и динамику процессов, происходящих в начальный период разлета вещества.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что рассматриваемое ниже решение задачи носит иллюстративный характер, в постановке вычислительного эксперимента не учитываются многие факторы (физические — особенности образования нейтриносферы и лептонной конвекции в процессах переноса и т.п., термодинамические — неравновесность и резкое отклонение уравнения состояния от идеального при сверхвысоких температурах и давлениях, гравитационные — искривление пространства в поле тяготения [48], тем более — без анализа возможного участия в процессе темной материи [1]), без учета которых сравнения результатов наблюдательного и математического экспериментов будут неадекватными, в некоторых случаях — весьма существенно.

Численный расчет был организован следующим образом. Дискретная сетка: цилиндрическая система координат в области $(z, r, \varphi) = ([-4, 4]; [0, 4]; [0, 2\pi])$, число узлов $(N_z, N_r, N_\varphi) = (51, 25, 17)$ с равномерными интервалами.

Начальные данные. В подобласти $R \in [0, R_s]$, $R_s = 1$, где сферический радиус $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, дислоцирована гравитационная масса (шар) вещества.

Распределение плотности газа в шаре соответствует условию гравитационно-газодинамического равновесия

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (96)$$

Если ограничиться рассмотрением ньютоновского потенциала

$$\Phi = -G \frac{M_N}{R} \quad (97)$$

(где M_N — масса, генерирующая этот потенциал) и условием изотермичности газа

$$T = T_s = \text{const}, \quad (98)$$

то, используя уравнение состояния газа

$$p = \mathfrak{R} \rho T, \quad (99)$$

из (96) с учетом (97)–(99) можно получить условие равновесия в виде

$$\mathfrak{R} T_s \frac{\partial \rho}{\partial R} = -G M_N \frac{\partial \rho}{R^2}, \quad (100)$$

которое интегрируется в квадратурах

$$\rho(R) = \rho_* e^{\alpha/R}, \tag{101}$$

где $\alpha = \frac{GM_N}{\mathfrak{R}T_s}$, ρ_* — константа интегрирования. Значение ρ_* физически осмысленно можно получить следующим образом.

Масса газа в шаре есть

$$M_s = 4\pi \int_0^{R_s} \rho(R) R^2 dR. \tag{102}$$

Подставляя (101) в (102) и делая замену переменной $x = \frac{1}{R}$, можно получить

$$M_s = -4\pi\rho_* \int \frac{e^{\alpha x}}{x^4} dx. \tag{103}$$

Интеграл (103) выражается в виде ряда, удерживая в котором только старший член, имеем

$$M_s = \frac{4}{3} \pi R_s^3 \rho_*^{\alpha/R_s}. \tag{104}$$

Для определения ρ_* можно положить равенство газовой и гравитирующей масс

$$M_s = M_N. \tag{105}$$

Тогда из (105) с учетом (104) имеем

$$\rho_* = \frac{3M_N}{4\pi R_s^3} e^{-\alpha/R_s}. \tag{106}$$

Распределения плотности (101) с коэффициентом (106) и давления, определяемого по (99) с условием (98), выбираются в качестве начальных данных внутри подобласти $r_{c\phi} \leq R_s$. Компоненты скорости принимаются следующими: газовый шар вращается вокруг оси, направление которой совпадает с z -осью системы координат, с постоянной угловой скоростью ω_s ; тогда

$$v_z = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi(r) = \omega_s r. \tag{107}$$

Вне шара принимаются следующие начальные данные: компоненты скорости $v_z = v_r = v_\varphi = 0$, температура $T = 10^{-2} T_s$ постоянна, плотность падает от границы шара в окружающее пространство в соответствии с диффузионным приближением $\rho(R) = \rho_s e^{-\beta(R-R_s)}$, где эмпирический коэффициент β обеспечивает падение плотности к границам расчетной области на два порядка.

Таким образом, имеют место следующие факторы, действующие на газовую среду: гравитация, стягивающая газ к центру, давление и центробежная сила, вызывающие движение газа к периферии.

На рис. 6, 7 показана эволюция газового сгустка от начального $t = 0$ (левые колонки) к моментам времени $t = 0.5$ (центральные колонки) и $t = 1$ (правые колонки). Приведены распределения газодинамических величин ρ , p , T , v_r , v_φ в экваториальном сечении $z = 0$ (рис. 6) и сечении $\varphi = \text{const}$, перпендикулярном к экваториальному (рис. 7). К сожалению, одноцветная гамма рисунков существенно менее информативна, чем их цветных оригиналов, а нанесение линий уровня ухудшает восприятие графической информации. Однако целью данной работы является общее описание вычислительного комплекса, а не представление детальных результатов расчетов, где весьма целесообразен подробный анализ числовых таблиц и 1D-, 2D- и 3D-графиков. Поэтому ниже будет дано лишь беглое описание решения поставленной задачи с указанием основных особенностей динамики протекающих процессов. При анализе графиков вынужденно следует ориентироваться на оттенки бело-серо-черного цвета.

На левых колонках рис. 6, 7 показаны начальные распределения величин. Наиболее отчетливо газовый шар виден на изображениях температуры (однородная сфера $T = 0.6667$ на фоне $T_\infty = 0.6667 \cdot 10^{-2}$) и тангенциальной скорости $v_\varphi = \omega_s \cdot R$, меняющейся от 1 на границе шара до 0 в окрестности его центра (в самом центре v_φ не определено и при графическом построении принимается равным нулю).

Плотность, имея максимум в центре шара 35.4, убывает по экспоненте (107) к его поверхности до 0.238 и далее спадает по диффузионному приближению до 0.01. Графическая система TecPlot такое распределение интерпретирует в серой гамме как белую точку в центре.

Аналогично и графическое представление давления, которое спадает по экспоненте от 15.7 в центре до 0.106 на границе шара, и далее отслеживает (по уравнению состояния) изменение ρ и постоянство T , убывая от $8 \cdot 10^{-4}$ вблизи шара до $5 \cdot 10^{-5}$ на периферии области.

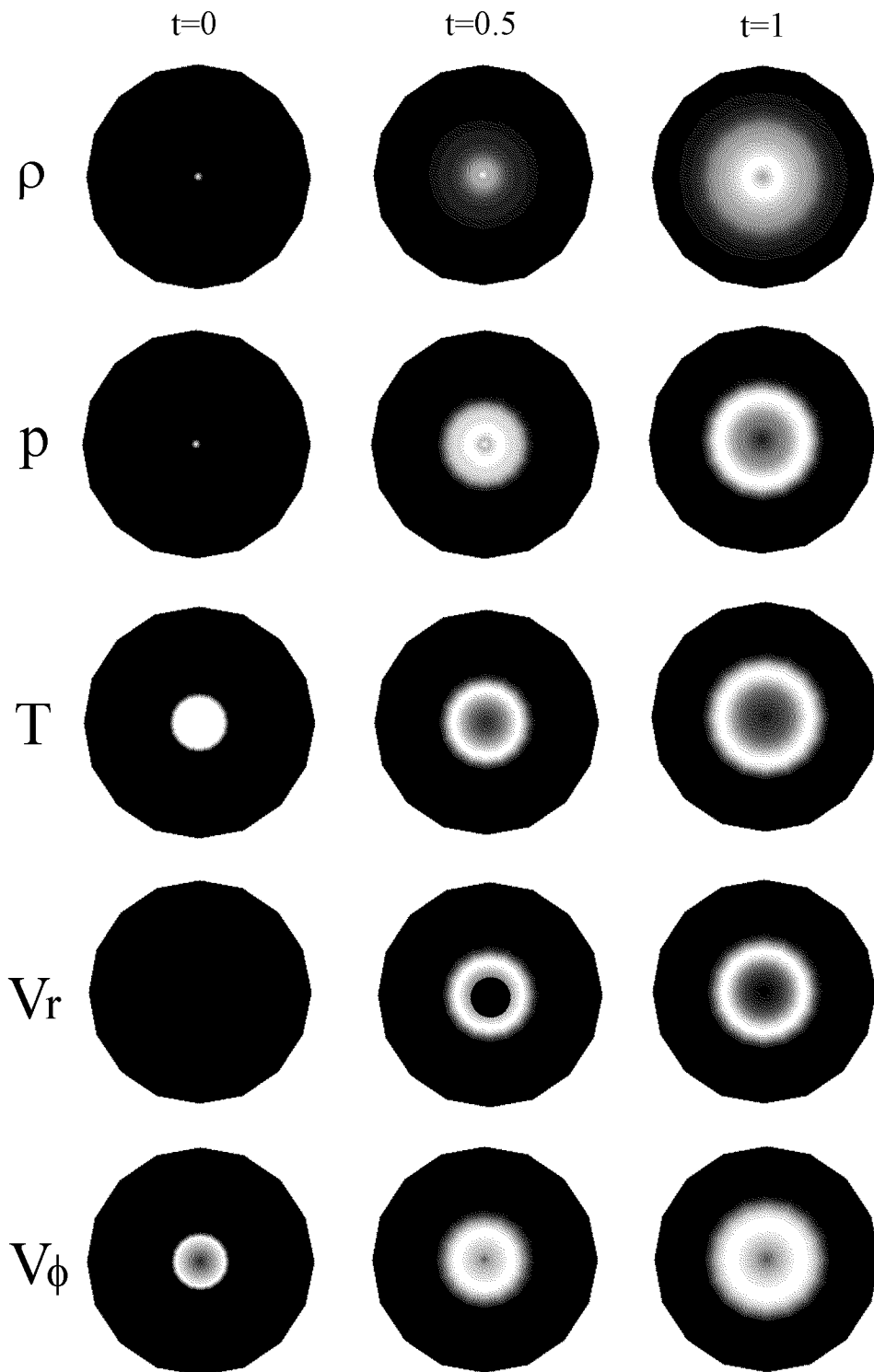


Рис. 6. Эволюция вращающегося газового шара в момент времени: $t = 0$ (слева), $t = 0.5$ (в центре) и $t = 1$ (справа). Различные газодинамические параметры (плотность, давление, температура, радиальная и тангенциальная скорость) в экваториальном сечении $z = 0$

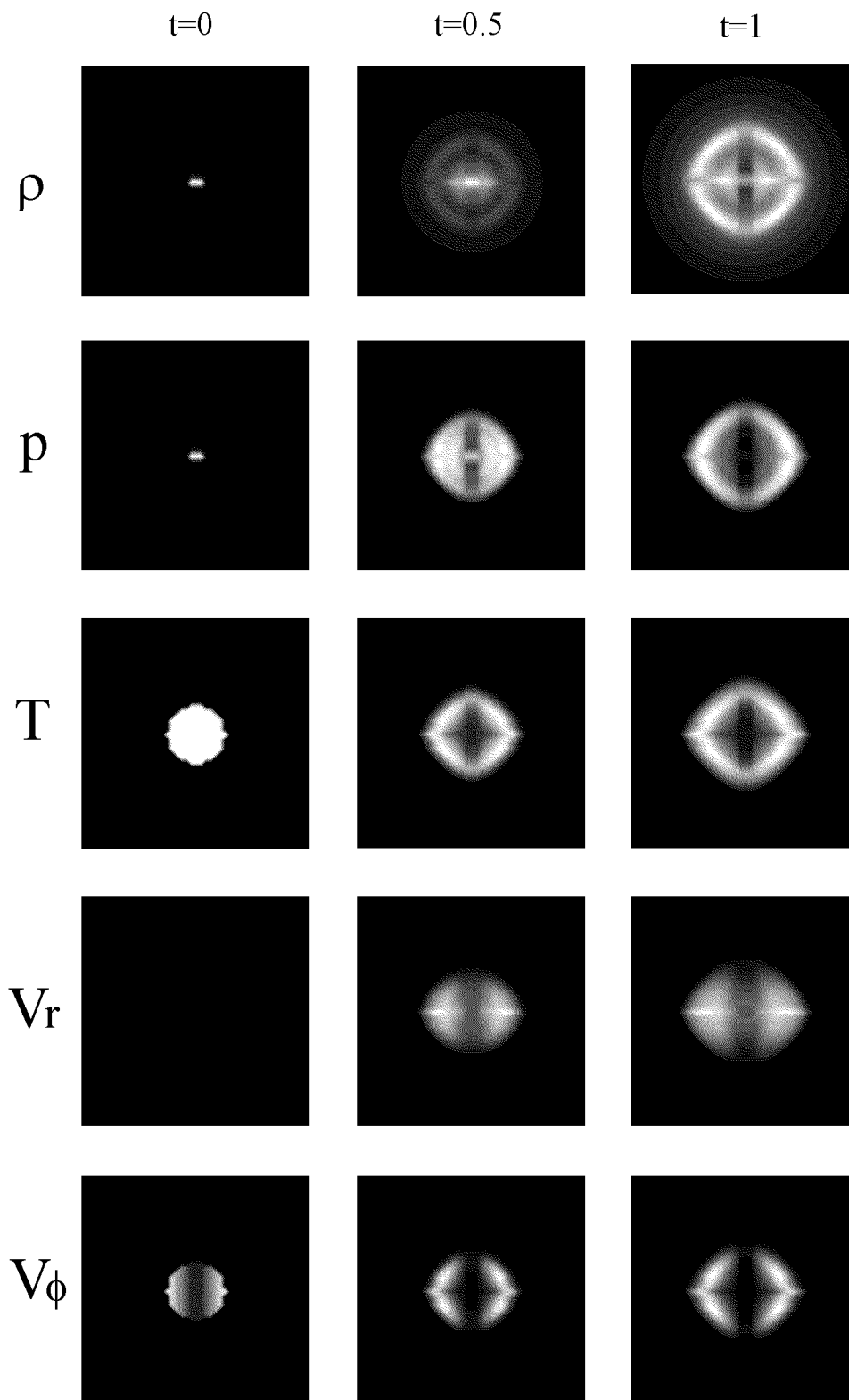


Рис. 7. Эволюция вращающегося газового шара в момент времени: $t = 0$ (слева), $t = 0.5$ (в центре) и $t = 1$ (справа). Различные газодинамические параметры (плотность, давление, температура, радиальная и тангенциальная скорость) в поперечном к экваториальному сечении $\varphi = \text{const}$

Такое распределение параметров, когда температура превышает значение T_* , необходимое для сохранения квазиравновесия (заметим в скобках, что равновесие имело бы место только при сохранении во времени изотермического уравнения состояния, а уравнение состояния идеального газа $p = R\rho T$ нарушает это равновесие) примерно на один-два порядка, эквивалентно мгновенному выделению энергии в момент $t = 0$ по всему объему шара. Такая постановка задачи коррелирует с главной причиной взрыва сверхновой — коллапс перешел в сверхкритическую стадию (анализ и описание физических механизмов этого лежат вне рамок настоящей работы) быстропротекающего процесса выделения гигантского количества энергии.

Взрыв газового сгустка и его эволюцию можно, в общих чертах, проанализировать по рис. 6 и 7 с привлечением некоторых числовых характеристик.

Заметим, что во время всей эволюции сохраняется осевая симметрия задачи ($\partial f / \partial \varphi = 0$), зеркальная симметрия относительно плоскости $z = 0$ и, вследствие этого, зеркальная симметрия относительно диагоналей, соединяющих (условно) углы расчетной области на рис. 7.

К моменту $t = 1$ в экваториальной плоскости (рис. 6) образовалась следующая газодинамическая картина течения. Давление газа, существенно превышающее силу гравитации, привело к общему движению газовой среды к периферии. Границы сгустка, хотя и несколько размытые, расширились до $R_s = 1.9$. Вследствие взаимодействия ударной волны, идущей от центра, и волны разрежения, движущейся к центру, профили $\rho(r)$, $p(r)$, $T(r)$ изменились: все эти функции достигают максимума уже не в центре, причем положение p_{\max} и T_{\max} находится значительно ближе к границе шара ($r \approx 1.6$), чем ρ_{\max} ($r \approx 0.8$).

Максимальное значение V_r достигается там же, где и максимумы p и T , а V_φ — при $r = 1.4$. Изолинии T и V_r (в серо-белой гамме) стягиваются в более узкое кольцо, чем изолинии p , а изолинии ρ и V_φ образуют размытую картину.

Приведем некоторые числовые характеристики профилей в последовательности округленных значений: в центре, в окрестности центра, в максимуме, на границе шара, на периферии:

- плотность: $(10, 15, 24, 12, 4) \times 10^{-2}$;
- давление: $(5, 15, 32, 19, 4) \times 10^{-3}$;
- температура: $(3, 14, 29, 18, 4) \times 10^{-2}$;
- радиальная скорость: $(0, 25, 75, 35, 1) \times 10^{-2}$;
- тангенциальная скорость: $(0, 6, 17, 6, 0)$. Максимальные значения ρ , p и T от $t = 0$ к $t = 1$ уменьшились соответственно в 150, 500 и 3.3 раз.

По информации, полученной в экваториальной плоскости, можно сделать вывод (неверный) о сферической симметрии динамики процесса: шар переходит в шар с увеличением его радиуса и перестройкой параметров, которые остаются функциями только от расстояния до центра $f(R)$. Однако картины изолиний (в серо-белом цвете) функций ρ , p , T , v_r и v_z в плоскости, перпендикулярной экваториальной ($\varphi = \text{const}$), показывают существенную несферичность развивающегося процесса. Изолинии здесь к моменту $t = 1$ уже не являются окружностями, какими они были при $t = 0$. Вся область структурировалась на четыре подобласти с симметричными значениями параметров (подобласти разделяются вертикальной $r = 0$ и горизонтальной $z = 0$ линиями).

Картины распределения газодинамических параметров на рис. 6 и 7 заметно различаются. Следует обратить внимание на следующие основные детали. Газ (см. изолинии плотности) локализовался в два типа скопления: оболочку шара и два сгустка вблизи центра, где плотности максимальны (0.24). Эти сгустки представляют сечения тороидальной формы (см. рис. 6). Оболочка разлетается к периферии с максимальной радиальной скоростью, а тор вращается вокруг центра с очень медленным увеличением расстояния и потерей массы: изнутри — вследствие гравитации, извне — под действием кориолисовой силы. Заметим, что газодинамическое давление мало влияет на этот процесс, поскольку градиент давления, который можно оценить по соответствующей картине на рис. 7, здесь незначителен.

Вообще на картине распределения давления можно выделить три зоны: зону оболочки сфероидом с значением 0.35; центральную зону с достаточно “ровным” значением 0.15 и “канал” вдоль оси вращения шара с очень малым значением давления 0.04, всего в 10 раз большим, чем на периферии области. Температура полностью потеряла свой равномерный характер при $t = 0$, образовав оболочку с максимумом 0.29 и некоторую структуру “крестообразной” формы с глубоким минимумом 0.03, меньшим, чем значение на периферии (0.04).

Кратко резюмируя этот пункт работы, можно сделать вывод, что в данной постановке задачи процесс разлета газового шара (моделирующий в некотором приближении взрыв сверхновой) приводит к сбросу его сферической оболочки и формированию квазистационарной тороидальной системы (газового квазикольца) значительно меньшей массы, вращающейся вокруг центра тяготения, и образованию обла-

сти разрежения цилиндрической формы в окрестности оси вращения.

15. Заключение. Проведен многосторонний анализ фундаментальных проблем вычислительного инструментария, на основе которого функционирует комплекс компьютерных программ математического моделирования нестационарных трехмерных процессов в космической газодинамике. Комплекс базируется на принципе сегментации полной задачи на ряд автономных подзадач, соответствующих отдельным физическим аспектам. Это повышает устойчивость и безотказность работы комплекса, обеспечивает его дополняемость новыми программными сегментами для расширения круга исследуемых проблем и адаптируемость к современным технологиям параллельного счета на многопроцессорных вычислительных системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 02-01-00097, 02-01-00864, 01-01-00781) и Интеграционного проекта СО РАН № 148.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными? // Успехи физ. наук. 1999. **169**, № 4. 419–441.
2. Пармон В.Н. Пребиотическая фаза зарождения жизни // Вестник РАН. 2002. **72**, № 11. 976–983.
3. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
4. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967.
5. Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990.
6. Березин Ю.А., Вишневков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.
7. Румер Ю.Б., Рыбкин М.С. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972.
8. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002.
9. Голубятников А.Н. К образованию однородного разлета гравитирующего газа при наличии градиента давления // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа. 1998. № 4. 176–182.
10. Голубятников А.Н., Чукин С.С. О сильном релятивистском взрыве в среде с переменной плотностью // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 2. 86–90.
11. Захаров А.В., Мухарлямов Р.К. Макроскопические уравнения Эйнштейна для системы гравитирующих частиц с разными массами // ЖЭТФ. 2003. **123**, № 4. 665–671.
12. Смирновский И.Р. О структуре ударной волны в диспергирующей плазме // Прикл. мех. и техн. физ. 1998. **39**, № 3. 14–21.
13. Деревянко В.А., Захаров Ю.П., Тарнавский Г.А. Лабораторное моделирование коллективных процессов в плазме солнечного ветра // Математические модели ближнего космоса. Новосибирск: Наука, 1977. 204–215.
14. Марковский С.А., Скороходов С.Л. Численное моделирование ударных волн с неоднозначной структурой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. **40**, № 9. 1408–1415.
15. Гридчина М.Е., Осипов А.И., Уваров А.В. Взаимодействие звуковых и сильных ударных волн // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 2. 40–47.
16. Калайдин Е.Н. Распространение прямых нестационарных ударных волн по газу с инверсно-заселенными уровнями колебательной энергии // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа. 1989. № 5. 159–163.
17. Ибанов М.Я., Терентьева Л.В. Стационарные солитоноподобные решения уравнений Эйлера при наличии собственных силовых полей // Прикл. матем. и механика. 1999. **63**, № 2. 258–266.
18. Ласковский М.В., Левин В.А., Седов Л.И. Периферийный взрыв в самогравитирующем газовом шаре и динамический взрыв равновесия звезды // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа. 1998. № 3. 157–163.
19. Дудоров А.Е., Жилкин А.Г. Неавтономные режимы изотермического коллапса протозвездных облаков // ЖЭТФ. 2003. **123**, № 2. 195–202.
20. Tsuribe T., Inutsuka S.-I. Criteria for fragmentation of rotating isothermal clouds. I. Semianalytic approach // Astrophys. J. 1999. **526**, N 2. 307–313.
21. Баранов В.Б. Газодинамическая модель сверхзвукового обтекания солнечного ветра локальной межзвездной средой. Связь с экспериментальными данными // Успехи механики. 2002. **1**, № 1. 3–31.
22. Захаров В.В., Крифо Ж.Ф., Лукьянов Г.А., Родионов А.В. Моделирование внутренней атмосферы комет с несферическим ядром типа “яблоко” // Матем. моделирование. 2003. **15**, № 6. 48–52.
23. Белоцерковский О.М., Демченко В.В., Опарин А.М. Нестационарное трехмерное численное моделирование неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // Докл. РАН. 1997. **354**, № 2. 190–193.
24. Kunik M., Qamar S., Warnecke G. Kinetic schemes for the ultra-relativistic Euler equations // J. Comput. Phys. 2003. **187**, N 2. 572–596.
25. Marcos C., Barge P., Marcos R. Dust dynamics in protoplanetary disks: parallel computing with PVM // J. Comput. Phys. 2002. **176**, N 1. 274–294.

26. Снытников В.Н., Пармон В.Н., Вишнев В.А., Дудникова Г.И., Никитин С.А., Снытников А.В. Численное моделирование гравитационных систем многих тел с газом // Вычислительные технологии. 2002. **7**, № 3. 72–84.
27. Тарнавский Г.А., Шпак С.И. Декомпозиция методов и распараллеливание алгоритмов решения задач аэродинамики и физической газовой динамики // Программирование. 2000. № 6. 45–57.
28. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб: БХВ-Петербург, 2002.
29. Тарнавский Г.А., Шпак С.И. Эффективный показатель адиабаты в задачах гиперзвукового обтекания тел реальным газом // Теплофизика и аэромеханика. 2001. **8**, № 1. 41–58.
30. Тарнавский Г.А., Шпак С.И. Способы расчета эффективного показателя адиабаты при компьютерном моделировании гиперзвуковых течений // Сиб. ж. индустриальной математики. 2001. **4**, № 1(7). 177–197.
31. A repulsive force in Universe // Physics News Update. The American Institute of Physics Bulletin of Physics News. 1998. N 361. 117–124.
32. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967.
33. Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures // J. Comput. Phys. 2003. **186**, N 2. 690–696.
34. Тарнавский Г.А., Шпак С.И. Некоторые аспекты компьютерного моделирования гиперзвуковых течений: устойчивость, неединственность и бифуркации численных решений уравнений Навье–Стокса // Инженерно-физич. журн. 2001. **74**, № 3. 125–132.
35. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
36. Беляев Н.М., Хруц В.К. Численный расчет сверхзвуковых течений газа. Киев: Вища школа, 1984.
37. Park S.H., Kwon J.H. On the dissipation mechanism of Godunov-type schemes // J. Comput. Phys. 2003. **188**, N 2. 524–542.
38. Toro E. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 1999.
39. Крылов А.А., Мизалин В.А., Савельев А.Д. Опыт применения параболического генератора сеток в задачах вычислительной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. **43**, № 7. 1096–1106.
40. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
41. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2002.
42. Абакумов М.В., Мукин С.И., Попов Ю.П. О некоторых задачах гравитационной газовой динамики // Мат. моделирование. 2000. **12**, № 3. 110–120.
43. Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Четкин В.М. Влияние вязкости на морфологию течения вещества в полуразделенных двойных системах // Астрон. журн. 2000. **77**, № 1. 31–41.
44. Тарнавский Г.А. Ударные волны в газах с различными показателями адиабаты до и после фронта скачка // Вычисл. методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 129–143.
45. Белоцерковский О.М. Математическое моделирование на суперкомпьютерах (опыт и тенденции) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. **40**, № 8. 1221–1236.
46. Pandolfi M., D'Ambrosio D. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomena // J. Comput. Phys. 2001. **166**, N 2. 271–301.
47. Тарнавский Г.А., Хакимзянов Г.С., Тарнавский А.Г. Моделирование гиперзвуковых течений: влияние стартовых условий на финальное решение в окрестности точек бифуркации // Инж.-физич. журн. 2003. **76**, № 5. 101–107.
48. Herant M. et al. Inside the Supernova // Astrophys. J. 1994. **435**. 339–361.

Поступила в редакцию
03.10.2003