УДК 519.6

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. В. Колос[1], **М. В. Колос**[2]

Рассмотрена задача восстановления сигналов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями гиперболического типа при наличии цветных шумов в измерениях. Как известно, задача линейной фильтрации в этом случае, вообще говоря, некорректна. Предложен метод нахождения приближенного решения задачи, основанный на идее регуляризации А. Н. Тихонова и сведении задачи линейной фильтрации в системах с операторными коэффициентами к задаче линейной фильтрации в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Доказана сходимость алгоритма решения задачи.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задана замкнутая ограниченная область P с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль $\mathbf{n}_0$; $C^2(P)$ — множество дважды дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на P; $C^2_1(P)$ — множество функций $u(x) \in C^2(P)$, для которых выполняется условие

$$u(x)|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на P; $(.,.)_{0P}$, $\|\,.\,\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W^1_2(P)$ — позитивное соболевское пространство;

$$(u,v)_{1P} = \int\limits_P \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x)v(x)\Big)\,dP$$

— скалярное произведение в $W^1_2(P)$; $\|u\|_{1P} = \sqrt{(u,u)_{1P}}$ — норма в $W^1_2(P)$.

Справедливо неравенство $\|u\|_{0P} \leqslant k\|u\|_{1P} \quad \forall u \in W^1_2(P), \quad k = \mathrm{const} > 0$. Рассмотрим на P линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Nu = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)u(x), \tag{2}$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, $i,j = 1,\dots,n$, $a_0(x) \in C(P)$; $C(P)$ — пространство непрерывных функций на P; $a_0(x) \geqslant c_0$ для всех $x \in P$; $c_0 = \inf\limits_x \big\{a_0(x) \mid x \in P\big\} > 0$.

Предполагаем, что справедливо также неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad x \in P, \tag{3}$$

где λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа $(i = 1,\dots,n)$.

Соотношения (1)–(3) задают в пространстве $L_2(P)$ замкнутый линейный оператор $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{B}u = Nu$ для всех $u \in C^2_1(P)$. Оператор $\mathcal{B}$ имеет плотную в $L_2(P)$ область определения $D(\mathcal{B})$, является симметрическим и положительно-определенным, т.е. справедливы соотношения

$$(\mathcal{B}u,v)_{0P} = (u,\mathcal{B}v)_{0P} \quad \forall u,v \in D(\mathcal{B}), \quad (\mathcal{B}u,u)_{0P} \geqslant c\,\|\,u\,\|^2_{0P} \quad \forall u \in D(\mathcal{B}), \quad c = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

Введем обозначение $(u,v)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}u,v)_{0P}$ для всех $u,v \in D(\mathcal{B})$. Пополним $D(\mathcal{B})$ по этому скалярному произведению. Полученное пространство обозначим через $H_{\mathcal{B}}$. Примем это пространство за позитивное

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; e-mail: rektorat@urao.edu

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

$H_\mathcal{B} = H_\mathcal{B}^+$ и построим по $H_\mathcal{B}^+$ и $L_2(P)$ негативное пространство $H_\mathcal{B}^-$. Пусть $f(x) \in L_2(P)$. Тогда выражение $(f,u)_{0P}$, $u \in H_\mathcal{B}^+$ определяет непрерывный функционал $l_f(u)$ на $H_\mathcal{B}^+$ (непрерывность следует из (4)) и

$$\big|(f,u)_{0P}\big| = \big|l_f(u)\big| \leqslant \|f\|_{0P}\,\|u\|_{0P} \leqslant c\,\|f\|_{0P}\,\|u\|_{+}, \quad f \in L_2(P), \quad u \in H_\mathcal{B}^+ \quad \big(H_\mathcal{B}^+ \subset L_2(P)\big),$$

где $\|\,.\,\|_+$ — норма в $H_\mathcal{B}^+$. Пополним $L_2(P)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_u \left(\frac{\big|(f,u)_{0P}\big|}{\|u\|_+},\ f \in L_2(P),\ u \in H_\mathcal{B}^+,\ \|u\|_+ \neq 0 \right).$$

Полученное пополнение задает пространство $H_\mathcal{B}^-$. Оператор $\mathcal{B}$ непрерывно действует из $H_\mathcal{B}^+$ в $H_\mathcal{B}^-$.

Пусть $[0,t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau \in [0,t]$. Определим область $Q = P \times [0,t]$. Пусть $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau,x)$ на Q, отображающих сегмент $[0,t]$ в пространство E_n и таких, что $\int\limits_0^t \big\|u(\tau)\big\|_{0P}^2\,d\tau = \|\,u\,\|_{0Q}^2 < \infty$, где $\|\,.\,\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$.

Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1 u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u$, $u \in D(\mathcal{L}_1)$, где $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau,x)$, заданных в области Q, дважды непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0,t]$. По переменной $x \in P$ функции $u(\tau,x) \in H_\mathcal{B}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau,x)|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad u(\tau,x)|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{5}$$

Введем обозначения: $W_{20}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|u\|_{10Q} = \left(\int\limits_Q \left[\Big(\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2 + u\mathcal{B}u \right] dQ \right)^{1/2}; \tag{6}$$

$\|\,.\,\|_{10Q}$, $(.,.)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в позитивном пространстве $W_{20}^1(Q)$; $W_{20}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|v\|_{-10Q} = \sup_u \left[\frac{\big|(u,v)_{0Q}\big|}{\|u\|_{10Q}},\ v \in L_2(Q),\ u \in W_{20}^1(Q),\ \|u\|_{10Q} \neq 0 \right].$$

Обозначим через $D(\mathcal{L}_1^*)$ множество функций $u(\tau,x)$, имеющих хотя бы две производных в классическом смысле по τ, а по x функции $u(\tau,x) \in H_\mathcal{B}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau,x)|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} = 0, \quad u(\tau,x)|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{7}$$

Пусть $W_{2t}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1^*)$ по норме (6), а $W_{2t}^{-1}(Q)$ — негативное пространство для $W_{2t}^1(Q)$; $\mathcal{L}_1^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{L}_1$; $\mathcal{L}_1^* u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u$, $u \in D(\mathcal{L}_1^*)$.

Расширим операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1^*$ на все пространство $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$.

Через $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ обозначим вероятностное пространство, на котором определены все встречающиеся в дальнейшем случайные величины и функции, а M — оператор математического ожидания; $^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования.

Постановка задачи. Пусть полезный q-мерный векторный сигнал $u(\tau,x)$ формируется системой

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u(\tau,x) = v(\tau,x); \tag{8}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = u_1(x), \quad u(\tau,x)|_{x\in\Gamma} = 0, \tag{9}$$

где $v(\tau,x)$ — белый гауссовский шум с известными статистиками, реализации $v(\tau,x) \in W_{2t}^{-1}(Q)$; $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — гауссовские случайные функции с нулевым математическим средним и известными ковариационными операторами.

Измерения проводятся на интервале $[0,t]$ и связаны с $u(\tau,x)$ соотношением

$$r(\tau,x_1)=\mathcal{S}u+\xi(\tau),\quad r(\tau,x_1)\in W_{2t}^{-1}(G),$$

где $\mathcal{S}$ — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства состояний $L_2(Q)$ в пространство измерений $L_2(G)$; $G=\Lambda\times[0,t]$; Λ — множество, в которое оператор $\mathcal{S}$ переводит область P $(\Lambda\subset E_n)$; $\xi(\tau)$ — шум измерений (например, вырожденный белый гауссовский шум). Равенства в уравнении наблюдений и (8) понимаются в смысле негативного пространства, решение (8), (9) — в обобщенном смысле [3, 5].

Требуется по измерениям $\{r(\tau,x_1),\ 0\leqslant\tau\leqslant t\}$ определить последовательность оценок $\widehat{u}_\alpha(\tau,x)$ процесса $u(\tau,x)$ в точке $\tau=t$, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{\alpha\to 0}M\big[(z,\mathcal{A}_\alpha r-u)_q^2\big]=m(t),\quad \mathcal{A}_\alpha r=\widehat{u}_\alpha(\tau,x),\tag{10}$$

где $\mathcal{A}_\alpha$ — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства наблюдений $W_{2t}^{-1}(G)$ в пространство состояний $L_2(Q)$; z — произвольный вектор из E_q;

$$m(t)=\inf_{\mathcal{A}}M\big[(z,\mathcal{A}r-u)_q^2\big];\tag{11}$$

нижняя грань берется по всем линейным непрерывным операторам $\mathcal{A}$, действующим из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$. Пространство таких операторов обозначим через $F(G,Q)$.

Решение линейной задачи фильтрации для систем с распределенными параметрами эквивалентно решению операторного уравнения Винера–Хопфа

$$\mathcal{A}_0\mathcal{R}_r=\mathcal{R}_{ur},\tag{12}$$

где $\mathcal{A}_0$ — линейный оператор, удовлетворяющий критерию (11); $\mathcal{R}_r$ — корреляционный оператор случайного процесса $r(\tau,x_1)$; $\mathcal{R}_{ur}$ — взаимнокорреляционный оператор случайных процессов $u(\tau,x)$ и $r(\tau,x_1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Последовательность операторов* $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$, $\mathcal{A}_\alpha\in F(G,Q)$, *которая удовлетворяет критерию* (10), *находится из операторного уравнения*

$$\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_r+\alpha\mathcal{A}_\alpha=\mathcal{R}_{ur},\tag{13}$$

где α — *параметр регуляризации,* $\alpha>0$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $\varphi(\mathcal{A})=M\big[(z,\mathcal{A}r-u)_q^2\big]$, где $\mathcal{A}\in F(G,Q)$, $z\in E_q$. Этот функционал можно записать несколько иначе, а именно

$$\varphi(\mathcal{A})=(z,\mathcal{A}\mathcal{R}_r\mathcal{A}^*z)_q-2(z,\mathcal{A}\mathcal{R}_{ru}z)_q+(z,\mathcal{R}_u z)_q,\tag{14}$$

где $\mathcal{A}^*$ — оператор, связанный с оператором $\mathcal{A}$ соотношением $\mathcal{A}^*r=(\mathcal{A}r)^{\text{т}}$; $\mathcal{R}_u$ — корреляционный оператор случайного процесса $u(\tau,x)$; $\mathcal{R}_{ur}=\mathcal{R}_{ru}^*$.

Из последнего выражения для $\varphi(\mathcal{A})$ видно, что минимизировать следует первые два слагаемых.

Введем обозначения $\rho(\mathcal{A})=(z,\mathcal{A}\mathcal{R}_r\mathcal{A}^*z)_q-2(z,\mathcal{A}\mathcal{R}_{ru}z)_q$. Отметим, что

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\}=-(z,\mathcal{A}_0\mathcal{R}_{ru}z)_q,\tag{15}$$

где $\mathcal{A}_0$ удовлетворяет соотношение $\mathcal{A}\mathcal{R}_r=\mathcal{R}_{ur}$. Решение этого уравнения в общем случае некорректно [1–3].

Уравнение (13) имеет единственное решение и доставляет минимум функционалу

$$\varphi_\alpha(\mathcal{A})=(z,\mathcal{R}_u z)_q+\rho(\mathcal{A})+\alpha(z,\mathcal{A}\mathcal{A}^*z)_q.$$

Выражение, которое необходимо минимизировать, имеет вид

$$\rho_\alpha(\mathcal{A})=\rho(\mathcal{A})+\alpha(z,\mathcal{A}\mathcal{A}^*z)_q.\tag{16}$$

Обозначим $\Delta=\mathcal{A}-\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha$ — решение (13), и запишем выражение (16), используя это обозначение. После несложных преобразований находим $\rho_\alpha(\mathcal{A})-\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha)=\alpha(z,\Delta\Delta^*z)_q+(z,\Delta\mathcal{R}_r\Delta^*z)_q$. Поскольку $(z,\Delta\mathcal{R}_r\Delta^*z)_q\geqslant 0$, то справедливо неравенство

$$\rho_\alpha(\mathcal{A})\geqslant\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha)+\alpha(z,\mathcal{A}\mathcal{A}^*z)_q\geqslant\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha).\tag{17}$$

Нижняя грань $\rho_\alpha(\mathcal{A})$ равна

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho_\alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} = -(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q\,. \tag{18}$$

Пусть теперь $\alpha_1>\alpha_2>0$. Тогда справедливо неравенство

$$-(z,\mathcal{R}_u z)_q \leqslant -(z,\mathcal{A}_{\alpha_2}\mathcal{R}_{ru}z)_q \leqslant -(z,\mathcal{A}_{\alpha_1}\mathcal{R}_{ru}z)_q,$$

которое следует из (18) и неравенства $(z,\mathcal{R}_u z)_q \geqslant \big|(z,\mathcal{A}_0\mathcal{R}_{ru}z)_q\big|$, так как

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\varphi(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} = (z,\mathcal{R}_u z)_q - (z,\mathcal{A}_0\mathcal{R}_{ru}z)_q \geqslant 0.$$

Таким образом, последовательность операторов $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$ задает ограниченную снизу последовательность $\big\{(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q\big\}_{\alpha>0}$ при $\alpha\to 0$. Эта последовательность монотонно убывает, а значит, существует предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q$.

Так как $\rho(\mathcal{A})\leqslant\rho_\alpha(\mathcal{A})$ для $\alpha>0$ и всех $\mathcal{A}\in F(G,Q)$, то

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} \leqslant \inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho_\alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\},$$

а следовательно

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} \leqslant -\lim_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q. \tag{19}$$

Справедливо также неравенство

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} \geqslant -\lim_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q\,, \tag{20}$$

которое вытекает из соотношения $\rho(\mathcal{A}) = \lim\limits_{\alpha\to 0}\rho_\alpha(\mathcal{A}) \geqslant -\lim\limits_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q$, так как

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}) \geqslant \rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) = \inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho_\alpha(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\}.$$

Из неравенств (18) и (20) следует, что $\inf\limits_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} = -\lim\limits_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q$. В свою очередь, справедливо соотношение

$$\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha) - \alpha(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\alpha^* z)_q = \rho(\mathcal{A}_\alpha) \leqslant \inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha),\ \mathcal{A}_\alpha\in F(G,Q)\big\} = -\lim_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q\,,$$

но $\rho(\mathcal{A}_\alpha)\geqslant \inf\limits_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} = -\lim\limits_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q$. Таким образом, находим, что

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} = -\lim_{\alpha\to 0}(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q \leqslant \rho(\mathcal{A}_\alpha) \leqslant \inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho_\alpha(\mathcal{A}_\alpha),\ \mathcal{A}_\alpha\in F(G,Q)\big\} = -(z,\mathcal{A}_\alpha\mathcal{R}_{ru}z)_q\,.$$

Переходя к пределу в правой части неравенства по α при $\alpha\to 0$, получаем, что

$$\inf_{\mathcal{A}}\big\{\rho(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}\in F(G,Q)\big\} = -\lim_{\alpha\to 0}\rho(\mathcal{A}_\alpha). \tag{21}$$

Следовательно, последовательность решений $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha>0}$ операторного уравнения (13) является решением задачи фильтрации [8–11].

Приближенное решение задачи линейной фильтрации. Пусть $\big\{\rho_i(x)\big\}_{i=1}^{\infty}$ — ортогональная система гладких функций в пространстве $L_2(P)$, такая, что $\rho_i(x)|_{x\in\Gamma}=0$, и пусть $\big\{\lambda_i(x)\big\}_{i=1}^{\infty}$ — ортогональная система в $L_2(\Lambda)$.

Прежде чем приступить к изложению приближенного метода решения задачи, отметим некоторые свойства рассматриваемых функций и операторов.

Если вектор-функция $u(\tau,x)\in W_{2t}^{-1}(Q)$, то $u(\tau,x)$ можно представить в виде $u(\tau,x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\vartheta_i(\tau)\rho_i(x)$, $\vartheta_i(\tau)\in W_{2t}^{-1}[0,t]$. Действительно, применим к функции $u(\tau,x)$ изометрический оператор j_t^*, который переводит пространство $W_{2t}^{-1}[0,t]$ в $L_2[0,t]$ (подробней об операторе j_t^* и обратном к нему D_t^* см. в [3–5]), и получим $j_t^*u(\tau,x)=\psi(\tau,x)\in L_2(Q)$ и $\psi(\tau,x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_i(\tau)\rho_i(x)$, $\beta_i(\tau)\in L_2[0,t]$. Используя оператор D_t^*, обратный к j_t^*, находим

$$u(\tau,x)=\sum_{i=1}^{\infty}D_t^*\beta_i(\tau)\rho_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\vartheta_i(\tau)\rho_i(x), \tag{22}$$

где $\vartheta_i(\tau) = D_t^*\beta(\tau)$.

Пусть $\vartheta(\tau) = \{\vartheta_1(\tau), \vartheta_2(\tau), \ldots, \vartheta_k(\tau), \ldots\}$ и $\rho(x) = \{\rho_1(x), \rho_2(x), \ldots, \rho_k(x), \ldots\}$ — бесконечные векторы. Тогда функцию $u(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(Q)$ можно представить в виде $u(\tau, x) = \vartheta^{\mathrm{T}}(\tau)\rho(x)$.

Аналогично, функцию $g(\tau, x) \in W_{2t}^{-1}(G)$ можно записать в виде $g(\tau, x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i(\tau)\lambda_i(x) = \gamma^{\mathrm{T}}(\tau)\lambda(x)$, где $\lambda(x) = \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots\}$ и $\gamma(\tau) = \{\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau), \ldots\}$ являются бесконечными векторами с координатами из $L_2(\Lambda)$ и $W_2^{-1}[0, t]$ соответственно, а $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — ортогональная система функций в $L_2(\Lambda)$.

Лемма 1. *Для того чтобы оператор $\mathcal{A}$, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$ и определяемый выражением*

$$\mathcal{A}g \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(\tau)\rho_i(x), \tag{23}$$

был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\vartheta(\tau)$ имел вид

$$\vartheta(\tau) = \int\limits_0^{\tau} H(\tau, s)\gamma(s)\, ds, \tag{24}$$

где $H(\tau, s)$ — бесконечная матрица с элементами $h_{ij}(\tau, s)$, принадлежащими по аргументу s позитивному пространству $W_2^1[0, t]$.

Доказательство. Сначала остановимся на необходимости. Пусть оператор $\mathcal{A}$ — непрерывный. Тогда для каждого $i = 1, 2, \ldots$ выражение $\vartheta_i(\tau) = (\mathcal{A}g, \rho_i)_{0P}$ является линейным непрерывным функционалом над $W_{2t}^{-1}(Q)$ (в силу непрерывности оператора $\mathcal{A}$ и скалярного произведения в $L_2(P)$).

Согласно обобщенной теореме Рисса о виде линейного непрерывного функционала в оснащенном гильбертовом пространстве [3], всякий линейный функционал в W_2^{-1} имеет вид $\Phi(u) = \langle u, v\rangle$, где v — некоторый элемент из W_2^1, однозначно определяемый элементом u; при этом $\|\Phi\| = \|v\|_1$. Тогда

$$\vartheta_i(\tau) = (\mathcal{A}g, \rho_i)_{0P} = \langle g, h_i\rangle, \tag{25}$$

где $h_i(\tau, x) \in W_{2t}^1(G)$ и определяется единственным образом.

Элемент $h_i(\tau, x)$ можно представить в виде $h_i(\tau, x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} h_{ij}(\tau)\lambda_j(x)$, $h_{ij}(\tau) \in W_2^1[0, t]$, $\{\lambda_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональная система функций в $L_2(\Lambda)$. Выражение (25), с учетом полученного выше соотношения и (22), запишется следующим образом: $h_i(\tau, x) = \Big\langle \sum\limits_{j=1}^{\infty} \gamma_j(\tau)\lambda_j(x), \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_{ik}(\tau)\lambda_k(x)\Big\rangle = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\big\langle \gamma_j(\tau), h_{ij}(\tau)\big\rangle$.

Достаточность очевидна.

Как известно, если оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет матричное представление, то он ограничен [3, 4], т.е. выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} h_{ik}x_k\right|^2 \leqslant N^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \tag{26}$$

для любых x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$; N — постоянная, зависящая от оператора $\mathcal{A}$.

Это представление понадобится при доказательстве теоремы сходимости. Перейдем к решению задачи фильтрации. Приближенное значение состояния системы (8), (9) будем искать в виде конечной суммы

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i(\tau)\rho_i(x), \tag{27}$$

где $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в $L_2(P)$, $\rho_i(x)|_{x\in\Gamma}=0$, а $\vartheta_i(\tau)$ находятся из соотношений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 u_k(\tau,x)}{\partial\tau^2},\rho_j\right)_{0P} + (\mathcal{B}u,\rho_j)_{0P} = (v,\rho_j)_{0P}, \\ u_k(0,x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\vartheta_i(0)\rho_i(x) = u_0(x), \\ \left.\dfrac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left.\dfrac{d\vartheta_i(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}\rho_i(x) = u_1(x). \end{cases} \tag{28}$$

Подставляя соотношение (27) в (28), получаем уравнения для определения $\vartheta_j(\tau)$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vartheta_j(\tau)}{d\tau^2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\vartheta_i(\tau)(\mathcal{B}\rho_i,\rho_j)_{0P} = (v,\rho_j)_{0P}, \\ \vartheta_j(0) = \big(u_0(x),\rho_j\big)_{0P}, \\ \left.\dfrac{d\vartheta_i(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \big(u_1(x),\rho_j\big)_{0P}, \\ j=1,2,\dots,k. \end{cases} \tag{29}$$

Задача (29) является обобщенной задачей Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k.

Наблюдения для приближенной задачи построим следующим образом:

$$\big(r(\tau),\lambda_i\big)_{0\Lambda} = (\mathcal{S}u,\lambda_i)_{0\Lambda} + (\xi,\lambda_i)_{0\Lambda}, \tag{30}$$

где $(.,.)_{0\Lambda}$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(\Lambda)$.

Будем считать, что наблюдается процесс $\{r_m(\tau), 0\leqslant\tau\leqslant t\}$, связанный с $\vartheta(\tau)$ соотношением

$$r_m^i(\tau) = \big(r(\tau),\lambda_i\big)_{0\Lambda} = \sum_{j=1}^{k}\vartheta_j(\tau)(\mathcal{S}\rho_j,\lambda_i)_{0\Lambda} + (\xi,\lambda_i)_{0\Lambda}, \quad i=1,2,3,\dots,m<\infty. \tag{31}$$

Введем обозначения. Пусть $\vartheta(\tau)$ — k-мерный вектор с элементами $\{\vartheta_i(\tau)\}_{i=1}^{k}$, F_k — матрица размерности $k\times k$, $F_k^{ij} = (\mathcal{B}\rho_i,\rho_j)_{0P}$, Gv — матрица размера $1\times k$, $(Gv)_i = (v,\rho_i)_{0P}$, ϑ_0 — случайный вектор с координатами $\vartheta_{0j} = \big(u_0(x),\rho_j\big)_{0P}$, ϑ_{10} — вектор с координатами $\vartheta_{10j} = \big(u_1(x),\rho_j\big)_{0P}$, C_k — матрица $k\times m$, $C_k^{lj} = (\mathcal{S}\rho_j,\lambda_l)_{0\Lambda}$, $r_m(\tau)$ — вектор наблюдений, $r_m^l(\tau) = \big(r(\tau),\lambda_l\big)_{0\Lambda}$, $w(\tau)$ — шум, $w_l = (\xi,\lambda_l)_{0\Lambda}$, $i=1,2,\dots,k$, $j=1,2,\dots,k$, $l=1,2,\dots,m$.

С учетом введенных обозначений приближенную задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать в следующем виде: векторный случайный процесс $\vartheta(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2} = F_k\vartheta(\tau) + Gv(\tau), \quad \vartheta(0)=\vartheta_0, \quad \left.\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \vartheta_{10}, \tag{32}$$

где Gv — белый шум.

Наблюдается процесс $\{r_m(\tau), 0\leqslant\tau\leqslant t\}$, связанный с $\vartheta(\tau)$ соотношением

$$r_m(\tau) = C_k\vartheta(\tau) + w(\tau). \tag{33}$$

Требуется найти последовательность оценок $\{\widehat{\vartheta}_\alpha(\tau)\}_{\alpha>0}$ процесса $\vartheta(\tau)$ в момент $\tau=t$, такую, что

$$\lim_{\alpha\to 0} M\Big[\big(z,\vartheta(t)-\widehat{\vartheta}_\alpha\big)_k^2\Big] = m(t), \quad m(t) = \inf_{\mathcal{H}}\Big\{M\Big[\big(z,\vartheta(t)-\mathcal{H}r_m(t)\big)_k^2\Big]\Big\}, \tag{34}$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний, $\mathcal{H}$ — определяется соотношением $\mathcal{H}r_m = \displaystyle\int_0^t h(t,\tau)r_m(\tau)\,d\tau$, z — произвольный вектор из E_k.

Имеют место следующие статистики:

$$M[\vartheta_0] = 0, \quad M[\vartheta_0\vartheta_0^{\mathrm{T}}] = P_0, \quad P_0^{ij} = (\mathcal{U}_0\rho_i, \rho_j)_{0P}, \quad i,j = 1,2,\dots,k,$$
$$M[\vartheta_{10}] = 0, \quad M[\vartheta_{10}\vartheta_{10}^{\mathrm{T}}] = P_{10}, \quad P_{10}^{ij} = (\mathcal{U}_1\rho_i, \rho_j)_{0P}, \quad i,j = 1,2,\dots,k,$$
$$M\big[Gv(\tau)\big] = 0, \quad M\Big[Gv(\tau)\big(Gv(\sigma)\big)^{\mathrm{T}}\Big] = Q(\tau)\delta(\tau-\sigma), \quad Q_{ij}(\tau) = (\mathcal{V}\rho_i, \rho_j)_{0P},$$
$$M\big[w(\tau)\big] = 0, \quad M\big[w(\tau)w^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = R(\tau)\delta(\tau-\sigma), \quad R_{sl}(\tau) = (\mathcal{W}\lambda_s, \lambda_l)_{0\Lambda},$$

$s, l = 1,2,\dots,m,$ $R(\tau)$ — матрица порядка m, $R(\tau) \geqslant 0$, $\mathcal{U}_0$ — ковариационный оператор процесса $u_0(x)$, $\mathcal{U}_1$ — ковариационный оператор процесса $u_1(x)$, $\mathcal{V}$ — ковариационный оператор процесса $v(\tau,x)$, $\mathcal{W}$ — ковариационный оператор процесса $\xi(\tau,x)$.

Матрица $R(\tau)$ может быть вырожденной. Поэтому для решения задачи фильтрации (32)–(34) необходимо использовать алгоритм, аналогичный полученному в [3, 5].

Покажем, что построенное по задаче (32)–(34) при $k \to \infty$ приближенное решение задачи линейной оптимальной фильтрации (8)–(11) $\widehat{u}_k^{\alpha}(\tau,x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \widehat{\vartheta}_i^{\alpha}(\tau)\rho_i(x)$ сходится в соответствующей норме к точному решению. Для этого докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Для почти всех t справедливо равенство* $\lim\limits_{k\to\infty} M\Big[\big\|u_k(t,x) - u(t,x)\big\|_{0P}^2\Big] = 0$, *где* $u_k(t,x)$ *имеет вид* (27), *а* $u(\tau,x)$ *— решение уравнения* (8), (9) *в точке* $\tau = t$.

Доказательство. Согласно теореме 5 [6], имеет место соотношение

$$s_k(t,\omega) = \int\limits_0^t \big|u_k(\tau) - u(\tau)\big|^2\,d\tau \to 0, \quad k \to \infty, \tag{35}$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, откуда $M\big[s_k(t,\omega)\big] = M\Bigg[\int\limits_0^t \big|u_k(\tau) - u(\tau)\big|^2\,d\tau\Bigg] \to 0$, $k \to \infty$. Лемма доказана.

Запишем уравнение Винера–Хопфа для задачи (32)–(34):

$$M\big[\vartheta(t)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t h_{mk}(t,\tau)M\big[r_m(\tau)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau. \tag{36}$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$M\big[\vartheta(t)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] = \int\limits_0^t h_{mk}^{\alpha}(t,\tau)M\big[r_m(\tau)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]\,d\tau + \alpha h_{mk}^{\alpha}(t,\sigma). \tag{37}$$

Уравнение (37) можно записать с помощью бесконечных матриц; такое представление понадобится при доказательстве сходимости.

Используя ковариационную матрицу $M\big[\vartheta(t)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]$, построим бесконечную матрицу $K_{km}(t,\sigma)$ следующим образом:

$$K_{km}(t,\sigma) = \begin{bmatrix} M\big[\vartheta(t)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big] & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Эта матрица задает над $W_{2t}^{-1}(G)$ линейный оператор, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$. Действительно, для любого $g \in W_{2t}^{-1}(G)$ справедливо соотношение $g = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j(\tau)\lambda_j(x)$. Пусть $\widehat{h}(t) = \int\limits_0^t K_{km}(t,\tau)\widehat{y}(\tau)\,d\tau$, где $\widehat{y}(\tau)$ — вектор с координатами $y_i(\tau)$. Тогда, согласно лемме 1, функция $h(t,x) = h(g) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j(t)\rho_j(x)$ ($h_j(t)$ — координаты вектора $\widehat{h}(t)$) задает линейный непрерывный оператор, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$

в $L_2(Q)$. Таким образом, матрица $K_{km}(t,\tau)$ определяет оператор над $W_{2t}^{-1}(G)$. Обозначим этот оператор через $\mathcal{R}_{km}$.

Аналогично, бесконечная матрица $K_{mm}(\tau,\sigma)$, построенная по $M\big[r_m(\tau)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]$, задает оператор $\mathcal{R}_{mm}$, действующий из $W_{2t}^{-1}(G)$ в $L_2(Q)$.

Пусть

$$H_{mk}(t,\sigma)=\begin{bmatrix} h_{mk}^{\alpha}(t,\sigma) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Тогда, используя бесконечные матрицы, уравнение (37) запишется в виде

$$K_{km}(t,\sigma)=\int\limits_0^t H_{mk}^{\alpha}(t,\tau)K_{mm}(\tau,\sigma)\,d\tau+\alpha H_{mk}^{\alpha}(t,\sigma),$$

а в операторной форме — в виде

$$\mathcal{A}_{km}^{\alpha}\mathcal{R}_{mm}+\alpha\mathcal{A}_{km}^{\alpha}=\mathcal{R}_{km}. \tag{38}$$

Покажем, что решение уравнения (38) задает приближенное решение (13). Докажем вначале ряд дополнительных фактов.

Лемма 3. *Справедливо соотношение* $\lim\limits_{k,m\to\infty}\|\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{km}\|=0$.

Доказательство. Для каждого фиксированного t по определению операторной нормы имеем

$$\|\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{km}\|=\sup_{\varphi,\psi}\left\{\frac{\Big|\big([\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{km}]\varphi,\psi\big)_{0Q}\Big|}{\|\varphi\|_{-1tG}\,\|\psi\|_{0Q}};\ \varphi\in W_{2t}^{-1}(G),\ \psi\in L_2(Q),\ \|\varphi\|_{-1tG}\neq 0,\ \|\psi\|_{0Q}\neq 0\right\}.$$

Оценим числитель в правой части этого равенства:

$$\Big|\big([\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{km}]\varphi,\psi\big)_{0Q}\Big|=\Big|M\big[(u,\psi)_{0Q}\,(r,\varphi)_{-1tG}-(u_k,\psi)_{0Q}\,(r_m,\varphi)_{-1tG}\big]\Big|.$$

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\Big|\big([\mathcal{R}_{ur}-\mathcal{R}_{km}]\varphi,\psi\big)_{0Q}\Big|\leqslant\Bigg|\Big(M\big[\|u-u_k\|_{0Q}^2\big]M\big[\|r\|_{-1tG}^2\big]\Big)^{1/2}+ \\ +\Big(M\big[\|u_k\|_{0Q}^2\big]M\big[\|r-r_m\|_{-1tG}^2\big]\Big)^{1/2}\Bigg|\,\|\varphi\|_{-1tG}\,\|\psi\|_{0Q}.$$

Из леммы 2 следует, что первое слагаемое в правой части при $k\to\infty$ стремится к 0. Покажем, что $M\big[\|r-r_m\|_{-1tG}^2\big]\to 0$ при $m\to\infty$.

Рассмотрим норму $\|r-r_m\|_{-1tG}$. Отметим, что здесь r и r_m понимаются как бесконечные векторы. Координаты вектора $\overline{r}$ имеют вид $r_i=(r,\lambda_i)_{0\Lambda}$, координаты вектора $\overline{r}_m-r_m^i$ имеют вид

$$\overline{r}_m-r_m^i=\begin{cases}(r,\lambda_i)_{0\Lambda}, & i\leqslant m,\\ 0, & i>m.\end{cases}$$

Кроме того, справедливо равенство $\|\overline{r}-\overline{r}_m\|_{-1tG}=\|r-r_m\|_{-1tG}$, где r и r_m представлены обобщенными рядами Фурье $j_t^*r=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(j_t^*r,\lambda_i)_{0\Lambda}\,\lambda_i$, $j^*r_m=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(j_t^*r_m,\lambda_i)_{0\Lambda}\,\lambda_i$. Тогда при $m\to\infty$

$$\|\overline{r}-\overline{r}_m\|_{-1tG}^2=\Bigg\|\sum_{i=m+1}^{\infty}(j_t^*r,\lambda_i)_{0\Lambda}\,\lambda_i\Bigg\|_{0G}\leqslant 2\sum_{i=m+1}^{\infty}\big\|(j_t^*r,\lambda_i)_{0\Lambda}\,\lambda_i\big\|_{0G}^2=2\sum_{i=m+1}^{\infty}\big\|(r,\lambda_i)_{0\Lambda}\lambda_i\big\|_{-1tG}^2\to 0,$$

как остаточный член разложения функции в ряд Фурье.

Таким образом, $M\big[\|r-r_m\|_{-1tG}^2\big]\to 0,\ m\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для каждого фиксированного t и $\alpha>0$ имеет место соотношение* $\lim\limits_{m\to\infty}\|\mathcal{R}_r^{\alpha}-\mathcal{R}_{mm}^{\alpha}\|=0$, *где* $\mathcal{R}_r^{\alpha}=\mathcal{R}_r+\alpha I\delta(\tau-\sigma)$ *и* $\mathcal{R}_{mm}^{\alpha}=\mathcal{R}_{mm}+\alpha I\delta(\tau-\sigma)$.

Доказательство. Операторы $\mathcal{R}_r^\alpha$ и $\mathcal{R}_{mm}^\alpha$ для всех $\alpha > 0$ определены на всем $W_2^1(G)$. По определению операторной нормы имеем

$$\|\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha\| = \sup_g \left\{ \frac{\left|\left\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha] g, g \right\rangle\right|}{\|g\|_{1tG}};\ g \in W_{2t}^1(G),\ \|g\|_{1tG} \neq 0 \right\}.$$

Оценим числитель. После несложных преобразований находим

$$\left|\left\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha] g, g \right\rangle\right| = \left| M\big[\langle r_\alpha, g\rangle^2 - \langle r_{m\alpha}, g\rangle^2\big]\right| = \left| M\big[\langle r_\alpha - r_{m\alpha}, g\rangle \langle r_\alpha + r_{m\alpha}, g\rangle\big]\right|, \tag{39}$$

где $r_\alpha(\tau)$ — наблюдения, связанные с $u(\tau, x)$ соотношением $r_\alpha(\tau) = \mathcal{S}u + w_\alpha(\tau)$; $w_\alpha(\tau)$ — белый невырожденный шум с нулевым средним и ковариационным оператором $M\big[w_\alpha(\tau);\ w_\alpha(\sigma)\big] = (\mathcal{W} + \alpha I)\delta(\tau - \sigma)$. Наблюдения $r_{m\alpha}(\tau)$ строятся аналогично. Эти процессы нужны лишь для доказательства, конечный алгоритм решения задачи их не будет содержать.

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к правой части (39), получаем аналогично доказательству леммы 3, что

$$\left|\left\langle [\mathcal{R}_r^\alpha - \mathcal{R}_{mm}^\alpha] g, g \right\rangle\right| \leqslant M\big[\|r_\alpha - r_{m\alpha}\|^2_{-1tG}\big] \Big(M\big[\|r_\alpha + r_{m\alpha}\|^2_{-1tG}\big]\Big)^{1/2} \|g\|^2_{1tG} \to 0$$

при $m \to \infty$, поскольку поведение r_α и $r_{m\alpha}$ такое же, как r и r_m.

Теорема 2. *Для фиксированных $\alpha > 0$ и t выполняется равенство*

$$\lim_{k,m\to\infty} M\big[(z, \widehat{u}_{km}^\alpha - \widehat{u}_\alpha)_q^2\big] = 0, \quad z \in E_q, \tag{40}$$

где $\widehat{u}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha r$, $\mathcal{A}_\alpha$ — решение уравнения (13), $\widehat{u}_{km}^\alpha = \mathcal{A}_{km}^\alpha r$, $\mathcal{A}_{km}^\alpha$ *— решение уравнения* (38).

Доказательство. Из уравнения (38) находим, что $\mathcal{A}_{km}^\alpha = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1}$; этот оператор задает оптимальную линейную оценку $\widehat{u}_{km}^\alpha(t, x) = \mathcal{A}_{km}^\alpha r = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm} + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} r$.

Аналогично, из уравнения (13) имеем $\widehat{u}_\alpha(t, x) = \mathcal{A}_\alpha r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r + \alpha I)^{-1} r = \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1} r$. Согласно этим формулам, математическое ожидание в (40) можно записать в виде

$$\begin{aligned} M\Big[\big(z, \widehat{u}_{km}^\alpha - \widehat{u}_\alpha(t, x)\big)_q^2\Big] &= M\left[\Big(z, \big\{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)\big\} + \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1} r\Big)_q^2\right] \leqslant \\ &\leqslant 2\left(M\big[z, \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)_q^2\big] + M\left[\Big(z, \big\{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\} r\Big)_q^2\right]\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к первому слагаемому в правой части, получаем

$$M\big[(z, \mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}(r_m - r)_q^2\big] \leqslant \|z\|_q^2 \left\|\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1}\right\|^2 M\big[\|r_m - r\|^2_{-1tG}\big] \to 0$$

при $k,\ m \to \infty$ по лемме 3.

Оценим второе слагаемое. Прибавим и вычтем $\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}$; после преобразований применим неравенство Коши–Буняковского. Имеем при $k,\ m \to \infty$

$$\begin{aligned} &M\left[\Big(z, \big\{\mathcal{R}_{km}(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - \mathcal{R}_{ur}(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\big\} r\Big)_q^2\right] \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2\Big(\|z\|_q^2 \|\mathcal{R}_{km}\|^2 \left\|(\mathcal{R}_{mm}^\alpha)^{-1} - (\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\right\|^2 + \left\|(\mathcal{R}_r^\alpha)^{-1}\right\|^2 \|\mathcal{R}_{km} - \mathcal{R}_{ur}\|^2 \|r\|^2_{-1tG}\Big) \to 0 \end{aligned}$$

согласно леммам 3 и 4.

Подставим эти соотношения в (41) и получим утверждение теоремы.

Теорема 3. *Для каждого фиксированного t справедливо соотношение*

$$\lim_{\alpha\to 0} \underline{\lim}_{k,m\to\infty} M\Big[\big(z, \widehat{u}_{km}^\alpha(t, x) - u(t, x)\big)_q^2\Big] = m(t),$$

где $\widehat{u}_{km}^\alpha(t, x)$ — решение приближенной задачи фильтрации (23), (24).

Доказательство. Прибавим и вычтем под знаком скалярного произведения $\widehat{u}_{\alpha}(t,x)$; после несложных преобразований получим

$$\lim_{\alpha\to 0}\ \varliminf_{k,m\to\infty} M\left[\left(z,\widehat{u}^{\alpha}_{km}(t,x)-u(t,x)\right)^2_q\right]=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\ \varliminf_{k,m\to\infty} M\left[\left\{\left(z,\widehat{u}^{\alpha}_{km}(t,x)-\widehat{u}_{\alpha}(t,x)\right)_q+\left(z,\widehat{u}^{\alpha}(t,x)-u(t,x)\right)_q\right\}^2\right]\leqslant m(t)$$

согласно теореме 2.

Таким образом, доказана сходимость решения приближенной регуляризованной задачи линейной фильтрации к решению исходной задачи.

Приведем алгоритм решения приближенной задачи линейной оптимальной фильтрации (32)–(34), основанный на построении последовательности регуляризованных оценок, полученных с помощью фильтра Калмана–Бьюки.

Введем обозначения. Через $\chi(\tau)$ обозначим вектор с координатами

$$\chi_i(\tau)=\begin{cases}\vartheta_i(\tau), & \text{при}\ \ i\leqslant k;\\ \dfrac{d\vartheta_{i-k}(\tau)}{d\tau}, & \text{при}\ \ k<i\leqslant 2k,\end{cases}$$

матрица $F=\begin{bmatrix}0 & I\\ F_k & 0\end{bmatrix}$, где I — единичная матрица порядка k, F_k — матрица размерности $k\times k$, координаты которой $F_k^{ij}=(\mathcal{B}\rho_i,\rho_j)_{0P}$; $\zeta(\tau)$ — вектор с координатами $\zeta_i(\tau)=0$ при $i=1,2,\ldots,k$ и $\zeta_i(\tau)=(v,\rho_{i-k})_{0P}$ при $i=k+1,k+2,\ldots,2k$; C — матрица $m\times 2k$, $C=[C_k\ \overline{0}]$, где $\overline{0}$ — нулевая матрица размера $m\times k$, а координаты матрицы C_k вычисляются по формуле $C_k^{lj}=(\mathcal{S}\rho_j,\lambda_l)_{0\Lambda}$; $r_m(\tau)$ — вектор наблюдений, $r^l_m(\tau)=\big(r(\tau),\lambda_l\big)_{0\Lambda}$, $w(\tau)$ — шум, $w_l=(\xi,\lambda_l)_{0\Lambda}$, $i=1,2,\ldots,k$, $j=1,2,\ldots,k$, $l=1,2,\ldots,m$.

С учетом введенных обозначений задачу линейной оптимальной фильтрации можно сформулировать следующим образом.

Векторный случайный процесс $\chi(\tau)$ моделируется системой

$$\frac{d\chi(\tau)}{d\tau}=F\chi(\tau)+\zeta(\tau),\quad \chi(0)=\begin{bmatrix}\vartheta_0\\ \vartheta_{10}\end{bmatrix},\tag{42}$$

где $\zeta(\tau)$ — белый вырожденный шум. Наблюдается процесс $\{r_m(\tau),0\leqslant\tau\leqslant t\}$, связанный с $\chi(\tau)$ соотношением

$$r_m(\tau)=C\chi(\tau)+w(\tau).\tag{43}$$

Требуется найти последовательность оценок $\{\widehat{\chi}^{\alpha}(\tau)\}_{\alpha>0}$ процесса $\chi(\tau)$ в момент $\tau=t$, удовлетворяющую критерию

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\{M\left[\left(z,\chi(t)-\mathcal{H}^{\alpha}r_m(t)\right)^2_k\right]-\inf_{\mathcal{H}} M\left[\left(z,\chi(t)-\mathcal{H}r_m(t)\right)^2_k\right]\right\}=0,\tag{44}$$

где нижняя грань берется по всем линейным операторам $\mathcal{H}$, действующим из пространства наблюдений в пространство состояний; $\mathcal{H}$ — определяется соотношением

$$\mathcal{H}r_m=\int_0^t h(t,\tau)r_m(\tau)\,d\tau,\quad \widehat{\chi}^{\alpha}(t)=\mathcal{H}^{\alpha}r_m=\int_0^t\widehat{h}^{\alpha}(t,\tau)r_m(\tau)\,d\tau;$$

матрица $\widehat{h}^{\alpha}(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$M\big[\chi(t)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]=\int_0^t\widehat{h}^{\alpha}(t,\tau)C(\tau)M\big[\chi(\tau)\chi^{\mathrm{T}}(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau+\widehat{h}^{\alpha}(t,\sigma)S_{\alpha}(\sigma),\tag{45}$$

а $S_{\alpha}(\sigma)=R(\sigma)+\alpha I_m$, где I_m — единичная матрица порядка m и $R(\sigma)$ — матрица интенсивности вырожденного белого шума $w(\sigma)$; z — произвольный вектор из E_{2k}.

Имеют место следующие статистики:

$$M[\vartheta_0]=0,\ M[\vartheta_0\vartheta_0^{\mathrm{T}}]=P_0,\ P_0^{ij}=(\mathcal{U}_0\rho_i,\rho_j)_{0P},\quad i,j=1,2,\dots,k,$$
$$M[\vartheta_{10}]=0,\ M[\vartheta_{10}\vartheta_{10}^{\mathrm{T}}]=P_{10},\ P_{10}^{ij}=(\mathcal{U}_1\rho_i,\rho_j)_{0P},\quad i,j=1,2,\dots,k,$$
$$M\big[\zeta(\tau)\big]=0,\ M\Big[\zeta(\tau)\big(\zeta(\sigma)\big)^{\mathrm{T}}\Big]=Q(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ Q_{ij}(\tau)=(\mathcal{V}\rho_i,\rho_j)_{0P}\quad i,j=1,2,\dots,k,,$$
$$M\big[w(\tau)\big]=0,\ M\big[w(\tau)w^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]=R(\tau)\delta(\tau-\sigma),\ R_{ql}(\tau)=(\mathcal{W}\lambda_q,\lambda_l)_{0\Lambda},\quad q,l=1,2,\dots,m,$$
$$M\big[\chi(0)\big]=0,\quad M\big[\chi(0)\chi^{\mathrm{T}}(0)\big]=\begin{bmatrix}P_0 & 0\\ 0 & P_{10}\end{bmatrix},\quad M\big[\chi(0)\zeta^{\mathrm{T}}(\tau)\big]=M\big[\chi(0)w^{\mathrm{T}}(\tau)\big]=M\big[w(\tau)\zeta^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]=0,$$

$R(\tau)$ — матрица порядка m, $R(\tau)\geqslant 0$, $\mathcal{U}_0$ — ковариационный оператор процесса $u_0(x)$, $\mathcal{U}_1$ — ковариационный оператор процесса $u_1(x)$, $\mathcal{V}$ — ковариационный оператор процесса $v(\tau,x)$, $\mathcal{W}$ — ковариационный оператор процесса $\xi(\tau,x)$.

Запишем матрицу $\widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau)$ в виде $\widehat{h}^{\,\alpha}(t,\tau)=\begin{bmatrix}h^{\alpha}_{1mk}(t,\tau)\\ h^{\alpha}_{2mk}(t,\tau)\end{bmatrix}$, где $h_{1mk}(t,\tau)$ и $h_{2mk}(t,\tau)$ — матрицы размера $k\times m$. Тогда уравнение Винера–Хопфа (45) можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} M\big[\vartheta(t)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]=\displaystyle\int_0^t h^{\alpha}_{1mk}(t,\tau)C_k(\tau)M\big[\vartheta(t)(\tau)\vartheta(t)^{\mathrm{T}}(\sigma)C_k^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau+h^{\alpha}_{1mk}(t,\sigma)S_\alpha(\sigma),\\ M\big[\vartheta(t)r_m^{\mathrm{T}}(\sigma)\big]=\displaystyle\int_0^t h^{\alpha}_{2mk}(t,\tau)C_k(\tau)M\big[\vartheta(t)(\tau)\vartheta(t)^{\mathrm{T}}(\sigma)C_k^{\mathrm{T}}(\sigma)\,d\tau+h^{\alpha}_{2mk}(t,\sigma)S_\alpha(\sigma).\end{cases}\tag{46}$$

Интегральные уравнения в (46) независимы и первое уравнение совпадает с уравнением Винера–Хопфа (37) для задачи (32) – (34), т.е. решение h^{α}_{1mk} совпадает с h^{α}_{mk}. Следовательно, оценка состояния $\widehat{\vartheta}^{\,\alpha}(t)$ системы (32) – (34) равна первым k координатам вектора $\widehat{\chi}^{\,\alpha}(t)$ — решению задачи (42) – (44), которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau)}{d\tau}=F(\tau)\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau)+P(\tau)C^{\mathrm{T}}(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)\big[r_m(\tau)-C(\tau)\widehat{\chi}^{\,\alpha}(\tau)\big],\quad \widehat{\chi}^{\,\alpha}(0)=0,\ 0\leqslant\tau\leqslant t<\infty,\tag{47}$$

где $P(\tau)$ — решение уравнения Риккати

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau}=F(\tau)P(\tau)+P(\tau)F^{\mathrm{T}}(\tau)+G(\tau)Q(\tau)G^{\mathrm{T}}(\tau)-P(\tau)C^{\mathrm{T}}(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)C(\tau)P(\tau),\quad P(0)=\begin{bmatrix}P_{10} & 0\\ 0 & P_0\end{bmatrix}.\tag{48}$$

Обоснование алгоритма решения задачи (42) – (44) дано в [3, 5]. Параметр регуляризации выбирается согласно одному из методов, приведенных в [1 – 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01–01–00398).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
5. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Колос М.В., Колос И.В.* О разрешимости обобщенной задачи Дирихле для гиперболического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2002. **3**, № 2. 68–78.

Поступила в редакцию
27.09.2003